

MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 147

Metody estymacji Value at Risk

Tomasz Bałamut

Warszawa, sierpień 2002 r.

Projekt graficzny:

Oliwka s.c.

Skład i druk:

Drukarnia NBP

Wydął:

Narodowy Bank Polski
Departament Komunikacji Społecznej
00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21
tel. (22) 653 23 35, fax (22) 653 13 21

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2002

Materiały i Studia rozprowadzane są bezpłatnie.

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: <http://www.nbp.pl>

 Spis treści

Spis rysunków	5
Spis tablic	6
Streszczenie	7
1. Wstęp	8
2. Wybrane cechy finansowych szeregów czasowych	10
3. Czym jest Value at Risk?	15
3.1. Definicja	15
3.2. Zastosowania	16
3.3. Wady i zalety. VaR jako spójna miara ryzyka	17
3.4. Ogólny podział modeli	19
4. Zagadnienia związane z kalkulacją VaR	21
4.1. Mapowanie pozycji	21
4.2. Problem horyzontu czasowego	23
4.3. Współzależność czynników ryzyka	27
4.4. Ryzyko płynności	32
4.5. Dane niesynchroniczne	33
4.6. Przybliżona wycena opcji	35
4.7. Zmienności implikowane	36
5. Monitorowanie ryzyka rynkowego w świetle dokumentów nadzoru bankowego	37
6. Podstawowe metody estymacji VaR	40
6.1. Podejścia nieparametryczne	40
6.1.1. Metoda historycznej symulacji	40
6.2. Modele parametryczne	42
6.2.1. Normalny rozkład strat	42
6.3. Metody symulacyjne - metoda Monte Carlo	46
7. Rozwinięcia modeli podstawowych i podejścia alternatywne	51
7.1. Hybrydowa symulacja historyczna	51
7.2. Wygładzanie kwantyli empirycznych	51
7.3. Modele parametryczne uwzględniające nieliniowość funkcji wyceniającej	54
7.4. Modele wartości ekstremalnych	57
7.4.1. Model maksimów blokowych	57
7.4.2. Estymacja ogonów rozkładów	60
7.4.3. Modele POT	61
7.5. Zmodyfikowana metoda Monte Carlo	65
7.6. Model CAViaR	66

8. Model VaR na przykładzie systemu Risk Metrics	69
8.1. Rozwinięcia modelu	70
8.1.1. Mieszany rozkład normalny (jump-diffusion model)	71
8.1.2. Rozkład GED	74
9. Weryfikacja i ocena modeli	77
9.1. Wyniki badań empirycznych	80
10. Procedury komplementarne i alternatywna miara ryzyka	84
11. Przykład modelowania VaR	89
11.1. Charakterystyka instrumentów składowych i zwrotów z portfela	89
11.2. Opis symulacji	93
11.3. Wyniki symulacji. Wnioski	95
XII. Podsumowanie. Wnioski końcowe	100
Bibliografia	104

Spis rysunków

- Rys. 1. Przykład serii zwrotów z instrumentu finansowego
- Rys. 2. Hierarchiczna struktura VaR
- Rys. 3. Odzworowanie pozycji w 3-miesięcznym futures na 3-miesięczny depozyt eurodolarowy
- Rys. 4. Przepływy związane z obligacją o stałym oprocentowaniu denominowaną w walucie zagranicznej
- Rys. 5. Zmienności dla różnych aktywów w zależności od horyzontu czasowego pomiaru
- Rys. 6. Endogeniczne ryzyko płynności
- Rys. 7. Korelacja LIBOR i cen 10-letnich T-Notes w zależności od momentu pomiaru
- Rys. 8. Ogony rozkładów: normalnego i mieszanego normalnego
- Rys. 9. Brzegowy rozkład *a posteriori* zwrotów na przykładzie cen złota
- Rys. 10. Rozkład GED dla $\nu=1$, $\nu=1.5$ i $\nu=2$ (odpowiednio linia j. zielona, szara, c. zielona)
- Rys. 11. Ogony rozkładu normalnego i GED dla $\nu=1$
- Rys. 12. Zwroty dla kursu PLN/USD oraz amerykańskich T-Notes
- Rys. 13. Zwroty dla akcji i bonów
- Rys. 14. Ogony rozkładu normalnego i rozkładu empirycznego zwrotów z portfela
- Rys. 15. Wykres kwantyl-kwantyl (bez trendu) zwrotów z portfela względem rozkładu normalnego
- Rys. 16. Zwroty z portfela oraz przykładowy Value-at-Risk
- Rys. 17. Porównanie VaR dla trzech metod przy poziomie ufności 0.95 i oknie obserwacji $n = 100$
- Rys. 18. Porównanie VaR dla trzech metod przy poziomie ufności 0.99 i oknie obserwacji $n = 200$.
- Rys. 19. Zwroty bezwzględne z portfela i VaR dla metody VC i różnej długości okna ($p = 0.95$)

Spis tablic

- Tabl. 1. Korelacja zmian LIBOR-u i cen 10-letnich rządowych obligacji amerykańskich
- Tabl. 2. Dokładne przedziały ufności dla metody historycznej symulacji
- Tabl. 3. Wagi do wygładzania wartości VaR
- Tabl. 4. Parametry statystyczne dla zwrotów z opcji i instrumentu podstawowego
- Tabl. 5. Rozkłady gęstości Johnsona
- Tabl. 6. Parametry zwrotów dla kursów wymiany
- Tabl. 7. Definicja stref jakości modelu VaR
- Tabl. 8. Straty dla trzech scenariuszy awaryjnych
- Tabl. 9. Charakterystyka opisowa zwrotów z czynników ryzyka

STRESZCZENIE

Koncepcja Value at Risk (VaR) stanowi miarę ryzyka rynkowego pozwalającą określić górną granicę oczekiwanych strat dla portfela aktywów w danym okresie. Zagadnienie kwantyfikacji ryzyka stanowi podstawowy element współczesnych teorii i modeli opisujących rynki finansowe. Jednocześnie metodologia związana z VaR jest punktem wyjścia dla modelowania innego typu ryzyk (np. kredytowego).

Praca ta przedstawia szczegółowo metodologię Value at Risk, począwszy od historii jej powstania, pojęć teorii szeregów czasowych i modeli najczęściej stosowanych w analizie danych finansowych, po szczegółowe zagadnienia związane z wyznaczaniem VaR. Szczególny nacisk położony jest na numeryczne aspekty estymacji tej miary ryzyka. Opisane zostały również standardy kalkulacji Bazylejskiego Komitetu Nadzoru Bankowego, a także pokrewne miary ryzyka rynkowego. Na zakończenie przedstawiam przykład kalkulacji VaR dla trzech podstawowych metod estymacji. Wyniki symulacji wskazują m.in., że przyjęcie długich okresów obserwacji niekoniecznie prowadzi do bardziej konserwatywnych wartości VaR.

Klasyfikacja JEL: G11, C40, C49

Słowa kluczowe: Value at Risk, statystyka rynków finansowych, ryzyko rynkowe, metody numeryczne.

1

Wstęp

Początek lat siedemdziesiątych śmiało można uznać za początek nowej ery dla międzynarodowych rynków finansowych. Od tego czasu rynki charakteryzują się niespotykanym wcześniej poziomem zmienności, a więc w konsekwencji ryzyka. Jednocześnie lawinowo wzrosła liczba i różnorodność oferowanych instrumentów pochodnych - opcji, swapów i kontraktów futures. Instrumenty te idealnie nadają się do zarządzania ryzykiem. Z jednej strony istnieje wiele standardowych, tanich i łatwo zbywalnych derywatów, z drugiej - można tworzyć instrumenty pod indywidualne potrzeby klienta. Instrumenty pochodne nadają się również znakomicie do celów spekulacyjnych, oferując wysoki poziom dźwigni finansowej, a to z kolei sprawia, że mogą być one jeszcze jednym źródłem ryzyka. Jeśli dodamy do tego jeszcze internacjonalizację gospodarki, inwestowanie na wielu rynkach i w różnych walutach, to staje się jasnym, że zaistniała silna potrzeba nowej miary ryzyka na poziomie portfela inwestycyjnego.

Można przytoczyć wiele spektakularnych przykładów „katastrof finansowych” uzasadniających tezę o potrzebie stworzenia nowej, skutecznej metodologii pomiaru ryzyka rynkowego. Nie chodzi tu tylko o międzynarodowe zaburzenia finansowe, takie jak „Czarny Poniedziałek”(X 1987), załamanie się Europejskiego Systemu Walutowego (IX 1992), czy też kryzysy: azjatycki (1997) i rosyjski (VIII 1998). Prestroga są również bankructwa Orange County i banku Barings, których uniknięcie przy odpowiednim monitorowaniu ekspozycji na czynniki ryzyka rynkowego było możliwe.

„Potrzeba matką wynalazku”, a tym wynalazkiem okazała się metodologia Value at Risk (w skrócie VaR), czyli, w polskim przekładzie, „wartość narażona na ryzyko”. Ta stosunkowo nowa koncepcja po raz pierwszy wprowadzona została w życie przez kilka międzynarodowych instytucji finansowych pod koniec lat 80-tych. Od tego czasu popularność VaR rosła w sposób lawinowy. Znaczącym krokiem było stworzenie przez J.P.Morgan systemu *RiskMetrics™* w październiku 1994 roku (zob. [34], [1], [2]). VaR zaczął być również popularny wśród firm i inwestorów instytucjonalnych. Kolejnymi krokami przyczyniającymi się do rozwoju popularności nowej metodologii było pojawienie się publikacji, jak chociażby P. Joriona [32], kompleksowo rozważających zagadnienia związane z VaR, a także powstanie systemów informatycznych pozwalających na implementację metodologii.

Nowa metoda wzbudziła również zainteresowanie instytucji nadzorczych. W styczniu 1996 roku Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego uchwalił poprawkę do swoich standardów wymogów kapitałowych ze względu na ponoszone ryzyka rynkowe [5] (Amendment of the Capital Accord to Incorporate Market Risk), określającą zasady uwzględniania przez banki ponoszonych przez nie ryzyk rynkowych związanych ze zmianami stóp procentowych, kursów wymiany i cen towarów, gdzie po raz pierwszy pozwolono na szacowanie przez banki tych ryzyk za pomocą wewnętrznych modeli VaR. W sierpniu tego roku śladami Europy podążyły Stany Zjednoczone, gdzie Federalny Bank Rezerw (Fed) uchwalił „Risk-Based Capital Standards: Market Risk” (standardy kapitałowe związane z ryzykami rynkowymi), wzorując się na wspomnianej poprawce Komisji Bazylejskiej. W obu publikacjach określono zasady, według których banki miały kalkulować we własnym zakresie VaR. Również w 1993 roku weszła w życie dyrektywa Unii Europejskiej dotycząca standardów kapitałowych, pozwalająca stosować Value at Risk jako sposób obliczania ryzyka dla pozycji walutowych.

Value at Risk stał się tematem mojej pracy z kilku powodów. Po pierwsze, koncepcja ta wiąże się, w mniejszym lub większym stopniu, z niemal wszystkimi teoriami stanowiącymi narzędzie opisu współczesnych rynków finansowych. Pojawiają się tutaj elementy teorii Markowitza wyboru optymalnego portfela, metody wyceny instrumentów pochodnych, modele warunkowej

heteroskedastyczności, metody Monte Carlo, modele rozkładów zwrotów z instrumentów finansowych, problematyka wydarzeń ekstremalnych czy też zagadnienie dywersyfikacji portfela. Po drugie, VaR stał się punktem wyjścia dla modelowania innego typu ryzyk, jak chociażby ryzyko kredytowe czy też ryzyko operacyjne. Na podejściu wartości zagrożonej bazuje również cały zestaw komplementarnych miar ryzyka - jak chociażby przeciętna warunkowa strata, czy też analiza scenariuszy awaryjnych (ang. *stress testing*). Po trzecie, VaR stanowi istotny element teorii zarządzania finansami, pozwalając znaleźć optymalny poziom kapitału dla prowadzonych operacji finansowych, przy zadanym poziomie bezpieczeństwa, co prowadzi do maksymalizacji ROE i wartości dla akcjonariuszy.

Praca nie koncentruje się jednak wyłącznie na statystycznej i matematycznej stronie zagadnienia. Omówione zostały w niej również kwestie standardów ustalanych przez organy nadzoru i niektóre praktyczne zagadnienia implementacji metodologii. Pokusiłem się również o ukazanie perspektyw rozwoju metod pomiaru ryzyka rynkowego i roli VaR w ogólnym kontekście zarządzania ryzykiem.

W rozdziale pierwszym przedstawiam historyczne uwarunkowania prowadzące do powstania koncepcji Value at Risk i opisuję gwałtowny wzrost jej popularności. Rozdział drugi poświęcony jest istotnym, z punktu widzenia omawianej metodologii, cechom finansowych szeregów czasowych. Rozdział trzeci definiuje Value at Risk, przedstawia zastosowania, zalety i wady metodologii oraz ogólny podział stosowanych metod kalkulacji. W kolejnym rozdziale przedstawiono wiele zagadnień związanych z kalkulacją VaR - mapowanie pozycji, pomiar współzależności, zagadnienia horyzontu czasowego i in. W rozdziale piątym zajmuję się standardami kalkulacji VaR ustalonymi przez Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego. Rozdział szósty prezentuje trzy podstawowe podejścia do kalkulacji VaR - metodę delta-normal, metodę historycznej symulacji oraz metodę Monte Carlo. Przedstawione zostały założenia i sposoby kalkulacji dla poszczególnych podejść. W rozdziale VII opisałem rozwinięcia modeli podstawowych oraz alternatywne podejścia, m.in. podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych. Rozdział ósmy poświęciłem opisowi popularnego systemu *RiskMetrics™*, wraz z jego rozwinięciami. W rozdziale dziewiątym zajmuję się problemem testowania jakości modeli VaR i metod stosowanych do kalkulacji wartości narażonej na ryzyko. Omówione zostały zarówno wytyczne Komitetu Bazylejskiego, jak i sugestie zawarte w literaturze. Rozdział X przedstawia komplementarne względem VaR metody oceny i pomiaru ryzyka - *stress testing*, *Worst Case Scenario* i *Mean Excess Loss*. W rozdziale XI opisuję wyniki testowania trzech popularnych podejść, czyli metod: delta-normalnej, Risk Metrics i historycznej symulacji, w kontekście przykładowego portfela. Rozdział dwunasty zawiera wnioski oraz podsumowanie głównych wątków poruszonych w niniejszej pracy.

2

Wybrane cechy finansowych szeregów czasowych

Przed omówieniem zagadnień bezpośrednio związanych z kalkulacją i zastosowaniem Value at Risk, chciałbym w skrócie przedstawić wybrane zagadnienia pojawiające się przy statystycznym opisie rynków finansowych. Z jednej strony pozwoli to na lepsze ukazanie związków VaR z istniejącymi metodami badania danych finansowych. Z drugiej strony, znajomość cech szczególnych finansowych szeregów czasowych pozwala na zrozumienie pewnych zagadnień związanych z estymacją, weryfikacją i wykorzystaniem VaR.

Podstawowym, modelowym obrazem rynków finansowych jest zazwyczaj tzw. **ruch Browna**. W **arytmetycznym ruchu Browna** tzw. **proces ceny** możemy przedstawić (zob. [53], [34]), jako $P_t = P_{t-1} + \mu + \sigma \varepsilon_t$, gdzie $\varepsilon \sim N[0,1]$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym, standardowym rozkładzie normalnym (*i.i.d.*)¹, P_t oznacza cenę w momencie t , μ jest odchyleniem standardowym procesu, a μ jego wartością oczekiwaną. Problem polega na tym, że w takim wypadku zawsze istnieje niezerowe prawdopodobieństwo ujemnej ceny, a ceny rosną w wartościach relatywnych coraz wolniej. Właściwszym modelem jest **geometryczny ruch Browna**, gdzie $P_t = P_{t-1} \exp(\mu + \sigma \varepsilon_t)$. Oznacza to, że ceny mają (warunkowo względem P_{t-1}) rozkład lognormalny, natomiast logarytmy cen mają (warunkowo względem p_{t-1}) rozkład normalny, gdyż jeśli zlogarytmujemy stronami wyrażenie otrzymamy $p_t = p_0 + \mu + \sigma \varepsilon_t$ lub $r = \mu + \sigma \varepsilon_t$, gdzie p_t oznacza logarytm ceny, a r log-zwrot. Ważną odmianą takiego modelu jest **heteroskedastyczny ruch Browna** w postaci $p_t = p_0 + \mu + \sigma(t)\varepsilon_t$, gdzie $\sigma(t)$ oznacza, iż odchylenie standardowe procesu zależy od czasu (historii procesu).

Często w przypadku rynków finansowych modeluje się nie cenę (poziom), ale zwrot (czyli zmianę poziomu). **Zwrot absolutny** określamy jako $r = P_t - P_{t-1}$, gdzie P_t oznacza cenę w momencie t , **zwrot względny** natomiast jako $r = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$. Jednak najczęściej w modelowaniu korzysta się z tzw. **log-zwrotów**. Log-zwrot definiujemy jako $r = \ln(P_t/P_{t-1}) = \ln P_t - \ln P_{t-1}$. Zaletą takiego przedstawienia zmiany ceny jest z jednej strony odniesienie jej relatywność (odniesienie do aktualnego poziomu ceny) oraz addytywność, bowiem zwrot w danym przedziale $[t_0; t_k]$ jest sumą zwrotów w momentach t_1, t_2, \dots, t_k . Warto zauważyć, że dla małych Δp zwroty względne są w przybliżeniu równe log-zwrotom².

Głównym powodem korzystania ze zwrotów (zmian poziomów), a nie z poziomów zmiennych (czyli cen, wartości indeksów, kursów wymiany etc.), jest kwestia **stacjonarności**. Mówimy, że dany proces stochastyczny (względnie jego realizacja, czyli np. szereg czasowy wartości cen akcji) jest słabo stacjonarny, jeśli wartość oczekiwana procesu i jego wariancja są

¹ Z ang. *i.i.d.* - *independent identically distributed*, tj. niezależne o jednakowym rozkładzie.

² Wynika to z rozwinięcia funkcji $\ln(x+1)$ w szereg Taylora, gdzie $\ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots$, przy czym x oznacza zwrot względny, a $\ln(x+1)$ - log-zwrot.

skończone i nie zależą od czasu, a kowariancja zależy jedynie od odstępu między realizacjami procesu. Nietrudno dostrzec, iż ceny akcji są niestacjonarne, gdyż ich średnia ulega istotnym zmianom (tzn. istnieją wyraźnie nielosowe trendy). Zwroty natomiast (czyli przyrosty cen) oscylują wokół zera (nie wykazują trendów).

Rys. 1. Przykład serii zwrotów z instrumentu finansowego



Czy zatem proces log-zwrotów można przybliżyć za pomocą procesu "białego szumu"? Czy ceny podążają geometrycznym ruchem Browna? Żeby odpowiedzieć na te pytania, trzeba przyrzeć się wynikom wieloletnich badań szeregów finansowych, przedstawionych syntetycznie chociażby w [53], [34]. Jak się okazuje, odpowiedź na powyższe pytanie brzmi "nie", bowiem szeregi danych finansowych posiadają szereg ciekawych, aczkolwiek utrudniających życie charakterystyk, przedstawionych w skrócie poniżej.

1. **Heteroskedastyczność.** Rys. 1 przedstawia typowy obraz szeregu czasowego zwrotów. Widać dość wyraźne skupiska zwrotów (ang. *clusters*), cechujące się mniejszą lub większą zmiennością. Formalny test autokorelacji kwadratów log-zwrotów za pomocą np. statystyki Boxa-Ljunga, często pozwala na odrzucenie hipotezy o niezależności. Oznacza to że wariancja procesu σ^2 (jak również odchylenie standardowe) zależą od czasu i poprzednich wartości wariancji (historii procesu).
2. **Autokorelacja.** Szeregi czasowe zwrotów wykazują również autokorelację, jednak z reguły na granicy istotności statystycznej, nie pozwalając na ekonomiczne wykorzystanie tego faktu.
3. **"Grube ogony"**. Analiza danych finansowych wskazuje również na relatywnie wysoką (względem rozkładu normalnego) częstotliwość występowania znacznych zmian cen. W przypadku modelowania rozkładu zwrotów oznacza to, że prawdopodobieństwo

$P(y_i > y)$ (lub $P(y_i < -y)$ dla lewego ogona dystrybuanty) jest dla $y \rightarrow \infty$ większe niż w przypadku rozkładu normalnego.

4. **Kurtoza.** Innym sposobem na opisanie zjawiska "grubych ogonów" jest występowanie ekscesu kurtozy. Kurtoza jest to po prostu czwarty moment centralny rozkładu zmiennej losowej, dany wzorem $s^4 = E[(X - E(X))^4]$. Tym niemniej szersze zastosowanie znajduje współczynnik kurtozy dany przez $\kappa = s^4/\sigma^4$, gdzie σ oznacza odchylenie standardowe. Nieobciążonym estymatorem współczynnika kurtozy z próby jest

$$\hat{\kappa} = \frac{N^2 - 2N + 3}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 - 3 \frac{(N-1)(2N-3)}{N(N-2)(N-3)} \quad (1)$$

Rozkład normalny ma współczynnik kurtozy równy 3. Eksces kurtozy równy jest współczynnikowi kurtozy minus trzy. Eksces większy od zera wskazuje na relatywnie większe w stosunku do rozkładu normalnego rozproszenie gęstości prawdopodobieństwa, bardziej smukłą część centralną oraz grubsze ogony.

5. **Skośność.** Jest to trzeci moment centralny rozkładu zmiennej losowej, zdefiniowany jako $s^3 = E[(X - E(X))^3]$. Współczynnik skośności ma postać $\gamma = s^3/\sigma^3$. Każdy rozkład symetryczny (włączając normalny) ma $\gamma = 0$. Dodatnie wartości γ wskazują na częstsze występowanie wartości mniejszych od wartości oczekiwanej (tzn. mediana jest na lewo od średniej). Zwroty wykazują najczęściej skośność w lewo ($\gamma < 0$). Nie chodzi tutaj o fakt, że średnia wartość zwrotów jest większa od zera. Jest to raczej przejaw odmiennego zachowania inwestorów w trakcie bessy i w trakcie hossy. Innymi słowy, częściej zdarzają się dodatnie zwroty, ale ujemne mają większe (bezwzględnie) wartości. Nieobciążonym estymatorem współczynnika skośności z próby jest

$$\hat{\gamma} = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^3 \quad (2)$$

6. **Zależności długoterminowe.** Co prawda, jak wspomniałem, szeregi finansowe wykazują dość słabą autokorelację, tym niemniej bardzo często spotyka się zjawisko długoterminowej zależności danych, niewykrywalne za pomocą standardowych metod. Przykładowo w przypadku rynku akcji takie zależności mają zakres czasowy odpowiadający w przybliżeniu długości cyklu gospodarczego (4-5 lat). Metodę badania takiej zależności wprowadził w połowie XX wieku hydrolog H.E.Hurst, badając zmiany poziomu Nilu. Metodę obliczenia tzw. **wykładnika Hursta (H)** podaje chociażby [47] bądź [53] str. 325. Wartość $H = 0.5$ odpowiada zwykłemu ruchowi Browna. Większe wartości odpowiadają występowaniu długookresowej autokorelacji.

Jak zatem widać klasyczny model homoskedastycznego, geometrycznego ruchu Browna, oparty o założenia warunkowej (względem poprzednich zwrotów) normalności log-zwrotów nie opisuje poprawnie rynków finansowych. Stało się to przyczyną powstania i rozwoju całego szeregu nowych modeli i metod opisujących szeregi zwrotów. Przypatrzmy się zatem pokrótce kilku z nich, zwracając uwagę na te spośród nich, które mają związek z modelowaniem VaR.

1. **Modele ARMA.** Jest to grupa modeli, zawierających modele autoregresyjne i modele średniej ruchomej, w których warunkowa wartość oczekiwana zależy od historii procesu, ale wariancja pozostaje stała. Modele ARMA oddawały tylko własność autokorelacji szeregów finansowych, nie pozwalając na modelowanie np. grubych ogonów i skupiania się zwrotów.
2. **Modelowanie warunkowej heteroskedastyczności.** Na początku lat 80-tych zaczęły powstawać modele, w których modelowaniu podlega wariancja procesu. Istnieje bardzo wiele tego typu modeli, przykładami są: ARCH (ang. *AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*), GARCH (ang. *Generalized ARCH*), TARCH (ang. *Threshold ARCH*), R-GARCH (ang. *Randomized GARCH*), HARCH (ang. *Heterogenous interval ARCH*), M-ARCH (ang. *Mean-in ARCH*) czy też SWARCH (ang. *SWitching regime ARCH*). Zarys ich struktury i właściwości zostały omówione w dalszej części pracy.
3. **Modele stochastycznej zmienności** (ang. *Stochastic Volatility Models*). Stosunkowo nowe podejście, opisujące wariancję procesu ceny jako proces stochastyczny (np. błądzenie przypadkowe z *mean reversion*), co prowadzi do np. pojęcia zmienności zmienności.
4. **Alternatywne rozkłady zwrotów.** Do opisu bezwzględnych rozkładów log-zwrotów próbowano zastosować wiele rozkładów. Wspomnieć należy rodzinę rozkładów α -stabilnych, mieszaninę rozkładów normalnych, rozkład t-Studenta, rozkłady \diamond -stabilne czy też klasę uogólnionych rozkładów hiperbolicznych. Generalnie wydaje się, że dobre dopasowanie do danych empirycznych, mierzone jakością odwzorowania zjawiska grubych ogonów, można uzyskać stosując rozkłady α -stabilne i uogólnione hiperboliczne (np. rozkład normalny odwrotny gaussowski). W oparciu o alternatywne względem normalnego rozkłady zwrotów można budować np. modele wyceny opcji lub modele VaR.
5. **Badanie ogonów rozkładów.** Ogony rozkładów wielu zmiennych losowych można przybliżyć za pomocą wyrażenia $y^{-\alpha}L(y)$, gdzie α jest pewną stałą, zwaną **indeksem ogona**³, a $L(y)$ - wolno zmieniającą się funkcją⁴. W przypadku rozkładu normalnego zależność powyższa ma postać wykładniczą. Do rozkładów spełniających taką zależność zaliczają się m.in. rozkłady α -stabilne, rozkład t-Studenta, czy też rozkład Pareto. Rozkłady o danym indeksie ogona α posiadają skończone pierwsze α momentów⁵.

Dla potrzeb analizy danych finansowych zastosowano i rozwinięto znane wcześniej metody. Indeks ogona α można estymować korzystając np. z estymatorów Pickandsa, Hilla lub Dekkersa-Einmahla-de Haana. Estymatory te występują również w **teorii wartości ekstremalnych** (pot. rozdział 7.4), dzięki której możliwe jest modelowanie asymptotycznego rozkładu prawego ogona dystrybuanty empirycznej wielu rozkładów prawdopodobieństwa. Statystyka Andersona-Darlinga pozwala z kolei badać jakość dopasowania dystrybuanty teoretycznej do danych empirycznych dla wartości skrajnych.

³ Którego nie należy mylić z indeksem stabilności występującym w rozkładach α -stabilnych.

⁴ Najprostszym przykładem jest funkcja stała.

⁵ Tzn. jeśli $\alpha < 2$ to mamy do czynienia z nieskończoną wariancją zmiennej losowej.

- 2
6. **Długoterminowa autokorelacja danych.** Wykładnik $H \neq 0.5$ modeluje się stosując tzw. ułamkowy ruch Browna B_t^H dla $0 < H < 1$ i czasu t . Na bazie ułamkowego ruchu Browna można dokonać np. modyfikacji formuły Blacka-Scholesa wyceny opcji. Modelowanie długoterminowej zależności danych umożliwia również: model ARFIMA oparty na koncepcji danych zintegrowanych ułamkowo oraz niektóre modele warunkowej heteroskedastyczności, np. wspomniany model HARCH.
7. **Modele regresji przełącznikowej** (ang. *regime switching regression*). Jako model rynku przyjęto istnienie kilku **reżimów** (stanów) rynku, w których występują odmienne zachowania uczestników rynku, a co za tym idzie - różna zmienność i rozkład zwrotów.

Zajmijmy się dokładniej modelami opisanymi w punkcie trzecim. Przykładem struktury modelu warunkowej heteroskedastyczności niech będzie model R-GARCH (r, p, q) opisany następującymi wzorami:

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (3)$$

$$h_t = \sum_{i=1}^r d_i \eta_{t-i} + \sum_{i=1}^p c_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q b_i h_{t-i} \quad (4)$$

gdzie $\varepsilon_t \sim N[0,1]$, wszystkie współczynniki są nieujemne, a o zmiennych η_t zakładamy (w przypadku ogólnym) tyle, że są niezależne i dodatnie. Warunkowa wariancja h_t jest w tym modelu liniową funkcją szumów η_t , kwadratów poprzednich obserwacji i poprzednich warunkowych wariancji. Model GARCH otrzymuje się zastępując pierwszy człon (4) stałą, a z niego z kolei uzyskujemy model ARCH usuwając ostatni człon.

Modele warunkowej heteroskedastyczności pozwalają oczywiście modelować opisywane zjawisko skupiania się danych, wynikające z heteroskedastyczności finansowych szeregów czasowych. Oprócz tego bezwarunkowe rozkłady zwrotów, opisywanych w ten sposób, mają grube ogony. Modele TARARCH i EGARCH pozwalają również na oddanie skośności danych, a model HARCH - na modelowanie ich długoterminowej zależności.

3.1. Definicja

Czym jest Value at Risk, czyli owa wartość narażona na ryzyko? Dla jednych to rewolucja w zarządzaniu ryzykiem, dla innych to tylko jedno z wielu pożytecznych narzędzi dla risk managera, a dla jeszcze innych - próba zmierzenia niemierzalnego pod przykrywką naukowej precyzji (pot.[33], str. 499).

Idea VaR jest związana z kwestią kapitału zapasowego (rezerwowego). Niepewność, co do przyszłego rozwoju cen na rynku zawsze kreuje możliwość negatywnego rozwoju sytuacji. Oznacza to, że pewien zasób kapitału powinien zostać odłożony w celu pokrycia ewentualne straty. VaR pozwala określić wielkość tego kapitału.

Zacznijmy może od mniej formalnego opisu. VaR stanowi limit rozmiaru strat w zadanym przedziale czasowym (bardzo często ten przedział wynosi 1 dzień). Limit ten może zostać przekroczony z zadanym z góry prawdopodobieństwem $(1-p)$, przy czym z reguły $p = 0.99$ lub 0.95 . Jak widać, VaR nie jest wartością absolutną dla danej pozycji, parametrami są: przedział czasowy t (czyli horyzont) i poziom prawdopodobieństwa (ufności) p . VaR można liczyć zarówno dla całego portfela, jak i poszczególnych pozycji, jednak z reguły VaR dla całego portfela jest mniejszy od sumy VaR dla poszczególnych pozycji⁶.

Zajmijmy się teraz formalną definicją VaR, podaną tutaj za [51]. Rozważmy otwartą pozycję ryzyka finansowego (np. aktyw) w świecie z dyskretnym czasem t . Jego cenę rynkową w momencie t oznaczmy jako V_t . Sposób tworzenia tej ceny przez rynek może być opisany za pomocą **funkcji wyceniającej** $v: R^k \rightarrow R$ odwzorowującej k -elementowy wektor $P_t = [P_{t1}, P_{t2}, \dots, P_{tk}]^T$ wartości specyficznych dla danej pozycji **czynników ryzyka** w wartości rzeczywiste, czyli $V_t = v(P_t)$. Czynniki ryzyka mogą być przykładowo stopy procentowe, indeksy giełdowe, ceny towarów itd. Oznaczmy k -elementowy wektor log-zwrotów z czynników ryzyka w momencie t jako $X_t = [\ln \frac{P_{t+1,1}}{P_{t,1}}, \dots, \ln \frac{P_{t+1,k}}{P_{t,k}}]^T$. Jednookresową funkcję straty definiujemy jako

$$L(P_t, X_t) = v(P_t) - v(P_{t+1}) = v(P_t) - v(P_t * \exp(X_t)) \quad (5)$$

Zatem dodatnie wartości L oznaczają straty, ujemne zaś – zyski. Dystrybuenta funkcji L określana jest jako **P&L dystrybuanta**⁷.

Mamy zatem określoną, warunkową względem informacji (albo σ -algebry) generowanej przez czynniki ryzyka do momentu t , P&L dystrybuantę. Możemy teraz przystąpić do formalnego zdefiniowania Value at Risk.

⁶ O ile spełnione są określone warunki - np. w przypadku rozkładu normalnego i metody wariancji-kowariancji, niezerowa korelacja między zwrotami z pozycji.

⁷ Z ang. *Profit & Loss*

DEFINICJA

$VaR_t(p)$ jest to p-kwantyl, warunkowej względem informacji generowanej przez czynniki ryzyka do momentu t , P&L dystrybuanty.

Alternatywnie można ująć $VaR_t(p)$ następująco: jest to wartość odwrotnej dystrybuanty funkcji strat w punkcie p , co można zapisać jako

$$VaR_t(p) = F_t^{\leftarrow}(p), \quad (6)$$

gdzie F_t^{\leftarrow} oznacza odwrotną P&L dystrybuantę w momencie t .

3.2. Zastosowania

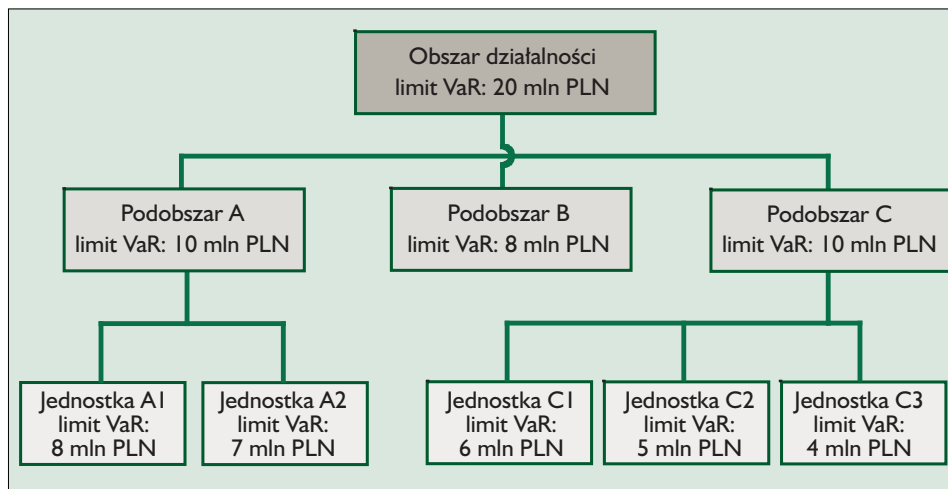
Value at Risk jako bodaj najlepsza obecnie miara ryzyka rynkowego, może odgrywać niebagatelną rolę w funkcjonowaniu instytucji finansowych. Przyjrzyjmy się zatem trzem możliwym zastosowaniom opisywanej metodologii.

1. **Wyrażanie limitów pozycji rynkowych.** Tradycyjne metody określania limitów pozycji ograniczały się do pewnej nominalnej wielkości. Zawierały one pośrednio pewną miarę ryzyka, np. w przypadku obligacji mogło to być określenie okresu trwania (ang. *duration*) portfela. VaR umożliwia porównywanie ryzyk ponoszonych w różnych klasach aktywów, np. akcjach i obligacjach, opcjach na kursy walut i swapach procentowych. Pomaga to alokować ryzyko do dziedzin, będących wiodącą kompetencją firmy. Dzięki uwzględnianiu efektu dywersyfikacji portfela, VaR prowadzi do tworzenia hierarchicznych struktur, w których limity na wyższym poziomie są niższe niż suma limitów jednostek podporządkowanych (pot. rys. 2).
2. **Ocena działania.** Pierwotnie ocena wyników osiągniętych przez instytucje finansowe (np. fundusze inwestycyjne) lub pojedynczych dilerów opierała się na osiągniętych zwrotach z portfela. Już od dawna integralnym elementem takiej oceny stał się pomiar współczynnika zmienności⁸ osiągniętych zwrotów⁹. Ogniwem, którego brakowało przy ocenie działania, była jednolita i porównywalna miara ryzyka podejmowanego przy inwestowaniu. Jak można się domyślać, miarą tą jest właśnie VaR, a dokładniej RAPM (*Risk Adjusted Performance Measures*), czyli stosunek zrealizowanych zwrotów do VaR jako miary kapitału ekonomicznego niezbędnego do zabezpieczenia inwestycji.
3. **Wymagania kapitałowe i sprawozdawczość wobec organów nadzoru.** Wspomniane powyżej, a opisane dokładniej w rozdziale 5 przepisy organów nadzorujących działalność banków i innych instytucji finansowych nie tylko wprowadzają możliwość oceny ryzyka rynkowego za pomocą VaR, lecz wskazują na tą metodę jako docelową miarę ekspozycji instytucji finansowych na czynniki ryzyka rynkowego.

⁸ Czyli stosunku odchylenia standardowego do średniej.

⁹ Zwany współczynnikiem Sharpe'a.

Rys. 2. Hierarchiczna struktura VaR



3.3. Wady i zalety. VaR jako spójna miara ryzyka

Na biurku dealera VaR jest tylko jedną z wielu miar i wskaźników dostępnych i wykorzystywanych w ciągłym procesie kalkulacji ryzyka i możliwego do osiągnięcia zysku. Prawdziwa wartość VaR ujawnia się na wyższym poziomie zarządzania portfelem inwestycyjnym. Na tę szczególną wartość VaR składają się przede wszystkim 3 cechy tej metody:

- możliwość porównywania ryzyka między różnymi klasami aktywów finansowych i różnymi portfelami
- łatwa interpretacja
- prosta forma (pojedyncza liczba)

VaR pozwala osobom zajmującym się operacjami rynkowymi na udzielenie jasnej odpowiedzi na pytania zarządu typu: Ile możemy stracić w ciągu najbliższych n dni? Jak duże jest ryzyko związane z naszym portfelem?, które są istotne z punktu widzenia najwyższego kierownictwa. Jednocześnie podstawowa idea VaR (oraz jego interpretacja) jest zrozumiała nawet dla osób nie mających większego pojęcia o statystyce i modelowaniu ekonometrycznym.

VaR nie jest niestety miarą idealną. Pierwsza, trywialna wątpliwość wiąże się z tym, co z jednej strony jest zaletą VaR, mianowicie prostotą. Powstaje pytanie, na ile jedna liczba może oddać ryzyko rynkowe portfela? Jest oczywiste, że opisywanie ryzyka portfela tak prostym miernikiem prowadzi do utraty informacji. Znajomość całej dystrybuanty strat niewątpliwie pozwala na lepszą ocenę ryzyka pozycji, jednak za cenę prostoty. Dzięki znajomości całej P&L dystrybuanty możemy np. rozwiązać równanie w drugą stronę - tzn. określić, jakie istnieje zagrożenie bankructwem, przy danym kapitale zapasowym.

Drugi, nietrywialny zarzut, wiąże się z istnieniem lepszych, pojedynczych miary ryzyka. Przykładowo, może to być oczekiwana wartość (lub mediana itp.) strat większych od VaR w danym przedziale czasowym - metoda, którą można roboczo określić jako warunkową

wartość oczekiwaną strat. Teoretyczną podstawę dla takich wątpliwości może stanowić pojęcie **spójnej miary ryzyka**, wprowadzone przez Artznera *et al.* [3].

Autorzy wspomnianej pracy formułują 4 właściwości, definiujące spójną miarę ryzyka $\rho: G \rightarrow R$, gdzie G oznacza przestrzeń ryzyk (portfeli, otwartych pozycji finansowych) w chwili t , których wartość w momencie $t+1$ zależy od określonych stanów natury $\omega_t \in \Omega$. Aby ρ było spójną miarą ryzyka, potrzeba i wystarcza, aby spełniało poniższe warunki:

1. **Subaddytywność.** Dla każdej pary $X_1, X_2 \in G$: $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$. Jest to naturalne żądanie, odzwierciedlające efekt dywersyfikacji.
2. **Monotoniczność.** Dla $\forall X, Y \in G$, $X \leq Y$: $\rho(Y) \leq \rho(X)$. Oznacza to, że jeśli pozycja Y jest zawsze warta więcej niż portfel X , to Y nie może być uważana za bardziej ryzykowną inwestycję od X .
3. **Dodatnia homogeniczność.** Dla $\forall \lambda \geq 0 \forall X \in G$: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$. Oznacza to sytuację, kiedy nie występują efekty skali. Ta właściwość jest prawdziwa przy założeniu, że wielkość pozycji nie wpływa na ryzyko (np. poprzez spadek płynności - por. rozdział 4.4)
4. **Niezmienniczość.** Dla $\forall a \in R \forall X \in G$: $\rho(X + ar) = \rho(X) - a$, gdzie r jest przyszłą wartością inwestycji 1 jednostki w pozbawiony ryzyka instrument odniesienia - można zatem traktować $100(r-1)$ jako stopę procentową bez ryzyka.

VaR spełnia 3 ostatnie właściwości, nie jest jednak, w ogólnym przypadku, miarą subaddytywną. Uzasadnijmy to następującymi przykładami.

Przykład 1 Rozważmy dwie opcje binarne na akcje S o okresie do wygaśnięcia T , równym okresowi posiadania. Niech opcja A, o wartości początkowej l , ma funkcję wypłaty $f_A = 1000 \cdot I(S_T < L)$, a opcja B, o wartości początkowej u - $f_B = 1000 \cdot I(S_T > U)$, gdzie $L < U$, a I jest funkcja wskaźnikowa. Dobierzmy L i U , tak, by $P\{S_T < L\} = P\{S_T > U\} = 0.008$. Wówczas $VaR(0.99)$ dla portfela składającego się z 1 wystawionej opcji A lub B wynosi odpowiednio $-l$ lub $-u$, a dla portfela A+B $VaR(0.99) = 1000 - u - l$. A zatem: $VaR(A+B; 0.99) > VaR(A; 0.99) + VaR(B; 0.99)$.

Przykład 2 Jako prostszy przykład weźmy dwa *i.i.d.* czynniki ryzyka X_1, X_2 o gęstościach: 0.9 na przedziale $[0,1]$ i 0.1 na przedziale $[0,2]$. Mamy: $VaR(X_1; 0.9) = VaR(X_2; 0.9) = 0$, ale $VaR(X_1 + X_2; 0.9) > 0$.

Przykład 3 Przyjrzyjmy się teraz sytuacji, kiedy pozbawiona ryzyka stopa procentowa wynosi 0%, stopa procentowa dla papierów komercyjnych 2%, a prawdopodobieństwo niewypłacalności pojedynczej firmy 1%. Wówczas, jeśli zainwestujemy 1 mln w obligacje pojedynczej firmy, to $VaR(0.95) = -20000$, czyli nie ma ryzyka. Dla odmiany, jeśli zainwestujemy w papiery 100 różnych firm, prawdopodobieństwo niewypłacalności przynajmniej 2 firm wynosi

ok. 0.08, a zatem $VaR(0.95) = 20000$. Dywersyfikacja doprowadziła do wzrostu VaR dla portfela!

Przykład 4 Poniższy przykład pokazuje, że VaR nie zawsze prowadzi do racjonalnej alokacji kapitału. Niech 2 podmioty posiadają w momencie t tą samą, otwartą pozycję finansową X . Załóżmy, że wartość X w momencie $t+1$ jest w pełni określona przez 3 możliwe, przyszłe stany natury: ω_1, ω_2 i ω_3 , które mogą wystąpić z prawdopodobieństwami 0.94, 0.03 i 0.03 oraz $X(\omega_1) \geq 0, X(\omega_2) = X(\omega_3) = -100$. Mierząc ryzyko za pomocą $VaR(0.95)$, należałoby uznać kapitał zapasowy w wysokości 80 jednostek za niewystarczający. Ale taki kapitał byłby właściwy, gdyby podmioty dokonały wymiany, tak aby $Z(\omega_1) = Y(\omega_1) = X(\omega_1), Z(\omega_2) = Y(\omega_3) = -120, X(\omega_3) = X(\omega_2) = -80$, gdzie Y jest zmodyfikowaną, przyszłą wartością portfela I podmiotu, a Z - zmodyfikowaną, przyszłą wartością portfela II podmiotu. Nie jest to racjonalne, gdyż alokacja $(X + 80, X + 80)$ dominuje w sensie Pareto alokację $(Y + 80, Z + 80)$, o ile tylko podmioty wykazują awersję do ryzyka.

Tak więc w ogólnym przypadku, VaR nie jest spójną miarą ryzyka w rozumieniu Artznera *et al.* Twierdzenie, podające warunki, w jakich VaR jest miarą spójną, zamieszczone jest w rozdziale 4.3.

Stosując VaR zakładamy, że historia rynku pozwala na tworzenie realistycznych prognoz. Zawsze istnieje ryzyko znaczącej zmiany w zachowaniach rynku, co prowadzi w konsekwencji do zmniejszenia użyteczności narzędzi statystycznej analizy danych, w tym VaR. Skrajnymi przypadkami takiej sytuacji są momenty uwalniania kursów walut, jak chociażby w Meksyku w 1994 roku lub ostatnio w Turcji, gdy dzienne zmiany kursu sięgają kilkunastu procent, przy normalnym poziomie zmienności (dziennej) poniżej 1 procenta.

Niebezpiecznym zjawiskiem jest dostosowywanie strategii dealerskich do istniejących ograniczeń wyznaczonych poziomem wartości narażonej na stratę, czyli swoista "gra z systemem". Może to powodować wzrost prawdziwego ryzyka instytucji finansowej ponad poziom obliczonego VaR. Przykładowo, dealerzy mogą wykorzystywać niespójność VaR lub znajomość stosowanej macierzy wariancji-kowariancji (pot.[32], str.501).

Na koniec trzeba być świadomym czysto technicznych ograniczeń VaR. W szczególności, precyzja prognoz maleje, a wariancja $VaR(p)$ rośnie, w miarę zwiększania poziomu p . Poza tym istniejące wyniki badań empirycznych nie pozwalają na wskazanie jednego, najlepszego w każdej sytuacji modelu (metody kalkulacji) Value at Risk.

3.4. Ogólny podział modeli

Istnieje wiele podejść do modelowania VaR. Ponieważ mamy tu do czynienia z prognozą, a dokładniej: z prognozą wartości p -kwantyla pewnej dystrybuanty (dystrybuanty strat), obliczanie VaR wiąże się ze zbudowaniem pełnego modelu ekonometrycznego, z zastosowaniem jednej lub kilku spośród licznych metod ekonometrii szeregów finansowych.

Warto zatem uporządkować problematykę przedstawioną dokładniej w kolejnych rozdziałach. Istniejące metody kalkulowania VaR można zaliczyć do następujących klas:

1. Parametryczne.
2. Nieparametryczne.
3. Symulacyjne.
4. Analityczne.

Modele parametryczne czynią pewne założenia, co do klasy rozkładów (warunkowych lub bezwarunkowych) do jakich należą zwroty z czynników ryzyka, po czym estymacja ogranicza się do określenia nieznanymi parametrów tychże rozkładów. W modelach nieparametrycznych nie określa się *a priori* rozkładu.

W modelach symulacyjnych wykorzystuje się pewien zestaw zmian czynników ryzyka (scenariuszy). Następnie oblicza się VaR dla każdego ze scenariuszy i po uśrednieniu wyników otrzymuje estymator VaR pozycji. Generowanie scenariuszy może następować np. w drodze losowania (tzw. metoda Monte Carlo, pot. rozdz. 6.3) lub na podstawie danych historycznych (metoda historycznej symulacji, pot. rozdz. 6.1.1). W modelach analitycznych korzysta się z faktu, że przy pewnych założeniach (uproszczeniach), istnieją zamknięte formuły definiujące VaR. Dla analitycznego wyliczenia wartości zagrożonej potrzeba wówczas znajomości np. rozkładów czynników ryzyka, wielkości pozycji w portfelu, zależności między czynnikami ryzyka etc.

Warto również wyróżnić modele oparte na warunkowym i bezwarunkowym rozkładzie zwrotów. Różnice pomiędzy tymi podejściami zostaną dokładniej wyjaśnione w dalszej części pracy.

Zagadnienia związane z kalkulacją VaR

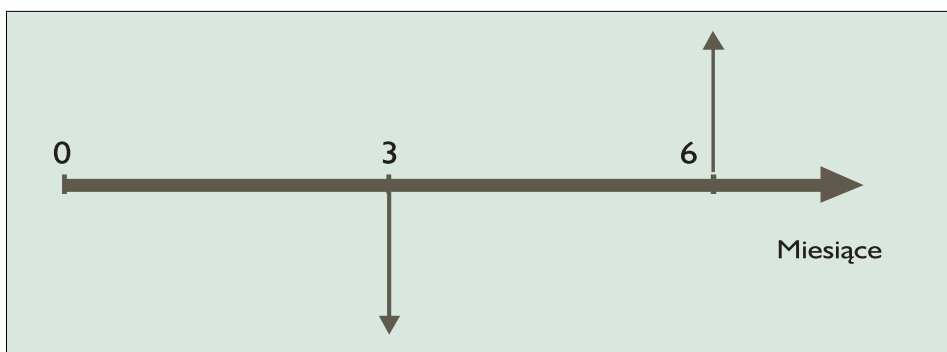
4.1. Mapowanie pozycji

Aby móc obliczyć VaR, niezależnie od stosowanej metody potrzebne są dane i to dane obejmujące jako rozsądne minimum (zależnie od metody i przyjętego poziomu ufności) od 50 do 260 dni w obrocie (co odpowiada mniej więcej jednemu rokowi kalendarzowemu). Problem polega na tym, że nie zawsze mamy dane dotyczące konkretnego instrumentu finansowego (opcji, akcji, kontraktu futures etc.). Może to wynikać zarówno z obiektywnej niemożności zdobycia takich danych, jeśli instrument znajduje się na rynku od niedawna, jak i ze względów technicznych - trudno jest monitorować wszystkie możliwe instrumenty finansowe na całym świecie tylko na wypadek ich nabycia. Warto również zauważyć, że wzrost liczby śledzonych instrumentów ma wpływ na złożoność obliczeniową zagadnienia. Przykładowo macierz wariancji-kowariancji stosowana w wielu metodach ma rozmiar proporcjonalny do kwadratu obserwowanych czynników ryzyka i dla zaledwie 100 serii wymagane jest obliczenie prawie 50000 współczynników korelacji.

Oczywiście, jeśli posiadamy wystarczające dane dotyczące konkretnej i istotnej dla nas akcji bądź obligacji, sprawa jest prosta. Jeśli natomiast, z wcześniej wspomnianych powodów, takie dane są niedostępne, bądź chcemy uniknąć nadmiernego wzrostu złożoności obliczeniowej problemu, koniecznym się staje zmapowanie (ang. *mapping*) tychże instrumentów finansowych.

Mapowanie polega na odpowiednim rozbiciu przepływów finansowych z instrumentu finansowego i przypisaniu ich następnie do monitorowanych czynników ryzyka. Tymi standardowo monitorowanymi czynnikami ryzyka mogą być np. główne indeksy giełdowe, obligacje o typowych terminach wykupu, kursy walut etc.

Rys. 3. Odwzorowanie pozycji w 3-miesięcznym futures na 3-miesięczny depozyt eurodolarowy

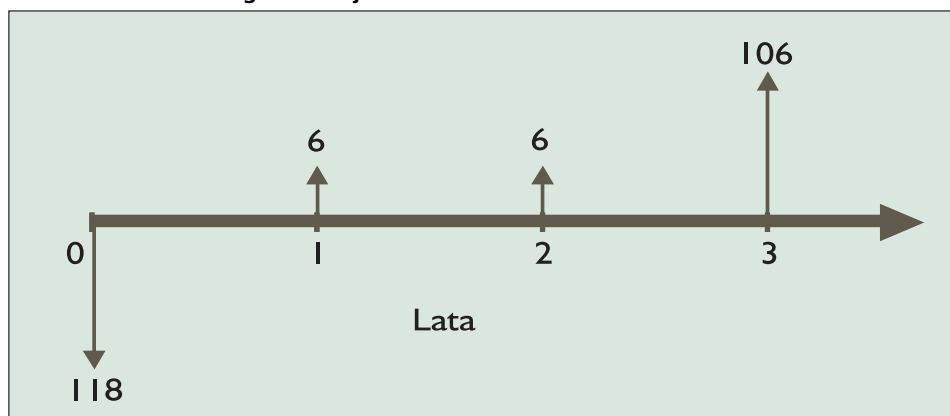


Wstępnym krokiem powinno być zidentyfikowanie przepływów pieniężnych związanych z danym instrumentem. Przykładowo, przepływy pieniężne związane z 3-letnią obligacją o

stałym oprocentowaniu, płacącą kupony rocznych odstępach i denominowaną w obcej walucie, mogą zostać odwzorowane w przepływy pieniężne związane z portfelem obligacji zerokuponowych, o standardowych terminach wykupu, oraz przepływy związane z posiadaniem pozycji w obcej walucie. Tak więc, rozważana pozycja jest związana z 4 czynnikami ryzyka. Pokazane zostało to na rys. 4, gdzie strzałki skierowane w górę oznaczają dodatnie przepływy pieniężne, a w dół - ujemne.

Analogicznie, kontrakt futures na 3 miesięczny depozyt eurodolarowy z terminem wygaśnięcia 3 miesiące może być odwzorowany jako złożenie przepływów pieniężnych związanych z krótką pozycją w 3-miesięcznym instrumencie rynku pieniężnego i długą pozycją w instrumencie 6-miesięcznym (pot. rys. 3). Najczęściej takie postępowanie konieczne jest w przypadku różnego rodzaju obligacji, swapów i kontraktów futures.

Rys. 4. Przepływy związane z obligacją o stałym oprocentowaniu denominowaną w walucie zagranicznej



Aby zmapować tak przedstawioną pozycję i uzyskać parametry potrzebne do kalkulacji VaR (np. współczynnik zmienności) dla przepływu pieniężnego o niestandardowym terminie można posłużyć się wieloma technikami. Najprostszą spośród nich jest interpolacja liniowa. Powiedzmy, że interesuje nas przepływ w momencie t_i , oraz mamy dane dotyczące przepływów pieniężnych związanych z danym czynnikiem ryzyka (względnie czynnikami ryzyka) w momentach t_{i+1} i t_{i-1} . Określmy współczynnik interpolacji liniowej α następująco:

$$\alpha = \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (7)$$

Wówczas przepływ y_i można przedstawić następująco: $y_i = \alpha y_{i+1} + (1 - \alpha) y_{i-1}$. Modifikacja tej metody, zastosowana w systemie *RiskMetricsTM*, polega na dodatkowym uwzględnieniu wariancji dla okresów t_{i+1} i t_{i-1} we współczynniku interpolacji. W metodzie tej, ostateczny rozkład danego przepływu otrzymuje się rozwiązując następujące równanie:

$$\text{wariancja}(y_i) = \text{wariancja}[\alpha_v y_{i+1} + (1 - \alpha_v) y_{i-1}]$$

co jest równoważne

$$\sigma_i^2 = \alpha_v^2 \sigma_{i+1}^2 + \alpha_v (1 - \alpha_v) \sigma_{i+1} \sigma_{i-1} + (1 - \alpha_v)^2 \sigma_{i-1}^2 \quad (8)$$

gdzie σ_i jest oszacowana jako $\alpha\sigma_{i+1} + (1-\alpha)\sigma_{i-1}$, przy wykorzystaniu współczynnika interpolacji liniowej α . Przy powyższych oznaczeniach, przepływ y_i można przedstawić następująco:

$$y_i = \alpha_v y_{i+1} + (1 - \alpha_v) y_{i-1}.$$

Akcje można mapować do indeksów, bądź to do ogólnego indeksu danego rynku, bądź to indeksu branżowego, korzystając z łatwiej dostępnych współczynników beta, czyli po prostu współczynników regresji liniowej zmian cen danej akcji w stosunku do zmian indeksu. Można również uwzględnić do pewnego stopnia ryzyko specyficzne poszczególnych akcji w przypadku niezdywersyfikowanych portfeli. Bardziej szczegółowo powyższe kwestie zostały opisane w [34].

4.2. Problem horyzontu czasowego

Najczęściej omawianą w literaturze miarą jest VaR dla okresu $t = 1$ dzień. Również w tej pracy, opisywane są wyłącznie modele VaR dla okresu jednego dnia. Tym niemniej właściwy horyzont czasowy dla VaR zależy od wielu czynników: rodzaju aktywów (akcje - instrumenty rynku pieniężnego), celu (wewnętrzny - sprawozdawczy), pozycji (diler - prezes zarządu), czy też charakteru instytucji (fundusz emerytalny - fundusz inwestycyjny wysokiego ryzyka, dom maklerski). Przy założeniu procesu ceny jako geometrycznego ruchu Browna, można uzyskać VaR_n przeskalowując VaR_1 przez czynnik \sqrt{n} . Przykładowo Komitet Bazylejski wymagając podawania w sprawozdaniach VaR dla okresu 10 dni, dopuszcza skalowanie w powyższy sposób. Można się jednak zastanawiać, na ile słuszne jest takie postępowanie.

Prawidłowość takiego podejścia zależy zarówno od zakresu agregacji, jak i charakteru procesu generującego dane. Z symulacji przeprowadzonych przez Geyera i Pichlera [25] wynika, że przy $t = 10$ najbardziej odporną metodą jest korzystanie z nakładających się (ruchomych) zwrotów 10-dniowych¹⁰. N -dniowy ruchomy log-zwrot dla okresu T dni można zdefiniować jako: $r_i^n = \ln P_i - \ln P_{i-n}$, $t = 1, \dots, T - n$, $i = n + 1, n + 2, \dots, T$. Jako procesy generujące dane (obok klasycznego białego szumu) przyjęto AR(1), GARCH(1,1) i AR-GARCH(1,1). Klasyczne skalowanie wydaje się być szczególnie wrażliwe na występowanie autokorelacji w zwrotach.

Z kolei wyniki uzyskane przez Drost i Nijman [15], przytoczone w [11], pokazują, że agregowane, nie nakładające się zwroty, generowane przez proces GARCH(1,1), również mogą być opisane za pomocą procesu GARCH(1,1) i podają wzory na obliczenie parametrów nowego procesu, pod warunkiem, że suma współczynników w (4) była mniejsza od 1 (bez stałej). Wówczas proces jest słabo stacjonarny i dla $n \rightarrow \infty$, gdzie n oznacza zakres agregacji, wariancja procesu wariancji jest stała i skończona. Zgodnie z przykładem zamieszczonym w [11], bazującym na dość typowym dla danych finansowych modelu GARCH, można praktycznie uznać, że dla $n = 90$ wariancja opisywana procesem jest niemal stała. Agregacja

¹⁰ 10-dniowych tj. obejmujących 10 dni roboczych.

przez skalowanie czynnikiem \sqrt{n} dała średnio ten sam wynik, ale zmienność wariancji jest przeniesiona (i wzmocniona) z modelu pierwotnego dla $n=1$. Warto zauważyć, że przy kalkulacji danych miesięcznych wygładzanych wykładniczo, jak ma to miejsce w systemie *RiskMetricsTM*, dla danych miesięcznych przyjmuje się wyższy współczynnik wygładzający (uwzględnia więcej danych), co oznacza większe wygładzenie zmian wariancji w czasie. Co godne podkreślenia, takie, zgodne z powyższymi rozważaniami, rozwiązanie zostało uzyskane zgoła odmiennymi metodami, opisanymi w rozdziale 8.

Christoffersen i in. [11] stwierdzają również, że po przekroczeniu pewnego progu agregacji, zmienność cen staje się nieprzewidywalna (losowa). Oznacza to, że stosowanie modeli zmienności (typu GARCH) w porównaniu ze zwykłą zmiennością historyczną nie daje żadnej przewagi. Daje to jeszcze jeden powód do odmiennego podejścia w modelowaniu ryzyka w dłuższym okresie czasu.

Do takiego wniosku doprowadziło zastosowanie dwóch metod. Obie oparte są na prostej koncepcji. Załóżmy, że zmienność pozostaje stała. Wówczas najlepszą prognozą dla procesu ceny będzie pewien stały przedział $[L;U]$, oparty na obserwowanej zmienności historycznej. Weźmy zatem taką naiwną prognozę zmienności i obserwujmy momenty naruszeń takiego przedziału. Wprowadźmy funkcję wskaźnikową zdefiniowaną następująco:

$$I_t(p) = \begin{cases} 0 & p \in [L;U] \\ 1 & p \notin [L;U] \end{cases}, \quad (9)$$

gdzie p oznacza cenę. Istnienie prognozowalnej dynamiki zmienności pociąga za sobą występowanie statystycznej zależności występowania zer i jedynek: okresy niskiej zmienności będą się charakteryzować brakiem naruszeń, a wysoka zmienność oznaczać będzie występowanie serii jedynek.

Do badania zależności w występowaniu zer i jedynek zastosowano dwie metody. Po pierwsze, dobrze znany test serii. Po drugie, aby sprawdzić, czy występowanie zer i jedynek jest procesem Markowa, na podstawie próby oszacowano prawdopodobieństwa przejścia p_{11} , p_{01} i obliczono statystykę $S = p_{11} - p_{01}$. Przy założeniu niezależności jedynek, $S = 0$. Im większe S , tym silniejsza pozytywna korelacja.

Badanie zostało dokonane na danych dotyczących indeksu Dow Jones, tym niemniej w innej pracy, Christoffersen i Diebold [10], w podobny sposób przeegzaminowali o wiele liczniejszy zbiór aktywów. Wyniki są jednoznaczne. Praktycznie można przyjąć, że przy poziomie istotności 5% nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zależności występowania jedynek dla poziomu agregacji $n \leq 10$ dni roboczych. Jednak powyżej 10 dni, zmienność przestawała być prognozowalna i jedynki pojawiały się niezależnie. Co prawda, faktem jest, że stosowane testy, przy wysokich poziomach p mają niską moc, tym niemniej pełna zgodność wyników dla różnych rynków i aktywów jest w dużej mierze przekonująca.

Pierwotnie, VaR znalazł zastosowanie w instytucjach aktywnie zaangażowanych w operacjach rynkowych, dla których, co zrozumiale, horyzont czasowy mieścił się z reguły

w przedziale 1 dzień - 1 miesiąc. O krótkoterminowym podejściu do VaR świadczy chociażby pomijanie w wielu wypadkach (np. *RiskMetrics*TM) dryfu, czyli wartości oczekiwanej zmiany ceny. Istotnie, dla krótkich przedziałów czasowych takie założenie nie powoduje istotnego obciążenia prognoz.

Jeśli rozpatruje się VaR dla krótkiego okresu¹¹, głównym miernikiem ryzyka jest zmienność cen. Kiedy jednak przechodzimy do długiego okresu istotnym, a być może istotniejszym staje się ryzyko wystąpienia długoterminowego trendu spadkowego. O ile krótkoterminowy VaR dobrze oddaje typową dla rynku zmienność kursów, a dzięki bardziej zaawansowanym podejściom możliwe jest coraz lepsze oddawanie gwałtownych, krótkotrwałych ruchów rynkowych (katastrof), o tyle całkowicie zaniedbuje on możliwość wystąpienia długoterminowego trendu spadkowego. Zilustruję to przykładem, podanym za [30]. W okresie od 1980 do 1988 roku średnia roczna zmienność kursu dolara do koszyka innych walut światowych (przeskalowana ze zmienności miesięcznej za pomocą czynnika $\sqrt{12} = 3.4641$) wyniosła 10.44%. Tym niemniej, od 1980 do 1985 dolar stopniowo zyskał 77,1% względem pozostałych walut. Dla inwestora w roku 1980 wierzącego, że ceny zmieniają się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, przy danej wówczas rocznej zmienności 7.16%, prawdopodobieństwo takiego rozwoju wypadków wynosiło $\frac{2}{10000}$ - ale to się zdarzyło. Co więcej, od 1985 do 1988 dolar stracił 40,9%. I znowu: prawdopodobieństwo takiego rozwoju sytuacji, przy założeniu procesu ceny podążającego geometrycznym ruchem Browna i danej rocznej zmienności za 1984 rok wynoszącej 11,18% wynosiło $\frac{35}{10000}$ - ale to się zdarzyło...

Podjęto próby stworzenia spójnej metodologii oceny długoterminowego ryzyka rynkowego, związanej z koncepcją VaR¹². Aczkolwiek do mówienia o jednolitości podejść jest nadal daleko, to można jednak pokusić się o sformułowanie kilka wskazówek. Naturalną receptą jest branie pod uwagę i prognozowanie możliwych trendów (współczynnika dryfu) cen. Problem, jak to często bywa, polega na selekcji najlepszych narzędzi do tego celu. Jedną z modniejszych koncepcji jest wykorzystywanie informacji zawartej w cenach opcji, która pozwala na stworzenie obrazu oczekiwań rynkowych, co do przyszłych zmian cen. Należy również kalkulować zmienności posługując się odpowiednią, dla danego horyzontu czasowego, długością okna, a nie przeskalowywać zmienności dla znacząco dłuższych bądź krótszych horyzontów czasowych. Zbędne jest przy obliczaniu wariancji stosowanie modeli zmienności (np. GARCH, zmienności stochastycznej etc.), bądź też wygładzania wykładniczego. Należy w końcu uwzględnić odmienne charakterystyki różnych instrumentów (waluty, akcje, papiery dłużne) w zależności od danego horyzontu inwestycyjnego.

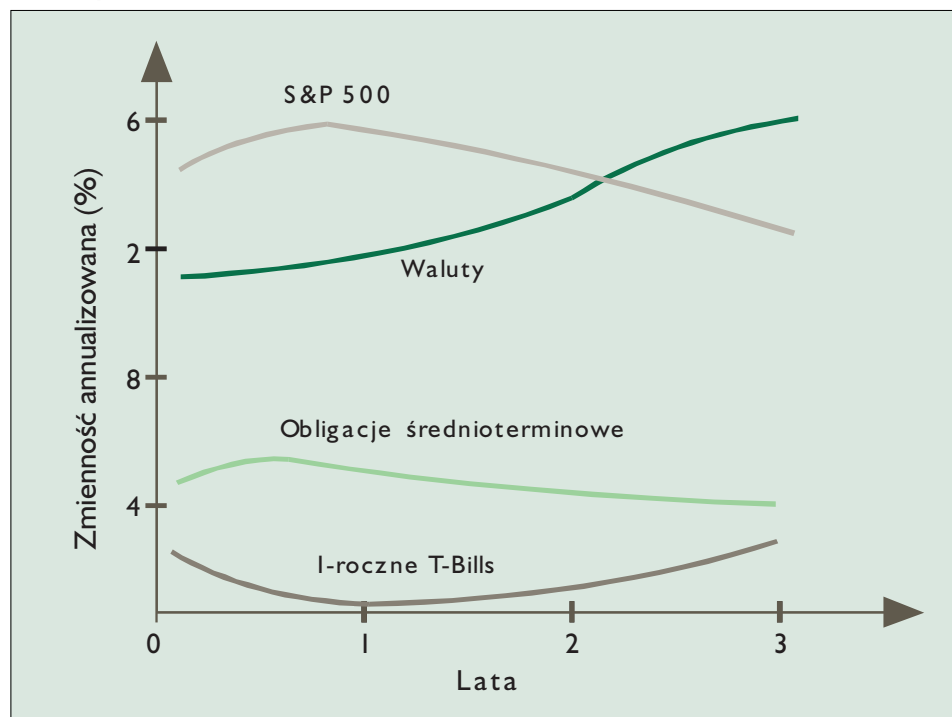
Poszczególne czynniki ryzyka charakteryzują się odmiennymi poziomami zmienności. Według malejącej zmienności można uporządkować: akcje, waluty, długoterminowe obligacje i krótkoterminowe instrumenty rynku pieniężnego. Jak już wcześniej wspomniano, w geometrycznym ruchu Browna zmienności liczone dla dowolnej długości okna powinny mieć po odpowiednim unormowaniu pierwiastkiem czasu, tą samą wartość dla danego horyzontu

¹¹ W tym kontekście za krótki okres można uznać w przybliżeniu mniej niż 3-6 miesięcy.

¹² Przykładem może być system LongRun stworzony przez RiskMetrics.

czasowego. Okazuje się jednak, że zmienności liczone dla różnych długości okien, po sprawdzeniu do podstawy rocznej, nie są stałe (przykład w oparciu o dane roczne - pot. [30]). Co więcej, zmienności te zachowują się odmiennie w zależności od aktywów. Poglądowo zostało to przedstawione na rys. 5. Jak widać dla inwestora o odpowiednio długim horyzoncie czasowym waluty stają się bardziej ryzykowne od akcji. Zgadza się to z wynikami analizy R/S przedstawionymi w [53]. Wynika z nich, że w przypadku walut, proces ceny ma nieskończoną pamięć, a zatem mogą występować trendy o teoretycznie nieskończonej długości (w praktyce - bardzo długie). Dla akcji jednak, pamięć procesu kończy się dla okresu ok. 4 lat i nie występują statystycznie wyróżnialne dłuższe trendy. Warto również zauważyć, że w przypadku instrumentów dłużnych, dla horyzontu równego terminowi wykupu, ryzyko wynosi dokładnie zero.

Rys. 5. Zmienności dla różnych aktywów w zależności od horyzontu czasowego pomiaru



Przykładem instytucji, dla których ważniejszy jest długoterminowy VaR są fundusze emerytalne i inwestycyjne. Zarządzający funduszami inwestycyjnymi jako miary ryzyka zwrotów używają często tzw. błędu śledzenia (ang. *tracking error*). Jest to odchylenie standardowe zwrotów z portfela względem określonego punktu odniesienia (ang. *benchmark*). Rees [49] proponuje jako lepszą miarę ryzyka zmodyfikowany zgodnie z teorią APT, Value at Risk. Okazuje się, że również aktywne zwroty, a więc mierzone względem zwrotu z obiektu odniesienia, mogą charakteryzować się dryfem, którego skala może nieraz przewyższać ryzyko związane z błędem śledzenia. Model APT wyceny aktywów finansowych można zapisać następująco:

$$R_i = r_f + \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \beta_3 R_3 + \dots + \alpha_i \quad (10)$$

gdzie r_f oznacza wolną od ryzyka stopę procentową, $\beta_i R_i$ itd. modelują systematyczną część zwrotu z aktywa związaną z systematycznymi czynnikami rynkowymi, a α_i oznacza specyficzny element zwrotu. Wymogiem modelu jest, aby poszczególne α_i były nieskorelowane. Typowymi wyróżnianymi czynnikami systematycznymi mogą być przykładowo: zwrot z rynku (jak w CAPM), wzrost (mierzony np. przez ROE), rozmiar (kapitalizacja), szybkość zmiany ceny (momentum) czy też „wartość” (współczynniki dywidend etc.). Do kalkulacji β_i stosuje się regresję opartą na danych przekrojowych i analizę czynnikową. Typowa jest sytuacja występowania długotrwałych trendów w wartościach β_i . To zaś jest powodem, dla którego aktywne zwroty mają wartość oczekiwaną różną od zera. Można dokonać prognozy trendu dla poszczególnych czynników i uwzględniając strukturę portfela włączyć dodatkowy element do kalkulacji VaR.

Wiele funduszy inwestycyjnych ustala z góry strategiczne zaangażowanie w określone instrumenty: akcje, obligacje etc. Ma to być przybliżoną miarą ryzyka dla funduszu. Zamiast tego można ustalić strategiczny VaR (np. w skali miesiąca), względnie kombinację obu podejść. Niewątpliwie takie podejście pozwoli inwestorom lepiej oceniać prawdziwy poziom ryzyka związany z inwestowaniem w danym funduszu. Wyniki takiego podejścia do formułowania strategicznych założeń inwestycyjnych przedstawione są w [26].

4.3. Współzależność czynników ryzyka

W przypadku metod parametrycznych do kalkulacji VaR dla portfela złożonego z wielu pozycji finansowych, konieczne jest uwzględnienie współzależności zwrotów między różnymi czynnikami ryzyka. Z reguły stosuje się w tym celu macierz wariancji - kowariancji lub macierz współczynników korelacji. Okazuje się jednak, że takie podejście kryje w sobie pułapki, których należy być świadomym.

Współczynnik korelacji liniowej między zmiennymi losowymi X_1 i X_2 zdefiniowany jest następująco:

$$\rho_{12} = \frac{\text{cov}(X_1 X_2)}{D(X_1) \cdot D(X_2)} \quad (11)$$

gdzie $D(X)$ oznacza odchylenie standardowe (zmiennosc) zmiennej X , a $\text{cov}(X_1 X_2)$ to kowariancja między zmiennymi X_1 i X_2 . Współczynnik korelacji jest miarą liniowej zależności zmiennych losowych i przyjmuje wartości z przedziału $[-1; 1]$. Innymi słowy, jeśli zależność między zmiennymi losowymi X i Y ma postać: $X = a + bY$, to $\rho_{XY} = 1$. Korelacja jest niezmiennicza względem ściśle monotonicznych, liniowych przekształceń zmiennych losowych. Stanowi naturalną miarą zależności dla rodziny rozkładów eliptycznych. N-wymiarowy rozkład prawdopodobieństwa należy do rodziny rozkładów eliptycznych, jeśli jego funkcję charakterystyczną można zapisać w postaci (za: [14], str. 289):

$$\phi_{\infty}(t) = \exp(it^T \mu) \cdot f(t^T \Sigma t) \quad (12)$$

gdzie f jest funkcją jednej zmiennej¹³, $\mu: n \times 1$, $\Sigma: n \times n$ i Σ (czyli macierz wariancji-kowariancji dla wielowymiarowego rozkładu normalnego) jest półdefinitywnie określona. Przykładowo, dla wielowymiarowego rozkładu normalnego $[0,1]$. Do rozkładów eliptycznych należy również wielowymiarowy rozkład t-Studenta. Cechą takich rozkładów jest tworzenie, przy rzutowaniu na płaszczyznę, elips przez linie o stałej gęstości prawdopodobieństwa.

Zgodnie z twierdzeniem podanym w [18], jeśli czynniki ryzyka X_1, \dots, X_n mają łączny rozkład eliptyczny, to VaR jest spójną miarą ryzyka (por. rozdział 3.3). Przede wszystkim spełniona jest własność subaddytywności:

$$VaR_p(X_i + X_j) \leq VaR_p(X_i) + VaR_p(X_j); i, j \in \{1, \dots, n\}; p > 0.5 \quad (13)$$

Jednocześnie wybór spośród portfeli o jednakowym oczekiwanym zwrocie, portfela o minimalnym VaR równoznaczny jest z wyborem portfela Markowitza o minimalnej wariancji. Jakże zatem pułapki kryją się za współczynnikami korelacji liniowej? Oto kilka z nich, zgodnie z [18]:

1. Jak wynika z definicji rozkładów eliptycznych, dla jednoznacznego określenia postaci rozkładu eliptycznego wystarczy znajomość rozkładów brzegowych i macierzy korelacji. Jednak poza rodziną rozkładów eliptycznych, powyższe dane wyznaczają nieskończenie wiele rozkładów.
2. Konsekwencją liniowości jest fakt, że $\rho = 0$ oznacza niezależność zmiennych jedynie w przypadku zmiennych o rozkładzie normalnym.
3. Korelacja nie jest niezmiennicza względem (nieliniowych) przekształceń zmiennych losowych.
4. Jedynie w przypadku rozkładów eliptycznych można dla danych rozkładów brzegowych uzyskać rozkład łączny o zadanym współczynniku korelacji.
5. Korelacja określona jest jedynie dla rozkładów o skończonej wariancji - czyli nie posiadających zbyt grubych ogonów.

Miarą, która do pewnego stopnia łagodzi powyższe niedociągnięcia są współczynniki korelacji rang (np. Kendalla czy też Spearmana). Przykładowo ten ostatni ma postać:

$$\rho_{ij}^s = \rho[F_i(X_i), F_j(X_j)] \quad (14)$$

gdzie F_i oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X_i , a ρ oznacza zwykłą korelację liniową. Korelacja rang nie ma wad 3-5. Niestety, jeśli kalkulujemy VaR na podstawie macierzy współczynników korelacji rang, nie będziemy mogli na jego podstawie wybrać portfela optymalnego zgodnie z teorią Markowitza.

Odchodząc od prostej, skalarnej miary zależności, możemy zastosować podejście oparte na tzw. łącznikach (ang. *copulas*). Łączniki umożliwiają wyodrębnienie struktury zależności z rozkładu łącznego. Każda łączna dystrybuanta wielowymiarowej zmiennej losowej $X = [X_1, \dots, X_n]$ zgodnie z tw. Sklara, może zostać zapisana jako (pot. [18]):

$$H(X) = C(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n)), \quad (15)$$

¹³ Zwaną generatorem charakterystycznym rozkładu sferycznego.

gdzie C oznacza funkcję łącznikową. Lub alternatywnie

$$C(X_1, \dots, X_n) = H(F_1^{-1}(X_1), \dots, F_n^{-1}(X_n)), \quad (16)$$

przy czym $X \in I^n$.

C można interpretować dwojako: jako funkcję odwzorowującą n -wymiarowy jednostkowy sześcian na przedział $[0,1]$ lub jako dystrybuantę wielowymiarową o jednostajnych rozkładach brzegowych $U_{[0,1]}$. Jeśli rozkłady brzegowe F są ciągłe, C jest jednoznacznie określone. C pozostaje niezmiennicze względem ściśle rosnących przekształceń $X_i, i=1, \dots, n$. Istnieje wiele parametrycznych rodzin funkcji łącznikowych, pozwalających na oddanie nieliniowej struktury zależności pomiędzy czynnikami ryzyka o dowolnych rozkładach brzegowych. Pełne omówienie właściwości funkcji łącznikowych i zagadnień z nimi związanych wykracza oczywiście poza zakres niniejszej pracy, dlatego poniżej zaprezentowano jedynie zarys kilku głównych zagadnień. Dokładniejsze przedstawienie kwestii matematycznych i statystycznych związanych z funkcjami łącznikowymi, jak również praktyczne przykłady, można znaleźć w [37] i pozycjach tam cytowanych.

Fakt, iż łączniki pozwalają na wyodrębnienie struktury zależności z rozkładu łącznego, pozwala nam przyjąć następujący ogólny sposób postępowania (dla n obserwowanych zmiennych):

1. Wyestymować n rozkładów brzegowe (na podstawie danych z próby).
2. Dokonać estymacji macierzy współczynników korelacji rang $A_{n \times n}$.
3. Wybrać n -łącznik C_n z parametrami odpowiadającymi macierzy rang $A_{n \times n}$.
4. Wylosować wektor zmiennych o rozkładzie jednostajnym (u_1, \dots, u_n) , z rozkładem łącznym danym przez C_n .
5. Zastosować transformację $x_i = F_i^{-1}(u_i)$.

Jako rezultat otrzymujemy wektor zmiennych losowych o łącznym rozkładzie H i rozkładach brzegowych F_i . Przykładem funkcji łącznikowej jest gaussowski (albo normalny) n -łącznik:

$$C_n^p(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\Sigma}^n(\Phi^{-1}(x_1), \dots, \Phi^{-1}(x_n)), \quad (17)$$

gdzie Φ_{Σ}^n oznacza n -wymiarowy rozkład normalny z macierzą wariancji-kowariancji Σ (i odpowiadającą jej macierzą współczynników korelacji liniowej ρ), a Φ^{-1} jest odwrotną dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Należy jeszcze raz podkreślić, że korzystając z łącznika gaussowskiego (np. przy symulacjach Monte Carlo) nie musimy ograniczać się do zmiennych o rozkładzie normalnym, lub zbliżonym do normalnego - rozkład normalny służy nam tutaj tylko do opisu pewnej struktury zależności między zmiennymi o dowolnych rozkładach brzegowych. Dla otrzymanych w efekcie zmiennych o rozkładzie $U_{[0,1]}$ możemy bowiem zastosować odpowiednie odwrotne dystrybuanty i przejść z powrotem do żądanych rozkładów brzegowych.

W analogiczny sposób definiuje się t-łącznik

$$C_n^{v,\rho}(x_1, \dots, x_n) = T_{\Sigma}^n(t_v^{-1}(x_1), \dots, t_v^{-1}(x_n)) \quad (18)$$

gdzie $T_n^{v,\rho}(\cdot)$ oznacza wielowymiarowy rozkład t z v stopniami swobody i macierzą współczynników korelacji liniowej ρ , a t_v - jednowymiarowy rozkład t-Studenta z v stopniami swobody.

Ważną klasę funkcji łącznikowych stanowią funkcje należące do tzw. rodziny łączników Archimedesów. Oznaczmy przez $f^{[-1]}(t)$ pseudoodwrotność funkcji f , czyli

$$f^{[-1]}(t) = \begin{cases} f^{[-1]}(t) & 0 \leq t \leq f(0) \\ 0 & f(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (19)$$

Wówczas łącznik Archimedesów dla przypadku 2 zmiennych możemy przedstawić w postaci:

$$C_2(x_1, x_2) = f^{[-1]}[f(x_1) + f(x_2)] \quad (20)$$

przy czym $f: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ i $f(1) = 0$. Funkcja f zwana jest generatorem łącznika. Warunkiem koniecznym jest, aby f była ciągła, ściśle malejąca i wypukła. Przykładami są: $f(t) = (-\ln t)^\theta$, $\theta > 1$ (łącznik Gumbela), $f(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta \in [-1, \infty] \setminus \{0\}$ (łącznik Claytona) czy też $f(t) = -\ln(e^{-\theta t} - 1) + \ln(e^\theta - 1)$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (łącznik Franka).

W [37] podane są zależności pomiędzy parametrami f a współczynnikami korelacji Kendalla i Spearmana dla różnych rodzin łączników, co pozwala sparametryzować rozkład łączny na podstawie danych z próby. Przykładowo dla łącznika Gumbela mamy:

$$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta} \quad (21)$$

Oczywiście, użyteczność łączników byłaby bardzo ograniczona, gdyby umożliwiały one jedynie modelowanie zależności 2 zmiennych. Wcześniej już zaprezentowałem wielowymiarowy łącznik gaussowski. Niestety, rozszerzenie z przypadku 2-wymiarowego do n -wymiarowego nie zawsze jest kwestią trywialną. Stosunkowo łatwo można to uczynić dla potencjalnie ważnej z praktycznego punktu widzenia rodziny łączników Archimedesów. Proste rozszerzenie otrzymujemy biorąc

$$C_n(x) = f^{[-1]} \cdot [f(x_1) + \dots + f(x_n)] \quad (22)$$

W ogólnym przypadku C^n nie będzie łącznikiem, warunkiem koniecznym jest monotoniczność f^{-1} (pot. [37], str. 39). Jednak taki wielowymiarowy łącznik ma wszystkie rozkłady brzegowe identyczne i tym samym jest stosunkowo mało elastyczny. Przy dodatkowych założeniach można jednak uzyskać bardziej elastyczną strukturę, ze współzależnościami wyrażonymi przy pomocy różnych łączników. Przykładowo, dla przypadku 3-wymiarowego mamy

$$C_3 = f_1^{-1}(f_1 \circ f_2^{-1}(f_2(x_1) + f_2(x_2)) + f_1(x_3)) \quad (23)$$

Wzory dla wyższych n są bardziej skomplikowane, ale z teoretycznego punktu widzenia dalsze rozszerzenia nie stanowią problemu. Z praktycznego punktu widzenia istotniejsza jest możliwość generowania liczb pseudolosowych dla danego łącznika. Poniżej opisany jest przykład algorytmu dla wielowymiarowego łącznika Archimedesesa, a następnie ogólny sposób postępowania.

Założmy, że chcemy uzyskać zmienną wylosowaną z wielowymiarowego łącznika Archimedesesa $C_n(x_1, \dots, x_n; f_1, \dots, f_n)$. Oznaczmy przez K_C rozkład $C_2^f(X, Y)$, przy czym $X, Y \sim U_{[0,1]}$. K_C powiązane jest z generatorem łącznika następującą zależnością:

$$K_C(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t^*)} \quad (24)$$

Wówczas algorytm losowania przedstawia się następująco:

1. Wylosować liczbę q z $U_{[0,1]}$.
2. $t_1 = K_1^{-1}(q)$.
3. Wygenerować liczbę losową s z $U_{[0,1]}$, niezależną od q .
4. $a_1 = f_1^{-1}(s_1 \cdot f_1(t_1))$, $x_n = f_1^{-1}((1-s_1) \cdot f_1(t_1))$.
5. Powtórzyć kroki od drugiego do czwartego $n-2$ razy, przyjmując zamiast q a_{i-1} i losując s niezależnie od q i s_1, \dots, s_{i-1} .
6. $t_{n-1} = K_{n-1}^{-1}(a_{n-2})$.
7. Wylosować liczbę s z $U_{[0,1]}$, niezależną od q, s_1, \dots, s_{i-1} .
8. $x_1 = f_{n-1}^{-1}(s_{n-1} \cdot f_{n-1}(t_{n-1}))$, $x_2 = f_{n-1}^{-1}((1-s_{n-1}) \cdot f_{n-1}(t_{n-1}))$.

Otrzymana zmienna (x_1, \dots, x_n) została wylosowana z zadanego wielowymiarowego łącznika Archimedesesa. Dowód tego znajduje się w [37], str. 42-43. Ogólny algorytm generowania losowych wartości z danej funkcji łącznikowej $C(X_1, \dots, X_n)$ przedstawia się następująco (por. [37], str. 10):

1. Wygeneruj liczbę losową x_1 z $U_{[0,1]}$.
2. Wylosuj liczbę x_2 z $C_2(x_2 | x_1)$.
3. Wygeneruj liczbę pseudolosową x_n z $C_n(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})$.

Losowanie liczb z $C_k(x_k | x_1, \dots, x_{k-1})$ w przypadku ogólnym oznacza konieczność wylosowania liczby q z $U_{[0,1]}$, a następnie rozwiązania (numerycznie lub analitycznie) równania $x_k = C_k^{-1}(q | x_1, \dots, x_{k-1})$.

Ciekawą właściwością związaną z łącznikami jest pojęcie współzależności wartości skrajnych¹⁴. Dokładniej, jeśli funkcja łącznikowa 2 zmiennych C spełnia

¹⁴ Ang. *tail dependence*.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} C(x, x)/(1-x) = \lambda > 0$ to wykazuje ona właściwość współzależności wartości skrajnych. Jeśli $\lambda = 0$ to nie ma ona tej właściwości. Spośród wcześniej wspomnianych łączników, własność tę posiada t-łącznik, ale nie ma jej łącznik gaussowski. Z rodziny łączników Archimedelesa własnością tą charakteryzują się łączniki Gumbela i Clayтона. Współzależność wartości skrajnych pozwala, jak wskazuje nazwa, na oddanie zbieżności w występowaniu dużych wartości zmiennych losowych, co jest szczególnie istotne w przypadku VaR.

Inne zagadnienie związane z zależnością wartości skrajnych polega na określeniu łączników dla wielowymiarowych rozkładów wartości ekstremalnych (MEV) - pot. rozdz. 7.4. Łączniki spełniające warunek

$$C(x_1^t, \dots, x_n^t) = C^t(x_1, \dots, x_n), \quad t > 0 \quad (25)$$

nazywamy **łącznikami wartości ekstremalnych**. Jako przykład można podać łącznik Gumbela.

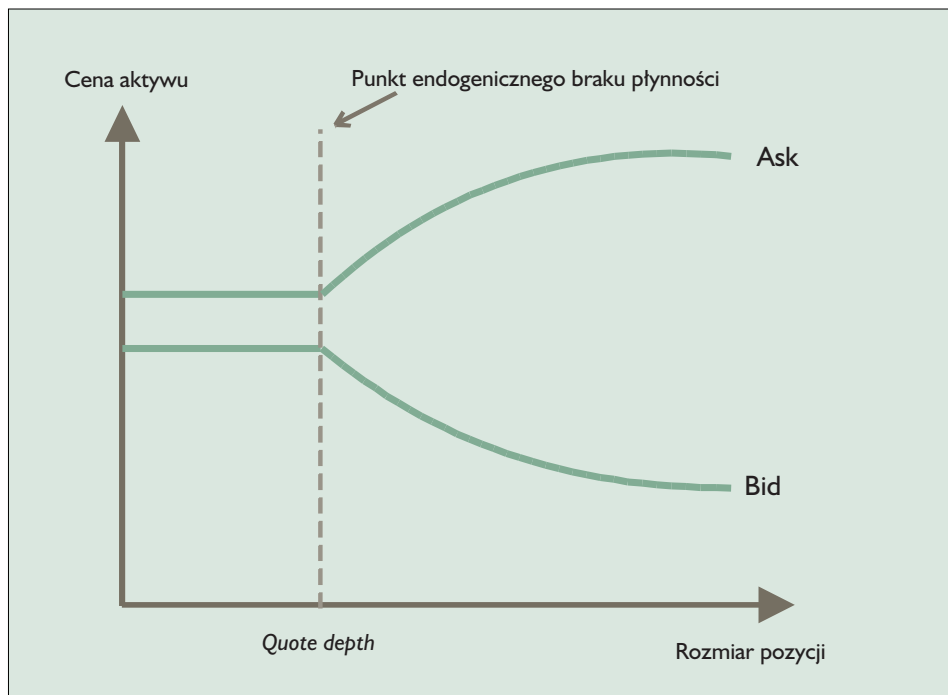
4.4. Ryzyko płynności

Uważa się, że kłopoty funduszu LTCM były w dużej mierze wynikiem niemożności upłynnienia posiadanych aktywów. Bangia *et al.* [4] wskazują z kolei, że rozpowszechnione modele VaR nie uwzględniają w odpowiedni sposób ryzyka płynności. Po pierwsze, zakłada się jako cenę przy likwidacji pozycji średnią z ceny oferowanej i żądanej, gdy tymczasem brak płynności może powodować, że cena uzyskana przy zamykaniu pozycji będzie znacząco niższa. Po drugie, ryzyko związane z niemożnością szybkiej likwidacji nie płynnych pozycji uwzględnia się co najwyżej *ad hoc* za pomocą przeskalowania jednookresowego VaR. Przykładowo Komitet Bazylejski zakłada 10-dniowy okres utrzymywania otwartej pozycji.

Autorzy wspomnianej pracy [4] dzielą ryzyko rynkowe na komponent związany z niepewnością, co do ruchów uśrednionych cen i komponent odnoszący się do niepewności dotyczącej płynności. Warto zauważyć, że w większości wypadków ryzyka te są ze sobą ściśle powiązane. Przykładowo, opcje walutowe na tzw. *emerging markets* cechują się wysokim poziomem obu ryzyk, a transakcje spot w głównych walutach - niskim. Koszty likwidacji pozycji i ich zmienność powinny stanowić element kompleksowego modelu ryzyka rynkowego.

Samo ryzyko płynności może być endo- lub egzogeniczne, tzn. wynikające z ogólnej, wspólnej dla wszystkich uczestników, charakterystyki rynku (płytki lub płynny), bądź z chwilowej nierównowagi na rynku między popytem i podażą, przy np. próbie likwidacji dużej pozycji. Ryzyko endogeniczne jest różne dla różnych uczestników rynku i związane jest z wielkością posiadanej pozycji - jeśli jest ona większa od tzw. *quote depth*, czyli płynności rynku dla ceny kwotowanej, to albo zostaniemy zmuszeni do stopniowej likwidacji pozycji (co zwiększa ryzyko zmiany ceny), albo nastąpi rozszerzenie widełek cenowych (czyli wzrosną koszty likwidacji). Pokazane zostało to na rysunku rys. 6. Ilościowy opis tego typu ryzyka jest podany w pracach cytowanych w [4]. Problem polega na tym, że nie ma w ogólnym przypadku danych niezbędnych do budowy odpowiednich modeli.

Rys. 6. Endogeniczne ryzyko płynności



Łatwiej dostępne są dane pozwalające modelować egzogeniczne ryzyko płynności - czyli obserwowane widełki cenowe (ang. *spreads*). Rozwiązanie jest proste - do kalkulacji VaR, szczególnie w przypadku mało płynnych rynków, lepiej wykorzystywać, w zależności od rozpatrywanej pozycji, odpowiednio ceny oferowane lub żądane. Jedynym warunkiem jest posiadanie danych dotyczących widełek cenowych (spreadów).

4.5. Dane niesynchroniczne

Można podejrzewać, że używane w obliczaniu VaR współczynniki korelacji (kowariancje) między aktywami finansowymi zależą w przypadku ogólnym od momentu rejestracji poziomu danego czynnika ryzyka, bądź ceny aktywu. Problem synchronizacji danych może się stać szczególnie istotnym, gdy VaR jest kalkulowany dla portfela zawierającego aktywa będące w obrocie w różnych krajach i różnych strefach czasowych. Przytoczmy tutaj za [34] przykład ilustrujący powyższy problem. W tabelicy 1 podano estymatory współczynnika korelacji liniowej pomiędzy dziennymi zmianami cen zamknięcia 10-letnich obligacji rządowych w Nowym Yorku i zmianami stawek rynku pieniężnego w Londynie, rejestrowanych o dwóch różnych godzinach. Jak widać, dane z godziny 16:00 wykazują wyższą korelację. Wynika to z faktu lepszej (choć nie pełnej) synchronizacji danych późniejszych.

Przykładowo, dane z zamknięcia giełdy tokijskiej są rejestrowane 15 godzin przed danymi z Nowego Yorku. Wydaje się zatem sensowne uwzględnienie korelacji między danymi z danego dnia z Tokio i z poprzedniego dnia z Nowego Yorku, gdyż są one oddalone jedynie o 9 godzin (są bardziej zsynchronizowane). Jedno z możliwych rozwiązań tego problemu,

opisane w [34], polega na uwzględnieniu kowariancji danego zwrotu z momentu t ze zwrotami z innych czynników ryzyka opóźnionymi o 1 okres oraz kowariancji danego zwrotu z momentu $t-1$ z nieopóźnionymi zwrotami z innych czynników. Innymi słowy poprawiona kowariancja będzie wyrażona przez:

$$cov_{pop}(r_{jt}, r_{it}) = cov(r_{jt}, r_{it-1}) + cov(r_{jt-1}, r_{it}) + cov(r_{jt}, r_{it}). \quad (26)$$

Tablica. 1. Korelacja zmian LIBOR-u i cen 10-letnich, rządowych obligacji amerykańskich

LIBOR	Korelacje o godzinie	
	11:00	16:00
1-miesięczny	-0.012	0.153
3-miesięczny	0.123	0.369
6-miesięczny	0.119	0.389
12-miesięczny	0.118	0.622

Źródło: [34], str.184.

Sensowność takiego podejścia uzasadniona jest dodatkowo małą z reguły wartością wyrażenia $cov(r_{jt}, r_{it-1}) + cov(r_{jt-1}, r_{it})$ w przypadku danych synchronicznych i wysoką w przypadku danych niesynchronicznych, zgodnie z wynikami zawartymi w [34]. Oznacza to, że taka formuła nie powoduje dużego zanieczyszczenia w przypadku danych synchronicznych, pozwalając jednocześnie lepiej uchwycić związki między zmianami na rynkach działających w odmiennych strefach czasowych (np. w Azji i USA).

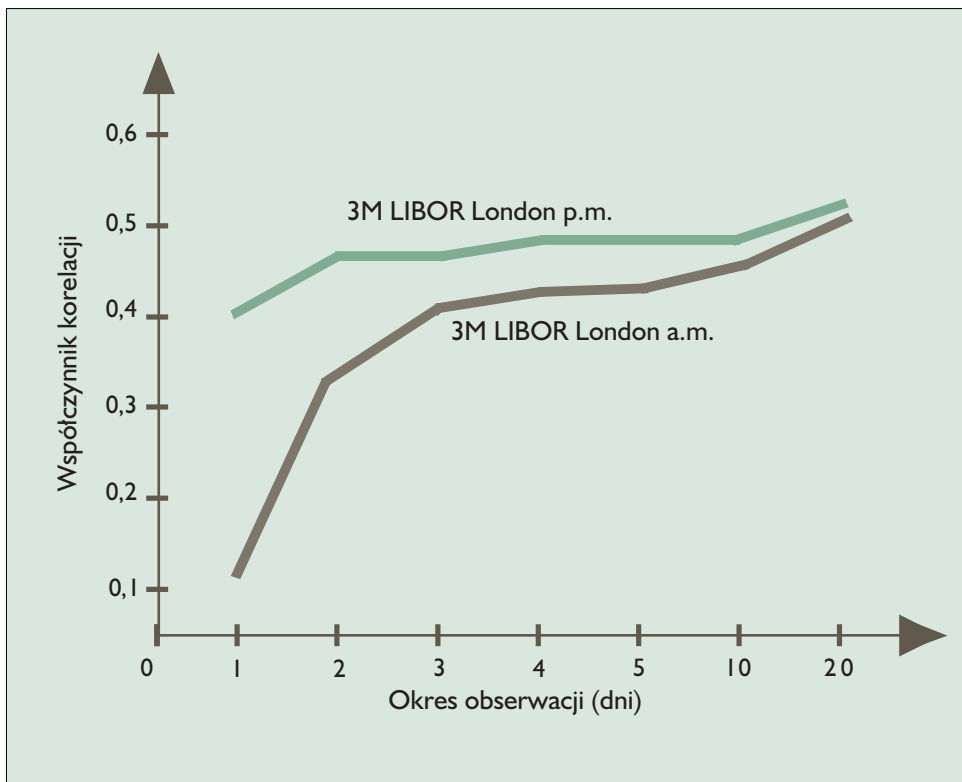
Uogólnijmy jeszcze powyższą procedurę, tak aby móc ją zastosować w ujęciu macierzowym, zapobiegając jednocześnie wystąpieniu współczynnika ρ korelacji liniowej większego od jedności. Mamy zatem pewną półdefinitnie określoną macierz wariancji-kowariancji Σ . Obliczmy macierz K , której elementy dane są przez:

$$k_{ij} = \begin{cases} cov(r_{jt}, r_{it-1}) + cov(r_{jt-1}, r_{it}) & \text{dla } i \neq j \\ 0 & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (27)$$

Wówczas dopasowana macierz wariancji-kowariancji dana jest jako $M = \Sigma + \alpha K$, gdzie $0 < \alpha < 1$ przyjmuje największą możliwą wartość, zapewniającą dodatnią półokreśloność macierzy M .

Opisany powyżej problem traci na wadze w miarę wydłużania horyzontu czasowego. Rys. 7 pokazuje korelację między zmianami 3-miesięcznego LIBOR-u a zmianami cen obligacji amerykańskich dla obserwacji z godziny 11:00 i godziny 16:00. Jak widać, dla zmian cen na przedziale dłuższym niż 10 dni, wpływ momentu rejestracji danych staje się zaniedbywalny.

Rys. 7. Korelacja LIBOR i cen 10 letnich T-Notes w zależności od momentu pomiaru



4.6. Przybliżona wycena opcji

Zależność cen opcji od wartości czynników ryzyka (czyli cen instrumentów bazowych, czasu do wygaśnięcia, zmienności i stopy procentowej pozbawionej ryzyka) nie ma charakteru liniowego. Często jednak zamiast stosować dokładne formuły wyceniające (np. Blacka-Scholesa lub jedną z modyfikacji) aproksymuje się wartość opcji za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora. Ogólnie biorąc szereg Taylora dla funkcji jednej zmiennej ma postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (28)$$

gdzie $f^{(n)}(x_0)$ oznacza wartość n-tej pochodnej funkcji f w punkcie x_0 .

W rzeczywistości przybliżenia wartości funkcji w punkcie x dokonuje się korzystając z 2 lub 3 pierwszych wyrazów tego szeregu. Zastosujmy zatem tą metodę do aproksymacji ceny opcji V_{t+n} , mając dane w momencie t : V - cenę opcji, P - cenę instrumentu bazowego i τ - czas do wygaśnięcia opcji. Oznaczmy jako δ pierwszą pochodną cząstkową formuły wyceniającej dla danej opcji względem ceny instrumentu bazowego $\frac{\partial V}{\partial P}$, jako Γ drugą pochodną cząstkową $\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}$ i jako θ pochodną cząstkową względem czasu $\frac{\partial V}{\partial t}$. Mamy wówczas:

$$V_{t+n} \approx V_t + \delta(P_{t+n} - P_t) + 1/2 \cdot \Gamma(P_{t+n} - P_t)^2 + \theta(\tau_{t+n} - \tau_t) \quad (29)$$

Ponieważ zasadniczo posługujemy się względnymi zmianami ceny, przekształćmy powyższe wyrażenie do wartości względnych:

$$V_t \left(\frac{V_{t+n} - V_t}{V_t} \right) \approx \delta P_t \left(\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} \right) + 1/2 \cdot \Gamma \cdot P_t^2 \left(\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} \right)^2 + \theta (\tau_{t+n} - \tau_t) \quad (30)$$

Podzielmy stronami i przyjmijmy dla uproszczenia $\tau_{t+n} - \tau_t = n$:

$$\left(\frac{V_t}{P_t} \right) \left(\frac{V_{t+n} - V_t}{V_t} \right) \approx \delta \left(\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} \right) + 1/2 \cdot \Gamma \cdot P_t \left(\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} \right)^2 + \left(\frac{\theta}{P_t} \right) n \quad (31)$$

Przyjmując odpowiednie oznaczenia mamy ostatecznie:

$$R_V \approx \eta \left[\delta R_P + 1/2 \cdot (\Gamma P_t) \cdot R_P^2 + \hat{\theta} n \right], \quad (32)$$

gdzie $R_V = \left(\frac{V_{t+n} - V_t}{V_t} \right)$, $R_P = \left(\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} \right)$, $\eta = \left(\frac{P_t}{V_t} \right)$, $\hat{\theta} = \left(\frac{\theta}{P_t} \right)$.

4.7. Zmienności implikowane

Ceny opcji zawierają w sobie prognozę zmienności dla instrumentu bazowego (tzw. implikowana zmienność ang. *implied volatility*). Wynika to z faktu, iż w formule Blacka-Scholesa (i innych) mamy 5 parametrów: czas do wygaśnięcia, cenę *spot* instrumentu bazowego, cenę wykonania opcji, wolną od ryzyka, krótkoterminową stopę procentową i zmienność. Jedynym nieznanym czynnikiem jest właśnie zmienność. Innymi słowy, ceny opcji zawierają oczekiwania rynkowe dotyczące przyszłej zmienności instrumentu bazowego. Te implikowane zmienności mogą zatem zostać wykorzystane przy kalkulacji VaR.

Niestety, metoda ta ma ograniczoną użyteczność. Po pierwsze, implikowane zmienności dotyczą tylko okresu do wygaśnięcia opcji, tzn. że cena opcji o 3-miesięcznym terminie wygaśnięcia pozwala prognozować jedynie 3-miesięczną zmienność cen (i zwrotów) instrumentu podstawowego. Po drugie, opcje dostępne są dla ograniczonego kręgu instrumentów (w Polsce w zasadzie tylko dla kursów walutowych), a nieraz ich cena jest mało reprezentatywna ze względu na niską płynność. Po trzecie, wyniki badań określających jakość predykcji implikowanych zmienności są niejednoznaczne i wydaje się, że historyczne zmienności albo prognozy na podstawie różnego rodzaju modeli (np. GARCH) nie muszą znacząco ustępować implikowanym zmiennościom w zakresie możliwości prognostycznych. Mimo tych zastrzeżeń, włączenie implikowanych zmienności może poprawić jakość estymacji VaR.

5

Monitorowanie ryzyka rynkowego w świetle dokumentów organów nadzoru bankowego

Jak wspomniałem we wstępie, metodologia Value at Risk znalazła również odzwierciedlenie w dokumentach nadzoru bankowego, zarówno w Europie, jak i w Stanach Zjednoczonych.

Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego w poprawce z 1996 roku do swoich standardów wymogów kapitałowych ze względu na ponoszone ryzyka rynkowe (Amendment of the Capital Accord to Incorporate Market Risk [5]), określiła szereg zasad uwzględniania przez banki ponoszonych przez nie ryzyk rynkowych. W części A poprawki zawarto standardowe podejście do kolejnych ryzyk: stopy procentowej, kursowego, cen towarów, akcji i opcji. Takie uproszczone podejście sprowadza się do określenia procentowo wielkości kapitału rezerwowego względem otwartych odpowiednio offsetowanych krótkich i długich pozycji. Dodatkowo w przypadku instrumentów związanych ze stopą procentową przyjęto różne kryteria w zależności od *time to maturity* lub *duration* (czasu trwania). W przypadku opcji przyjęto trzy możliwe podejścia: metodę uproszczoną (procentową), metodę delta plus oraz podejście scenariuszowe (ang. *scenario approach*).

Metoda delta plus zakłada wycenę wrażliwości ceny opcji względem zmian ceny instrumentu bazowego (Δ), wrażliwości cen opcji względem zmian Δ (γ) i elastyczność cen względem zmian w odchyleniu standardowym ceny instrumentu bazowego v (vega). Metoda analizy macierzy scenariuszy polega na kalkulacji wartości pozycji przy *a priori* ustalonych odchyleniach ceny instrumentu bazowego i jego zmienności względem wartości aktualnych.

W części B poprawki zawarta jest natomiast specyfikacja stosowania modeli wewnętrznych do wyceny ryzyka rynkowego, czyli właśnie metodologia VaR. Warunkiem stosowania takiego podejścia do pomiaru ekspozycji banku jest spełnienie 7 warunków dotyczących m.in. odpowiednich standardów jakościowych, specyfikacji czynników ryzyka (ang. *risk factors*), odpowiednich parametrów statystycznych, procedur zapewniających możliwość nadzoru zewnętrznego i wytycznych dotyczących testowania obciążeń krytycznych (ang. *stress testing*). Standardy jakościowe obejmują m.in. posiadanie przez bank odrębnej jednostki kontrolującej ryzyko, przeprowadzanie regularnego back-testingu, czyli weryfikowania *ex post* modelu, zaangażowanie najwyższego kierownictwa w kwestie monitoringu ryzyka, integrację modelu z codziennym procesem zarządzania ryzykiem w banku, jasne powiązanie modelu z istniejącymi limitami zaangażowania, odpowiedni system dokumentacji i w końcu wewnętrzny, regularny audyt systemu.

Specyfikacja czynników ryzyka dotyczy oddzielnie stóp procentowych, kursów walutowych, akcji i cen towarów. W odniesieniu do stóp procentowych wymogiem jest oddzielne

określenie czynników ryzyka dla oddzielnych walut. Bank musi modelować krzywą dochodowości (ang. *yield curve*), zgodnie z jedną z powszechnie uznanych metod, np. szacując ceny forward obligacji zerokuponowych. Krzywa powinna zostać podzielona na kilka segmentów, oddających różnice w zmienności stóp na poszczególnych odcinkach krzywej. Minimalnym wymogiem jest uwzględnienie 6 czynników ryzyka, z reguły jeden czynnik ryzyka przypada na każdy wydzielony segment krzywej dochodowości. System pomiaru ryzyka powinien uwzględniać ryzyko spreadów, tj. różnic w przebiegu krzywej dochodowości np. papierów rządowych i korporacyjnych.

W przypadku akcji możliwe są trzy podejścia. Pierwsze polega na monitorowaniu jedynie zmienności głównego indeksu i odnoszeniu ryzyk pozycji w pojedynczych akcjach za pomocą współczynników beta. Drugie jest podobne, ale przy wykorzystaniu indeksów branżowych. Najbardziej skrupulatne polega na wyodrębnieniu czynnika ryzyka (zmienności) dla każdego waloru. W odniesieniu do towarów bardziej szczegółowe podejścia powinny uwzględniać zmienność w stopie użyteczności poszczególnych *commodities*.

W kwestii parametrów statystycznych Komitet zaleca codzienną kalkulację VaR, z parametrem $p = 0.99$ i przedziałem czasowym $t = 10$ dni (roboczych). Możliwe jest przyjęcie za $VaR_{10}(0.99)$ skalowanego $VaR_1(p)$ zgodnie z formułą: $VaR_{10}(0.99) = \sqrt{10} VaR_1(p)$. Obserwacje powinny obejmować co najmniej 1 rok, a zestaw danych należy uaktualniać nie rzadziej, niż co 3 miesiące. Banki mogą stosować dowolnie wybrany model, np. wariancji-kowariancji, historycznej symulacji, czy też metodę Monte Carlo. W przypadku opcji model musi uwzględniać nieliniową charakterystykę cen opcji i ryzyko wynikające ze zmian w wariancji instrumentów bazowych (vega).

Scenariusze awaryjne i *stress testing* powinny być nieodłącznym elementem stosowanego przez banki modelu. *Stress testing* polega na zbadaniu zachowania się portfela i możliwości reagowania banku w przypadku wystąpienia ekstremalnych wydarzeń rynkowych. Jako przykłady takich wydarzeń podano krach giełdowy z 1987 roku, zawieszenie ESW w 1992 i 1993 roku oraz załamanie na rynku obligacji na początku 1994 roku. Przy tego typu symulacjach należy uwzględnić ograniczoną płynność rynków i wysoki poziom korelacji (bliski jedności) między różnymi rynkami oraz określić historyczny zakres poziomów zmienności i korelacji.

Institucje stosujące modele wewnętrzne obliczają wymagany poziom kapitału własnego zgodnie z następującą formułą:

$$C = \text{Max} \left\{ VaR_{t-1}, (M + m) \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i} \right\}, \quad (33)$$

gdzie M jest mnożnikiem, którego wartość ustalono na 3, a m w zależności od jakości prognoz modelu (por. rozdział 9) przyjmuje wartość z przedziału $[0,1]$. Uważa się dość powszechnie, że powyższa formuła zniechęca banki do stosowania i szukania precyzyjniejszych modeli. Celem banków (i innych instytucji) jest zminimalizowanie kapitału związanego na

zabezpieczenie operacji rynkowych (C) - czyli preferują one jak najniższy VaR. Jest prawdopodobne, że bardziej dokładne modele będą dawać prognozy $VaR(0.99)$ wyższe o dużo więcej niż 1/3 w stosunku do $VaR(0.99)$ oszacowanego, przykładowo, zwykłą metodą wariacji-kowariancji. Innymi słowy: wzrost mnożnika (i C), wynikający z braku precyzji prostego modelu nie zrekompensuje spadku VaR (a co za tym idzie, także C), wynikającego z zastosowania prostszych, acz mniej dokładnych modeli.

Zgodnie z uchwałą Nr 2/2000 Komisji Nadzoru Bankowego z dnia 8 listopada 2000 roku, która weszła w życie z dniem 31 marca 2001 roku, również polskie banki mogą posługiwać się metodą wartości zagrożonej dla określenia poziomu wymaganego kapitału rezerwowego w przypadku ryzyka walutowego. Rozwiązania techniczne, ujęte w załączniku nr 3 do wyżej wymienionej uchwały, wzorowane są na wcześniej opisanych zaleceniach Komitetu Bazylejskiego.

6

Podstawowe metody estymacji VaR

Gdyby P&L dystrybuanta była znana, wyliczenie VaR, bądź to metodami analitycznymi, bądź numerycznymi z żądaną dokładnością nie stanowiłoby problemu. Jednak w rzeczywistości zmuszeni jesteśmy estymować VaR korzystając z obserwacji zwrotów z czynników ryzyka, a często również czyniąc określone założenia, co do ich rozkładu. Okazuje się przy tym, że szacowanie skrajnych kwantyli P&L dystrybuanty nie jest prostym statystycznie zadaniem, zwłaszcza w świetle cech wykazywanych przez finansowe szeregi czasowe. Poniżej zostaną zaprezentowane pewne elementarne podejścia do kwestii estymacji.

6.1. Podejścia nieparametryczne

Przy tego typu podejściach unika się określania rodziny rozkładów do jakich należy dystrybuanta strat, co pozwala na uniknięcie ewentualnego systematycznego błędu z tym związanego.

6.1.1. Metoda historycznej symulacji

Aby uniknąć błędów specyfikacji w metodzie historycznej symulacji (HS) estymuje się $VaR(p)$ jako p-kwantyl z dystrybuanty empirycznej. Próbę losową konstruuje się, symulując wpływ historycznie obserwowanych zwrotów z czynników ryzyka (czyli np. zmian cen akcji, wysokości stóp procentowych etc.) na wartość aktualnej pozycji, stąd nazwa metody.

Oznaczmy przez $L_{1:n}, L_{2:n}, \dots, L_{n:n}$ uporządkowane (rosnąco) wartości z próby funkcji strat L . Wówczas nieparametryczny estymator $VaR(p)$ dany jest przez:

$$\widehat{VaR}_{HS}(p) := L_{j:n} \quad \text{gdzie} \quad \frac{j-1}{n} < p < \frac{j}{n} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

Niestety, przy typowych rozmiarach prób, obejmujących 1 rok, zaledwie kilka obserwacji będzie leżało w prawym ogonie dystrybuanty. Zatem \widehat{VaR}_{HS} będzie wykazywać silnie nieciągłe zachowanie dla $p = 0.95$ czy też 0.99 . Rozciągnięcie okresu obserwacji na kilka lat uważane jest natomiast za niebezpieczne, gdyż nierealistyczne może się stać założenie o stałej postaci rozkładu zwrotów. Warto również zauważyć, że taka metoda nigdy nie da VaR większego niż największa strata w danej próbie.

Dokładność otrzymanego estymatora (czyli przedziały ufności) można oszacować na dwa sposoby. Po pierwsze, dystrybuanta

$$n^{1/2} \frac{\widehat{VaR}_{HS}(p) - VaR(p)}{[f(\widehat{VaR}_{HS}(p))]^{-1} \sqrt{p(1-p)}}$$

zbiega asymptotycznie do standaryzowanego rozkładu normalnego $N[0,1]$. Zatem przy poziomie ufności $1-\alpha$, przedział ufności dla estymatora metodą historycznej symulacji dany jest przez

$$\left[\widehat{VaR}_{HS}(p) \pm z_{1-\alpha/2} \left[f(VaR(p))^{-1} \sqrt{p(1-p)/n} \right] \right], \quad (35)$$

gdzie $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ i Φ oznacza dystrybucję standaryzowanego rozkładu normalnego. Jeśli znamy f , możemy obliczyć ten przedział dla dowolnego p i odpowiednio dużego n . Ale zazwyczaj f nie jest znana. Możemy rozwiązać i ten problem stosując asymptotycznie równoważny przedział $[\hat{F}^{-1}(k/n); \hat{F}^{-1}(l/n)]$ gdzie liczby całkowite k i l są dobrane tak, aby

$$\begin{aligned} k &\approx np - z_{1-\alpha/2} \sqrt{np(1-p)} \\ l &\approx np + z_{1-\alpha/2} \sqrt{np(1-p)} \end{aligned}$$

Niestety, dla wysokich wartości p i rozmiarów próby rzędu kilkuset, takie przybliżenie jest mało skuteczne.

Aby policzyć dokładne przedziały ufności dla małej próby, spróbujmy znaleźć takie $L_{k:n}$ i $L_{l:n}$, gdzie $k < l$, żeby $P\{L_{k:n} \leq VaR(p) \leq L_{l:n}\} = 1 - \alpha$. Niech Y oznacza liczbę strat z próby mniejszych od prawdziwego VaR

$$Y = \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, VaR(p)]}(L_i) \quad (36)$$

Wówczas Y jest zmienną o rozkładzie dwumianowym z parametrami p i n . Oczywiście, zamiast $\{L_{k:n} \leq VaR(p) \leq L_{l:n}\}$ możemy napisać $\{k \leq Y \leq l-1\}$. Wówczas

$$\begin{aligned} P\{L_{k:n} \leq VaR(p) \leq L_{l:n}\} &= P\{k \leq Y \leq l-1\} = \\ &= \sum_{j=k}^{l-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1 - \alpha \end{aligned} \quad (37)$$

W przypadku ogólnym niemożliwe jest znalezienie takich l i k , żeby powyższe równanie było dokładnie spełnione. Najlepszym możliwym rozwiązaniem jest znalezienie takich liczb, aby:

1. $l - k$ jak najmniejsze
2. $\sum_{j=k}^{l-1} n p^j (1-p)^{n-j} \approx 1 - \alpha$

Tablica 2. Dokładne przedziały ufności dla metody historycznej symulacji

Liczba obserwacji	p	Poziom istotności 1-α	Dolna granica k	Górna granica l
n=260	0.95	0.7471	244	252
		0.8998	238	252
		0.9471	237	253
	0.99	0.7342	249	259
		0.9101	254	260
n=520	0.95	0.7591	490	502
		0.8926	487	503
		0.9550	485	505
	0.99	0.7383	513	518
		0.8914	507	518
		0.9492	510	519

Źródło: [50].



Tablica 2 pokazuje rozwiązania dla pewnych wartości n i p . Dla określonego n i p przedział $[L_{k:n}; L_{l:n}]$ pokrywa nieznaną prawdziwą wartość $VaR(p)$ z prawdopodobieństwem $1-\alpha$. Oczywiście, wcześniej wspomniane zastrzeżenia, co do braku gładkości prawego ogona dystrybuanty empirycznej pozostają w mocy.

6.2. Modele parametryczne

Jeśli parametryczna rodzina rozkładów, do których należy F jest znana (bądź założona), problem estymacji VaR sprowadza się do wyznaczenia nieznanymi parametrów rozkładu. Mając estymatory parametrów rozkładu, można obliczyć dowolny kwantyl, posługując się odwrotną dystrybuantą. Dla danych finansowych dopasowywano wiele rozkładów, należących m.in. do klas rozkładów α -stabilnych (przykładowo - rozkład normalny) i hiperbolicznych ([17], [16]).

Skupmy się na początek na modelu z parametrem skali i położenia, gdzie $F(x) = F_0\left(\frac{x-b}{a}\right)$ i F_0 jest dystrybuantą znanego rozkładu, b jest nazywany parametrem położenia, a a - parametrem skali. Ważnymi szczególnymi przypadkami takiego modelu są rozkłady: normalny, t-Studenta i wykładniczy. Taki model prowadzi do następującego określenia Value at Risk

$$VaR(p) = F^{\leftarrow}(p) = b + aF_0^{\leftarrow}(p) \quad (38)$$

Oznacza to, że dowolnego p , $VaR(p)$ może być obliczony jako liniowa funkcja estymatorów \hat{a} i \hat{b} . Kwantyle $F_0^{\leftarrow}(p)$ i F_0 dla wielu rozkładów można otrzymać za pomocą arkuszy kalkulacyjnych bądź programów statystycznych.

6.2.1. Normalny rozkład strat

Zakładając normalny rozkład strat $L_i (i=1,2,\dots,n)$, model (2) można zapisać w postaci

$$VaR(p) = \mu + \sigma\Phi^{\leftarrow}(p), \quad 0 < p < 1 \quad (39)$$

gdzie parametrami skali i położenia są odpowiednio: odchylenie standardowe i wartość oczekiwana, a Φ oznacza, jak pamiętamy, dystrybuantę rozkładu $N[0,1]$. Przy estymacji powyższa zależność przybiera postać

$$\widehat{VaR}_{ND}(p) = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{\leftarrow}(p), \quad (40)$$

Łatwość interpretacji i szeroka znajomość rozkładu normalnego są przyczynami, dla których model ten jest często spotykany w zastosowaniach. Zajmijmy się teraz wyznaczeniem przedziału ufności dla takiego estymatora $VaR(p)$.

Zmienne losowe $\bar{x} = \hat{\mu}$ i $S^2 = \hat{\sigma}^2$ są niezależne, o ile są obliczone na podstawie próby prostej z populacji o rozkładzie normalnym. Estymator $\hat{\mu}$ ma rozkład normalny $N\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$,

z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dla nieznanego σ , $\hat{\mu}$ ma rozkład t-Studenta z n stopniami swobody, który dla dużych n zbiega do rozkładu normalnego o powyższych parametrach. Estymator $\hat{\sigma}$ ma następującą funkcję gęstości (pot. [46])

$$f(s) = \frac{n^{\frac{n-1}{2}} s^{n-2} \exp\left(-\frac{ns^2}{2\sigma^2}\right)}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sigma^{n-1}}, \quad (41)$$

natomiast zmienna $\frac{\sqrt{n-1}\hat{\sigma}}{\sigma}$ ma rozkład χ z $n-1$ stopniami swobody. Zgodnie z [44] i własnymi obliczeniami, wartość oczekiwana rozkładu χ_k ¹⁵ zbiega szybko do $\sqrt{k-1/2}$, a tym samym wariancja¹⁶ zbiega dla $k \rightarrow \infty$ do $1/2$. Zatem zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, zmienna

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{n-1}\hat{\sigma}}{\sigma} - \sqrt{n-1-1/2} \right) = \frac{\sqrt{2(n-1)\hat{\sigma}} - \sqrt{2(n-1)-1}\sigma}{\sigma} \approx \sqrt{2(n-1)} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} - 1 \right) \approx \sqrt{2n} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} - 1 \right) \quad (42)$$

ma asymptotycznie rozkład normalny $N[0,1]$.

Odejmijmy teraz od obu stron równania (42) wartości oczekiwane i podzielmy stronami przez $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Otrzymujemy w efekcie

$$\frac{\widehat{VaR}_{ND}(p) - VaR_{ND}(p)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\sigma/\sqrt{n}} \Phi^{\leftarrow}(p) \quad (43)$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami $\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ jest zbieżne względem dystrybuanty do $N[0,1]$, a $\frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2n} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} - 1 \right) \right]$ jest zbieżne do $N[0, \frac{1}{2}]$. Stąd mamy, że $\frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\sigma/\sqrt{n}} \Phi^{\leftarrow}(p)$ zbiega do $N[0, [\Phi^{\leftarrow}(p)]^2/2]$. Ponieważ rozkład normalny ma własność addytywności, lewa strona ma asymptotycznie rozkład normalny z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $1 + [\Phi^{\leftarrow}(p)]^2/2$. Zatem dla $0 < \alpha < 1$ mamy spełnione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\widehat{VaR}_{ND}(p) - VaR_{ND}(p)}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \sqrt{1 + \frac{[\Phi^{\leftarrow}(p)]^2}{2}} \right\} = 1 - \alpha \quad (44)$$

Stąd ostatecznie uwzględniając fakt, że $\hat{\sigma}$ jest zgodnym estymatorem σ , otrzymujemy asymptotyczny przedział ufności dla $\widehat{VaR}(p)$, dla założonego poziomu ufności $1 - \alpha$:

$$\left[\widehat{VaR}_{ND}(p) \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{[\Phi^{\leftarrow}(p)]^2}{2}} \right] \quad (45)$$

Najważniejszym wnioskiem z tych raczej mało interesujących przekształceń jest fakt wzrostu wariancji $\widehat{VaR}(p)$ dla $p \rightarrow 0$ lub $p \rightarrow 1$, proporcjonalnie do kwadratu $\Phi^{\leftarrow}(p)$. Oznacza to, że im bardziej ekstremalne kwantyle rozkładu nas interesują, tym mniej dokładnie możemy je wyznaczyć.

¹⁵ Równa $m = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$.

¹⁶ Wynosząca $\sigma^2 = k - m^2$.

6.2.2. Liniowa funkcja wyceniająca. Model wariancji - kowariancji

W wielu przypadkach strata może być dokładnie, bądź z dużą dokładnością przybliżona jako liniowa funkcja zmian czynników ryzyka $X_t = R_{t+1} - R_t$. Współczynniki takiej funkcji to pochodne cząstkowe funkcji wyceniającej V względem kolejnych czynników ryzyka $R_{t,j}$ (tzw. **przybliżenie delta**) ważone udziałem ω_j danego czynnika ryzyka w całkowitej wartości portfela W . Wartość pochodnych cząstkowych zależy od aktualnych wartości R_t , co daje nam

$$L(R_t, X_t) = W \sum_{j=1}^k \delta_j(R_t) X_{t,j} = W \delta(R_t)^T X_t$$

gdzie $\delta(R_t)^T = [\delta_1(R_t), \dots, \delta_k(R_t)]^T$. Łączny rozkład normalny log zwrotów z czynników ryzyka $[X_{t,1}, \dots, X_{t,k}]$, z macierzą kowariancji Σ i wektorem wartości oczekiwanych v zapewnia normalność warunkową względem realizacji zwrotów $\{R_t = r\}$ funkcji L . Jej parametrami są odpowiednio $\mu = \delta(r)^T v$ i $\sigma^2 = \delta(r)^T \Sigma \delta(r)$, co oznacza, że VaR można obliczyć korzystając z zależności

$$\begin{aligned} VaR(p) &= W \underbrace{\delta(r)^T}_{=\mu} v + \sigma W \underbrace{\sqrt{\delta(r)^T \Sigma \delta(r)}}_{=\sigma} \Phi^{\leftarrow}(p) \end{aligned}$$

Modele o takiej strukturze nazywane są **modelami wariancji-kowariancji**. Estymacji $VaR(p)$ możemy dokonać korzystając z estymatorów v i Σ , które dane są przez: $\hat{v} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k)' = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{t-i}$ oraz $\hat{\Sigma}_{k \times k} = (n-1)^{-1} \tilde{X}_t' \tilde{X}_t$, gdzie

$$\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} X_{t-1,1} - \hat{v}_1 & X_{t-1,2} - \hat{v}_2 & \dots & X_{t-1,k} - \hat{v}_k \\ X_{t-2,1} - \hat{v}_1 & X_{t-2,2} - \hat{v}_2 & \dots & X_{t-2,k} - \hat{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{t-n,1} - \hat{v}_1 & X_{t-n,2} - \hat{v}_2 & \dots & X_{t-n,k} - \hat{v}_k \end{pmatrix}_{n \times k}$$

Stąd estymator $VaR(p)$ dany jest przez

$$\begin{aligned} VaR(p) &= W \underbrace{\delta(r)^T}_{=\mu} \hat{v} + \sigma W \underbrace{\sqrt{\delta(r)^T \hat{\Sigma} \delta(r)}}_{=\sigma} \Phi^{\leftarrow}(p) \end{aligned} \quad (46)$$

Dla krótkich, jednodniowych, bądź jednotygodniowych prognoz VaR, przyjmuje się bardzo często $\hat{v} = 0$. Takie założenie nie zmniejsza ogólności rozważań, ani nie wpływa (z reguły) znacząco na wielkość VaR, pozwalając w zamian na znaczne uproszczenie zapisu i obliczeń. W szczególności takie uproszczenie przyjmowane jest w ramach systemu *RiskMetricsTM*.

Przy modelach parametrycznych warto rozważyć 2 potencjalnie istotne z praktycznego punktu widzenia kwestie. Po pierwsze, możliwe uproszczenie procesu kalkulacji. Po drugie zaś - różnego rodzaju dodatkowe miary ryzyka, związane z rozbięciem VaR na poszczególne składniki portfela. Określmy na początek **indywidualny VaR** (ang. *individual VaR*):

$$VaR(p)_i = \Phi^{\leftarrow}(p) \sigma_i | W_i | \quad (47)$$

Warto zauważyć, że przyjmujemy moduł wagi danego aktywa w portfelu, jako że wagi mogą być ujemne, podczas gdy VaR powinien być >0 . Suma indywidualnych VaR daje nam niezdywersyfikowany VaR dla portfela. Jeśli wykluczmy możliwość zajmowania krótkich pozycji, różnica między niezdywersyfikowanym VaR a normalnym VaR mierzy korzyści z dywersyfikacji. W przypadku krótkich pozycji mamy do czynienia z przypadkiem najgorszej możliwości - zakładamy, że korelacja wynosi -1 dla przeciwnych pozycji nawet w bardzo podobnych aktywach (podczas gdy w rzeczywistości jest raczej zbliżona do $+1$).

Aby dokonać pomiaru wpływu zmian pozycji na ryzyko portfela wprowadźmy pojęcie **krańcowego VaR** (ang. *marginal VaR*). Załóżmy (bez utraty ogólności), że nasz portfel składa się z N składników. Niech ΔVaR oznacza krańcowy VaR, czyli pochodną VaR względem zmian wagi danego czynnika ryzyka w portfelu:

$$\Delta VaR = \frac{\partial VaR}{\partial w_i W} = \Phi^{\leftarrow}(p) \frac{\partial \sigma_{port}}{\partial w_i} \quad (48)$$

gdzie dla przypomnienia:

$$\sigma_{port} = \sqrt{\delta(r)' \hat{\Sigma} \delta(r)} \quad (49)$$

Rozpisanie σ_{port}^2 daje w rezultacie

$$\sigma_{port}^2 = \sum_{i=1}^N \delta_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \delta_i \delta_j \sigma_{ij} \quad (50)$$

przy czym δ_i są w szczególności równe wagom w_i . Korzystając z (50) możemy obliczyć $\frac{\partial \sigma_{port}}{\partial w_i}$:

$$\frac{\partial \sigma_{port}}{\partial w_i} = \frac{1}{2\sigma_{port}} \frac{\partial \sigma_{port}^2}{\partial w_i} = \frac{1}{2\sigma_{port}} \left(2w_i \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^N w_j \sigma_{ij} \right) = \frac{cov(r_i, r_{port})}{\sigma_p} \quad (51)$$

gdzie $cov(r_i, r_{port})$ oznacza kowariancję pomiędzy zwrotem z danego aktywa a zwrotem z portfela. Podstawiając otrzymany VaR do (48) otrzymujemy:

$$\Delta VaR = \Phi^{\leftarrow}(p) \frac{cov(r_i, r_{port})}{\sigma_p} \quad (52)$$

Warto zauważyć, że krańcowy VaR jest blisko związany z tzw. betą portfela, czyli współczynnikiem nachylenia w regresji liniowej zwrotów z danego aktywa względem zwrotów z portfela. Uwzględniając, że beta zdefiniowana jest jako:

$$\beta_i = \frac{cov(r, r_{port})}{\sigma_{port}^2}, \quad (53)$$

otrzymujemy związek między betą a krańcowym VaR:

$$\Delta VaR = \Phi^{\leftarrow}(p) (\beta_i \times \sigma_{port}) = \frac{VaR}{W} \times \beta_i \quad (54)$$

(przy założeniu $v = 0$). Wektor współczynników beta dla portfela uzyskujemy korzystając z zależności:

$$\beta = \frac{\Sigma w}{w' \Sigma w} \quad (55)$$

Pozwala nam to szybko obliczyć krańcowy VaR dla wszystkich składników portfela.

Aby zmierzyć wpływ nowej pozycji na ryzyko posiadanego portfela, wprowadźmy pojęcie **przyrostowego VaR** (ang. *incremental VaR*). Załóżmy, że do posiadanego portfela dodajemy nową pozycję x . Wówczas przyrostowy VaR można zdefiniować jako:

$$IncVaR = VaR_{port1} - VaR_{port0} \quad (56)$$

gdzie VaR_{port1} oznacza wartość VaR dla nowego portfela, a VaR_{port0} - dla starego. Aby obliczyć przyrostowy VaR, możemy zmienić skład portfela i policzyć nowy VaR. Alternatywnie możemy skorzystać z liniowego przybliżenia, bazując na wprowadzonym wcześniej krańcowym VaR. Mamy wówczas:

$$IncVaR \approx (\Delta VaR)' \cdot x \quad (57)$$

Miarą, która stara się dokonać rozkładu VaR na poszczególne składniki portfela jest tzw. **cząstkowy VaR** (ang. *component VaR*). Zdefiniujmy cząstkowy VaR jako zmianę VaR dla portfela, jeśli usuniemy z niego dany składnik, pozostawiając wartość portfela bez zmian (czyli zwiększając proporcjonalnie wartość pozostałych aktywów). Oczywiście, możemy dokładnie obliczyć cząstkowy VaR, zmieniając skład portfela i dokonując ponownej, pełnej rekalkulacji VaR. Liniowe przybliżenie uzyskujemy korzystając z wcześniej wprowadzonego pojęcia krańcowego VaR. Mamy wówczas:

$$Component VaR = (\Delta VaR_i) w_i W = VaR \cdot \beta_i \cdot w_i \quad (58)$$

Naturalnie możemy taką miarę przedstawić w postaci względnej, jako procent całkowitego ryzyka przypadający na dane aktywo lub klasę aktywów.

6.3. Metody symulacyjne - metoda Monte Carlo

Rozwój technik obliczeniowych spowodował w ostatnich latach znaczne zmiany w ekonometrii i statystyce, głównie dzięki metodom Monte Carlo (MC) i bootstrappingu. Wiele skomplikowanych analitycznie problemów, włączając VaR, można rozwiązać stosując symulację.

Zajmijmy się teraz kwestią generowania trajektorii ruchu cen w zgodzie z [34]. Generowanie pojedynczej zmiennej o rozkładzie normalnym nie jest problemem. Korzystamy tutaj z twierdzenia, które mówi, że jeśli y ma rozkład z dystrybuantą F , to $F(y)$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$. Zatem $y = F^{-1}(\eta)$, gdzie η jest zmienną losową z rozkładu jednostajnego $U_{[0,1]}$. Oczywiście, wszystkie arkusze kalkulacyjne i programy statystyczne oferują generatory liczb pseudolosowych $U_{[0,1]}$, jak również odwrotną dystrybuantę rozkładu normalnego. Ciekawszym zagadnieniem jest generowanie zmiennych normalnych o określonej

macierzy wariancji - kowariancji Σ . Omówię tutaj trzy algorytmy postępowania. Są to dekompozycje: Choleskiego, wartości własnych (głównych składowych) i wartości osobliwych (ang. *singular value*).

W metodzie Choleskiego przedstawiamy macierz $\Sigma = [s_{ij}]$ w postaci $\Sigma = P'P$, gdzie $P = [p_{ij}]$ - macierz trójkątna górna. Wówczas $y = P'\varepsilon$, gdzie ε - wektor niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N[0;1]$ wygenerowanych według algorytmu opisanego powyżej, ma wielowymiarowy rozkład normalny z macierzą wariancji-kowariancji Σ . Sprawdźmy:

$$V(y) = P'E(\varepsilon\varepsilon')P = P'IP = P'P = \Sigma,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową, $V(y)$ - wariancję zmiennej y . W przypadku dekompozycji Choleskiego istnieje rekursywny algorytm wyznaczania macierzy P , dany przez wzory:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \left(s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)^{1/2} \\ a_{ij} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(s_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}a_{jk} \right)^{1/2} \quad j = i+1, i+2, \dots, N \end{aligned} \quad (59)$$

Metoda ta jest zapewne najmniej skomplikowaną obliczeniowo, ale wymaga, aby macierz korelacji była półdefinitnie określona. co nie zawsze jest spełnione.

W metodzie wartości osobliwych przedstawiamy macierz Σ w postaci $\Sigma = UDV$, gdzie U, V - macierze ortogonalne $U'U = V'V = I$, D - macierz diagonalna z wartościami osobliwymi na przekątnej. Dla dowolnej symetrycznej macierzy kwadratowej $U = V$. Wówczas $y = Q'\varepsilon$, gdzie $Q = D^{1/2}V'$, ε - wektor niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N[0;1]$ wygenerowanych według algorytmu opisanego powyżej, ma wielowymiarowy rozkład normalny z macierzą wariancji-kowariancji Σ . Sprawdźmy:

$$V(y) = Q'E(\varepsilon\varepsilon')Q = Q'IQ = VD^{1/2}D^{1/2}V' = VDV' = \Sigma,$$

przy oznaczeniach jak powyżej.

W metodzie wartości własnych (składowych głównych) przedstawiamy macierz Σ w postaci $\Sigma = C\Delta C' = Q'Q$, gdzie C - macierz ortogonalna, której kolumnami są wektory własne $C'C = I$, Δ - macierz diagonalna z wartościami własnymi na przekątnej, $Q = \Delta^{1/2}C'$. Wówczas $y = Q'\varepsilon$, gdzie ε - wektor niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N[0;1]$ wygenerowanych według algorytmu opisanego powyżej, ma wielowymiarowy rozkład normalny z macierzą wariancji-kowariancji Σ . Sprawdźmy:

$$V(y) = Q'E(\varepsilon\varepsilon')Q = Q'IQ = C\Delta^{1/2}\Delta^{1/2}C' = C\Delta C' = \Sigma,$$

przy oznaczeniach jak wcześniej.

Rozkłady powyższe można otrzymać posługując się jednym z dostępnych pakietów matematycznych (np. Matlab, Gauss) lub w przypadku dekompozycji Choleskiego, korzystając z opisanego algorytmu. Aby dokończyć proces generowania ruchów cen, należy podstawić otrzymane wartości ε_i do następującego równania, wynikającego z założenia o log-

normalności ruchów cen: $P_{it} = P_{0i} \exp(\sigma_i \sqrt{t} y_i)$, gdzie t oznacza czas, σ_i - odchylenie standardowe i-tego instrumentu.

Jeśli założymy, iż obserwowane zwroty mają rozkład t-Studenta, musimy nieco zmodyfikować powyższą procedurę. Losujemy dodatkowo zmienną s z rozkładu χ^2 i otrzymujemy szukane zmienne zgodnie ze wzorem

$$x_i = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s}} Q' \varepsilon \quad (60)$$

gdzie t_v oznacza jednowymiarowy rozkład t-Studenta z v stopniami swobody. Należy pamiętać, że zgodnie z tym, co zostało powiedziane w rozdziale 4.3, możemy powyższymi metodami symulować zmienne o innych rozkładach brzegowych, wykorzystując jedynie określoną strukturę współzależności definiowaną przez wielowymiarowy rozkład normalny względnie wielowymiarowy rozkład t-Studenta. W tym celu należy otrzymane rezultaty odpowiednio przekształcić, tzn. zastosować transformację Rosenblatta (pot. rozdział 9), a następnie podstawić otrzymane zmienne do odwrotnych dystrybuant przyjętych rozkładów brzegowych. Przykładowo, pozostając przy powyższych oznaczeniach, podstawiamy $u_i = t_v(x_i)$, a następnie $y_i = F_i^{\leftarrow}(u_i)$, gdzie F_i^{\leftarrow} oznacza dystrybuantę i-tego, dowolnego rozkładu brzegowego i otrzymujemy rozkład wielowymiarowy o dowolnych rozkładach brzegowych i współzależności wyrażonej za pomocą t-łącznika.

Niewątpliwą zaletą symulacji jest dokładna wycena portfela w przypadku instrumentów nieliniowych (opcje). Tym niemniej, przybliżenie wartości portfela z wykorzystaniem δ (delta), Γ (gamma) i θ (theta) daje z reguły wyniki porównywalne z symulacją. Przewaga tej metody jest niewątpliwa w przypadku tych (dość rzadkich) instrumentów, dla których nie istnieją analityczne formuły wyceniające. Inną cechą metody Monte Carlo jest tworzenie automatycznie prognozy kompletnej P&L dystrybuanty. Umożliwia to lepszą ocenę portfela ze względu na ryzyko niż pojedyncza liczba jaką jest VaR, tym niemniej należy zaznaczyć, iż inne podejścia również oferują taką możliwość.

Główną wadą tego podejścia jest jego czasochłonność. Problem polega jednak nie tyle na generowaniu trajektorii ruchu cen, ile na wycenie portfela (np. za pomocą formuły Blacka-Scholesa). Jeśli portfel zawiera wiele składników nieliniowych (derywatów), to przeprowadzenie tysięcy waluacji może trwać. Tym niemniej metoda ta jest zapewne najlepszą w sytuacji, gdy:

- nie zależy nam na bardzo szybkim wyniku
- portfel zawiera wiele derywatów (lub zawiera pozycje bez analitycznych formuł wyceniających)
- chcemy dokładniej zbadać ryzyko pozycji

Warto wspomnieć również o metodach pozwalających poprawić szybkość algorytmu oraz losować zmienne z rozkładów o skomplikowanych analitycznie postaciach.

Metoda odrzucenia-przyjęcia (ang. *acceptance-rejection method*) losowania liczb o rozkładzie z funkcją gęstości f polega na znalezieniu takiej stałej c i takiej funkcji gęstości g , aby $\forall x: f(x) \leq cg(x)$. Następnie losuje się liczbę γ z g , oblicza $r = \frac{c\gamma}{f(\gamma)}$ i losuje się liczbę u z rozkładu jednostajnego $U_{[0,1]}$. Jeśli $ur < 1$ przyjmujemy γ jako wylosowane z f , w przeciwnym wypadku odrzucamy wylosowaną liczbę i powtarzamy procedurę od początku. Praktycznie dobiera się możliwie małe c , gdyż oczekiwana liczba iteracji algorytmu potrzebnych do wylosowania liczby z f wynosi właśnie c . Warunkiem koniecznym dla tej metody jest możliwość generowania liczb pseudolosowych z rozkładu g .

Metoda zmiennych lustrzanych (ang. *antithetic variables*) polega na wykorzystaniu w symulacji już wygenerowanych wielkości zmiennych losowych γ . Dokładniej, przyjmujemy $\gamma_{i+N} = -\gamma_i$ dla $i = 1, \dots, N$. Pomimo swojej prostoty, metoda ta pozwala na znaczne poprawienie szybkości (zbieżności).

Inną, obiecującą metodą zwiększenia efektywności jest zastosowanie tzw. deterministycznej symulacji (ang. *deterministic simulation*). Polega ona na generowaniu liczb według w pełni deterministycznego algorytmu. Generowana sekwencja punktów bardziej jednorodnie wypełnia przestrzeń, co powoduje, że błąd szacunku maleje szybciej niż w przypadku metod losowych, tzn. błąd szacunku jest raczej proporcjonalny do n^{-1} niż do $n^{-\frac{1}{2}}$ (jak w przypadku wektora pseudolosowego).

Zestaw technik opisany w [9], pozwala znacznie zmniejszyć wariancję estymatora i wielokrotnie skrócić obliczanie VaR dla opcji metodą Monte Carlo, pozwalając na obliczanie VaR w ciągu dnia, a nie tylko po zakończeniu handlu. Po pierwsze, obliczamy dla wylosowanych scenariuszy przybliżoną dystrybucję strat, w oparciu o rozwinięcie Taylora (metodę delta-gamma). Następnie dokładną wycenę za pomocą formuły Blacka-Scholesa przeprowadza się tylko dla tych scenariuszy, które znajdują się w prawym ogonie wstępnie oszacowanej P&L dystrybuanty. Zakłada się, że interesuje nas tylko prawy, skrajny dystrybuanty strat, co w wielu wypadkach może być prawdą.

Przy losowaniu scenariuszy można wykorzystać metodę głównych składowych (analizę czynnikową), opisaną w tym kontekście w [24]. Przykładowo, ponad 98% zmienności w cenach amerykańskich obligacji o różnych terminach wykupu (czyli zmian krzywej dochodowości) można wyjaśnić za pomocą trzech pierwszych wyróżnionych czynników, które można interpretować jako przesunięcie (równoległe), zmianę krzywizny i zmianę kształtu krzywej dochodowości.

Z reguły P&L dystrybuanta otrzymana analitycznie za pomocą metody delta-gamma, wykazuje wysoką korelację z prawdziwą dystrybucją strat wyznaczoną dokładną metodą MC (z reguły ok. 0,9). Pozwala to na zastosowanie metody zmiennej kontrolującej (ang. *control variate*). Oznaczając: $VaR_a(p)$ - prawdziwy VaR dla danego p , $VaR_g(p)$ - VaR przybliżony

analitycznie za pomocą metody delta-gamma, \bar{F}_a, \bar{F}_g - P&L dystrybuanty wyznaczone odpowiednio dokładną i przybliżoną¹⁷ metodą MC, mamy następujące zależności:

$$\begin{aligned}x_a &= VaR_a(p); \quad x_g = VaR_g(p) \\ \bar{F}_a(x_a) &= \bar{F}_g(x_g) \\ x_a &= \bar{F}_a^{-1}[\bar{F}_g(x_g)]\end{aligned}$$

W praktyce należy najpierw wyznaczyć VaR dla żądanego p analityczną metodą delta-gamma. Następnie znajdujemy odpowiadający obliczonemu $VaR_g(p)$ kwantyl P&L dystrybuanty wyznaczonej przybliżoną metodą Monte Carlo, polegającej na kalkulacji VaR dla losowych scenariuszy za pomocą aproksymacji delta-gamma. Dla tak otrzymanego kwantyla dokonujemy pełnej kalkulacji VaR i przyjmujemy, że jest to szukany $VaR_a(p)$.

Dzięki takiemu postępowaniu, wariancja estymatora VaR wynosi $2\sigma(1-\rho)$, gdzie ρ oznacza korelację między VaR przybliżonym analitycznie i VaR uzyskanym metodą Monte Carlo z pełną wyceną, a σ - wariancję dla estymatora otrzymanego w zwykłej metodzie Monte Carlo (bez zmiennej kontrolującej). Oznacza to, że dla $\rho=0,9$ (typowa wartość w czasie testów) czas obliczeń maleje pięciokrotnie. Aby uniknąć sytuacji, gdy $\gamma \rightarrow \infty$, występującej dla opcji *at-the-money* z krótkim czasem do wykupu, zamiast zwykłego różniczkowania, zastosowano technikę obliczania zmian wartości opcji dla skończonych przyrostów, wynoszących 0,5 dziennego odchylenia standardowego cen instrumentu bazowego. Wyniki testów dla takiego podejścia są zamieszczone w rozdziale 9.

Frye [24] proponuje inną technikę umożliwiającą kontrolowanie ekspozycji związanej z operacjami rynkowymi w ciągu dnia. Przed rozpoczęciem handlu (tzn. w ciągu nocy) należy obliczyć wartości portfela przy założeniu całego szeregu możliwych zmian wartości czynników ryzyka względem zamknięcia z dnia poprzedniego. Ilość niezbędnych obliczeń w sposób istotny zależy od liczby wyróżnionych czynników i zakresów zmian. Dlatego zalecane jest zastosowanie analizy czynnikowej (np. metody składowych głównych) dla zmniejszenia liczby rozpatrywanych czynników ryzyka. Przykładem możliwej dalszej redukcji rozważanych czynników ryzyka jest modelowanie spreadu (różnicy) między krzywymi dochodowości w różnych krajach, zamiast odrębnie samych krzywych. W ciągu dnia kolejne operacje są *marked-to-market* z wykorzystaniem obliczonej siatki wyceniającej i liniowej interpolacji, przy uwzględnieniu zmian, które zaszły w sytuacji rynkowej. Gdy chcemy uzyskać VaR metodą MC, wyceny poszczególnych scenariuszy również dokonujemy za pomocą siatki wyceniającej i liniowej interpolacji, co pozwala znacznie przyspieszyć proces symulacji. Wyniki testów dla takiego podejścia można znaleźć w rozdziale 9.

¹⁷ Tzn. opartą o rozwinięcie cen opcji w szereg Taylora.

7.1. Hybrydowa symulacja historyczna

Metoda historycznej symulacji ma pewne wady. Załóżmy, że w krótkim okresie, przykładowo w ciągu tygodnia, wystąpiły trzy bardzo kiepskie dni. Oznaczać to może, że przez cały następny rok $VaR(0.99)$ będzie stały, a później skokowo zmaleje. Innymi słowy, metoda HS nie uwzględnia obserwacji spoza przyjętego okna, a obserwacjom w przyjętym przedziale przydziela równe prawdopodobieństwo.

Naturalną modyfikacją podejścia HS jest zastosowanie wygładzania wykładniczego. Opisane zostało ono przez Boudoukha i in. [8]. Koncepcja jest prosta. Należy dobrać szerokość okna K i współczynnik wygładzający λ . Następnie każdej obserwacji spośród ostatnich K obserwacji przyporządkowujemy wagi (prawdopodobieństwa):

$$w_{t-i} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^K} \lambda^i, \quad (61)$$

gdzie t oznacza aktualny moment czasu. Oczywiście, możemy przyjąć K równe dostępnej liczbie obserwacji, tak, by λ efektywnie regulowała ilość uwzględnianych obserwacji. Procedura wyznaczania praktycznie uwzględnianego zakresu danych opisana jest w rozdziale 8.

Dalsze postępowanie jest analogiczne jak w normalnej metodzie HS. Wyznaczenie optymalnego współczynnika λ , który może się różnić w zależności od przyjętego poziomu istotności, określonego aktywa i rozpatrywanego rynku, może być przeprowadzone na podstawie znanych kryteriów, jak na przykład pierwiastek z błędu średniokwadratowego prognozy (RMSE), czy też średniego błędu absolutnego (MAE). Wyniki testów takiego modelu i porównanie z innymi podejściami są opisane w rozdziale 9.

7.2. Wygładzanie kwantyli empirycznych

Zamiast wygładzać empiryczne kwantyle zwiększając liczbę obserwacji, można usunąć nieciągłość za pomocą uśredniania. Najprostsze podejście może polegać na zastosowaniu takich oto wag:

$$w_{i,n}(p) = \begin{cases} 1 - (n+1)p + i & i = [(n+1)p] \\ (n+1)p - i & i = [(n+1)p], \\ 0 & w.p.p. \end{cases} \quad (62)$$

gdzie $[np]$ oznacza *entrier*, czyli największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą np . Właściwości statystyczne takich estymatorów badali m.in. [45] i [13]. Wyniki ich badań wskazują, że takie proste estymatory nie są najlepszymi, zwłaszcza w przypadku krańcowych

kwantyli. Tym niemniej można uznać je za pierwszy krok w kierunku uzyskania lepszych, bardziej stabilnych wyników. W tabelicy 3 podano kilka przykładów. Zgodnie z nimi, $VaR(0.99)$ dla okresu jednego roku można obliczyć jako:

$$VaR_t(0.99) = 0.61L_{258;260} + 0.39L_{259;260}.$$

Tabela 3. Wagi do wygładzania wartości VaR HS

	p	i=[(n+1)p]	$w_{i,n}(p)$	$w_{i+1,n}(p)$
n=100	0.95	95	0.05	0.95
	0.99	99	0.01	0.99
n=260	0.95	247	0.05	0.95
	0.99	258	0.61	0.39
n=520	0.95	494	0.05	0.95
	0.99	515	0.21	0.79
n=780	0.95	741	0.05	0.95
	0.99	773	0.81	0.19

Źródło: [51], str.10.

W ogólnym przypadku nieparametryczna estymacja dystrybuanty strat może zostać przeprowadzona za pomocą funkcji jądra (rdzenia) $k_n(p, x)$ określonej na $(0,1) \times (0,1)$ o wartościach rzeczywistych, dla danej liczby całkowitej n , przy czym $\int_0^1 k_n(p, x) dx = 1$. Tzw. jądro (lub rdzeniowy - ang. *kernel*) estymator $VaR(p)$ zdefiniowany jest jako:

$$\widehat{VaR}_{KQ}(p) = \int_0^1 k_n(p, x) \hat{F}^{\leftarrow}(x) dx = \sum_{i=1}^n w_{i,n}(p) L_{i:n}, \quad (63)$$

gdzie wagi $w_{i:n}$ mogą zostać zapisane jako $w_{i:n} = \int_{(i-1)/n}^i k_n(p, x) dx$, skąd wynika, że $\sum_{i=1}^n w_{i:n}(p) = 1$. $\widehat{VaR}_{KQ}(p)$ zgodnie z równaniem (3) może być rozumiany jako liniowa funkcja statystyk pozycyjnych z próby losowej. Wagi nie zależą od danej próby i wystarczy je obliczyć jednorazowo dla danej liczby obserwacji. Sensowne funkcje jądra powinny nadawać dodatnie wagi statystykom pozycyjnym odpowiadającym estymatorom F^{\leftarrow} dla prawdopodobieństw bliskich p . Zgodnie z wynikami [45] i [13], jedną z najlepszych jest funkcja zaproponowana przez Harrela i Davisa [28]. Bazując na równaniu (37), wartość oczekiwana $L_{k:n}$ wynosi

$$E(L_{k:n}) = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_{-\infty}^{\infty} y F(y)^{k-1} (1-F(y))^{n-k} f(y) dy,$$

gdzie $B(a, b)$ oznacza funkcję beta. Po podstawieniu $x = F(y)$ otrzymujemy

$$E(L_{k:n}) = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^1 F^{\leftarrow}(x) x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$$

Opierając się na powyższych zależnościach Harrel i Davis [28] sugerują następujący estymator $VaR(p) = F^{\leftarrow}(p)$

$$\widehat{VaR}_{HD}(p) = \frac{\int_0^1 x^{(n+1)p-1} (1-x)^{(n+1)(1-p)-1} \hat{F}^{\leftarrow}(x) dx}{B((n+1)p, (n+1)(1-p))} \quad (64)$$

niezależnie od tego, czy $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, czy nie. Łatwo zauważyć, że jest to przykład estymatora jądrowego z funkcją jądra daną przez

$$k_n(p, x) = \frac{x^{(n+1)p-1} (1-x)^{(n+1)(1-p)-1}}{B((n+1)p, (n+1)(1-p))},$$

gdzie poszczególne wagi w i, n mają postać

$$w_{i,n} = \frac{\int_{(i-1)/n}^{i/n} x^{(n+1)p-1} (1-x)^{(n+1)(1-p)-1} dx}{B((n+1)p, (n+1)(1-p))}$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden typ funkcji jądra, opisany dokładnie w [50], opisany wzorem

$$k_n(p, x) = \frac{1}{h_n(p)} u\left(\frac{p-x}{h_n(p)}\right), \quad (65)$$

gdzie $\int_{-1}^1 u dy = 1$. Jak widać, $y \in [-1, 1]$ i $y = \left(\frac{p-x}{h_n(p)}\right)$. Warto zauważyć, że możemy znacznie zredukować zakres wygładzania dla p bliskiego 0 lub 1, jeśli dobierzemy szerokość okna $h_n(p)$ tak, aby zawsze spełniona była zależność $h_n(p) \leq \min\{p, 1-p\}$. Przykładowo dla $p = 0.95$ i $h_n = 0.05$, $k_n(p, x) \neq 0$ tylko dla $x \in [0.9, 1]$ i większość obserwacji ma zerowe wagi. Przyjmując powyższe oznaczenia, możemy zapisać równanie (63) w postaci

$$\widehat{VaR}_{KQ}(p) = \sum_{i=1}^n \left[U\left(\frac{p-i/n}{h_n(p)}\right) - U\left(\frac{p-(i-1)/n}{h_n(p)}\right) \right] L_{i:n}, \quad (66)$$

gdzie $U(z) = \int_{-1}^z u(y) dy$. Dopuszczalną funkcją $h_n(p)$ może być (por. [50]):

$$h_n(p) = \begin{cases} p - p^2/4\beta_n & 0 < p < 2\beta_n \\ \beta_n & 2\beta_n \leq p \leq 1 - 2\beta_n \\ (1-p) - (1-p)^2/4\beta_n & 1 - 2\beta_n < p < 1, \end{cases}$$

gdzie $\beta_n \leq 1/4$ dla każdego n . Jako $u(y)$ można przyjąć $u(y) = 0.75(1-y^2)1_{[-1,1]}(y)$, co przy całkowaniu daje nam

$$U(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 1/2 + 3/4y - 1/4y^3 & -1 \leq y \leq 1, \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

pozwalając na rozwiązanie równania (66).

Podobnie jak w ogólnym przypadku, przedziały ufności dla $VaR(p)$ otrzymanego za pomocą estymatorów rdzeniowych, mogą być wyznaczone przy wykorzystaniu faktu zbieżności $f(VaR(p))$ do rozkładu normalnego dla dużych n . W [22] podane są założenia dotyczące funkcji jądra, zapewniające, że

$$n^{1/2} \frac{\widehat{VaR}_{KQ}(p) - VaR(p)}{[f(F^{-(p)})]^{-1} \sqrt{p(1-p)}} = \left[\widehat{VaR}_{KQ}(p) - VaR(p) \right] \left[\frac{\sqrt{npq}}{n \cdot f(VaR(p))} \right]^{-1}$$

gdzie $q = (1-p)$, ma asymptotycznie standardowy rozkład normalny $N[0, 1]$. Niestety, z reguły f jest nieznana i nie można policzyć powyższego wyrażenia. Tak więc autorzy [28] proponują, obrazowo rzecz nazywając, „szczyrkową” (ang. *jackknife*) metodę oszacowania wariancji otrzymanego estymatora. Niech $\widehat{VaR}_{KQ}^{(j)}(p)$ będzie estymatorem rdzeniowym $VaR(p)$ w przypadku, gdy z próby została usunięta j -ta statystyka pozycyjna. Wówczas

$$S_{KQ}^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\widehat{VaR}_{KQ}^{(j)}(p) - n^{-1} \sum_{j=1}^n \widehat{VaR}_{KQ}^{(j)}(p) \right]^2 \quad (67)$$

jest estymatorem wariancji $\widehat{VaR}_{KQ}(p)$ dla dostatecznie dużych n [41]. Zgodnie z równaniem (67) możemy skonstruować następujący przedział ufności dla naszego estymatora, przy przybliżonym poziomie ufności $1 - \alpha$:

$$\left[\widehat{VaR}_{KQ}(p) \pm z_{1-\alpha/2} S_{KQ} \right]$$

Alternatywnie możemy wyznaczyć przedział ufności za pomocą metody bootstrap (pot. np. [14] i pozycje tam cytowane). W metodzie korzystamy z danej, n -elementowej próby. Na podstawie posiadanej próby generujemy nowe, n -elementowe próbki losowe, wykorzystując losowanie ze zwracaniem spośród posiadanych obserwacji. Procedurę powtarzamy wiele razy (np. 5000), za każdym razem obliczając VaR. W ten sposób otrzymujemy empiryczny rozkład VaR¹⁸. Przedział ufności dla VaR możemy uzyskać korzystając z jednej z trzech metod - metody percentyli, metody t-bootstrapowej lub podwójnej metody t-bootstrapowej. Przy pierwszym, najprostszym podejściu, granice 90% przedziału ufności wyznaczone są przez 5 i 95 kwantyl empirycznego, bootstrapowego rozkładu VaR.

7.3. Modele parametryczne uwzględniające nieliniowość funkcji wyceniającej

W przypadku portfeli zawierających opcje zwykły model wariancji-kowariancji nie daje dobrych ocen $VaR(p)$, ze względu na silnie nieliniowe zachowanie cen opcji względem czynników ryzyka. Lepsze przybliżenie zmian cen opcji względem zmian wartości czynników ryzyka daje zastosowanie wzoru (32). Mamy zatem:

$$R_p \approx \eta \left[\delta R_p + 1/2 \cdot (\Gamma P_t) \cdot R_p^2 + \hat{\theta}_n \right] \quad (68)$$

Niestety, pomimo założenia normalności log-zwrotów¹⁹ z czynników ryzyka, zwroty z opcji nie mają rozkładu normalnego. Uzasadnieniem niech będzie poniższa tabela przedstawiająca 4 pierwsze momenty rozkładów obu zwrotów, przy następujących oznaczeniach: $\tilde{\delta} = \eta\delta$, $\tilde{\Gamma} = \eta\Gamma P_t$.

Tablica 4. Parametry statystyczne dla zwrotów z opcji i instrumentu podstawowego

Parametr rozkładu	Zwrot na opcji	Zwrot na instrumencie podstawowym
Średnia	$1/2\tilde{\Gamma}_t\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\theta}_n + \delta\mu$	μ
Wariancja	$\tilde{\delta}^2\sigma^2 + 1/2\tilde{\Gamma}^2\sigma^4$	σ^2
Skośność	$3\tilde{\delta}^2\tilde{\Gamma}\sigma^4 + \tilde{\Gamma}^3\sigma^6$	0
Kurtoza	$3\sigma^2 + 12\cdot\tilde{\delta}^2\tilde{\Gamma}^2\sigma^6 + 3\tilde{\Gamma}^4\sigma^8$	$3\sigma^4$

Źródło: [34], s.130.

¹⁸ Analogicznie możemy zresztą dla dowolnej innej statystyki z próby.

¹⁹ Co prawda wzór powyższy wyprowadziliśmy dla zwrotów względnych, korzystamy jednak z przybliżonej równości między log-zwrotami i zwrotami względnymi.

Do policzenia powyższych wartości należy obliczyć Γ , δ i θ korzystając z formuły do wyceny opcji (np. formuły Blacka-Scholesa) oraz znaleźć estymator wariancji z próby $\hat{\sigma}^2$. Uzyskane rezultaty wskazują na 3 ciekawe zależności:

- z reguły nawet przy założeniu zerowego oczekiwanego zwrotu na instrumencie podstawowym, oczekiwany zwrot na opcji jest różny od zera
- wariancja cen opcji jest większa od wariancji instrumentu bazowego
- w przypadku opcji mamy do czynienia ze skośnością (lewo- lub prawostronną) oraz ekscysem kurtozy

Aby móc zastosować wprowadzony uprzednio model wariancji - kowariancji, musimy sobie poradzić z powyższymi odchyleniami od rozkładu normalnego w przypadku zwrotów z opcji. Rozpatrzmy dwa podejścia.

Po pierwsze, można dopasować dany rozkład empiryczny do jednej z gęstości należących tzw. rodzin (bądź systemów) rozkładów gęstości. Do systemu Pearsona należą 12 krzywych (gęstości) (zob. [14]), a do systemu Johnsona - 3 typy rozkładów (zob. [34]). W obu przypadkach 4 pierwsze momenty zmiennej losowej jednoznacznie wyznaczają rozkład i parametry rozkładu wewnątrz rodziny.

Do rodziny rozkładów Johnsona należą 3 typy gęstości podane w tabelicy 5, gdzie $x_s = \frac{x-c}{d}$ i a, b, c, d są parametrami określonymi przez 4 pierwsze momenty zmiennej losowej X .

Tabela 5. Rozkłady gęstości Johnsona

Nazwa	Gęstość	Warunki
Lognormalny	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{d} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x-c)}{b} - \frac{a}{d}\right)^2\right]$	$x, b \in \mathbb{R}^+$
Nieograniczony	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{d} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sinh^{-1}\left(\frac{x-c}{d}\right) - a}{b}\right)^2\right]$	$a \in \mathbb{R}, b, d \in \mathbb{R}^+$ $c: \#$
Ograniczony	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{d} \exp\left[-\frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{c + \sqrt{1-x^2}}{c + \sqrt{1-x^2}}\right)\right]$	$a, c \in \mathbb{R}; b, d \in \mathbb{R}^+$

Źródło: [42], str. 6.

Bazując na wyznaczonych parametrach, możemy dokonać transformacji zmiennej X o rozkładzie normalnym do zmiennej Y , o gęstości należącej do rodziny rozkładów Johnsona. Możliwe są 3 rodzaje transformacji:

$$Y = a + b \log\left(\frac{x-c}{d}\right) \quad (\text{lognormalna}) \quad (69)$$

$$Y = a + b \sinh^{-1}\left(\frac{x-c}{d}\right) \quad (\text{nieograniczona}) \quad (70)$$

$$Y = a + b \log\left(\frac{x-c}{c+d-x}\right) \quad (\text{ograniczona}) \quad (71)$$

W naszym przypadku $X = R_p$ (po standaryzacji) jest znane, a $Y = R_v$. Chcąc otrzymać przybliżoną wartość VaR dla Y , znając $VaR(p)$ dla X (np. dla $p = 0.95$, $VaR(p) = -1.65$), wystarczy zastosować odwrotną transformację, np. $VaR_Y(p) = d \sinh\left(\frac{VaR_X(p)-a}{b}\right) + c$, w przypadku (1). Procedura przekształcenia przedstawia się zatem następująco:

1. Obliczyć dla konkretnej opcji $\eta, \delta, \Gamma, \theta$, znaleźć estymator $\hat{\sigma}^2$ dla ceny instrumentu bazowego.
2. Korzystając z tablicy 4 obliczyć 4 pierwsze momenty rozkładu zwrotów opcji.
3. Zastosować algorytm Hilla, Hilla i Holdera do znalezienia parametrów a, b, c, d i określenia rodzaju transformacji.
4. Zastosować odpowiednią odwrotną transformację.

Chcąc zastosować powyższy algorytm do portfela złożonego z n opcji, wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\delta}_n \end{pmatrix}, \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\Gamma}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{\Gamma}_n \end{pmatrix}, \tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_n \end{pmatrix} \quad (72)$$

Jako $\tilde{\Sigma}$ oznaczamy macierz wariancji-kowariancji log-zwrotów z instrumentu bazowego z próby i zakładamy, że wektor średnich zwrotów $v = 0$. Jedyna różnica w procedurze pojawi się przy obliczaniu momentów rozkładu portfela opcji. Przykładowo, 3 pierwsze momenty dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \mu_n &= 1/2 \cdot tr[\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma}] + \sum_{i=1}^n \tilde{\theta}_i \\ \sigma_n^2 &= \tilde{\delta}'\tilde{\Sigma}\tilde{\delta} + 1/2 \cdot tr[(\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma})^2] \\ s_n^3 &= 3 \cdot \tilde{\delta}'\tilde{\Sigma}\tilde{\delta} \cdot tr[\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma}] + tr[(\tilde{\Gamma}\tilde{\Sigma})^3] \end{aligned}$$

gdzie $tr[X]$ oznacza ślad macierzy X , tzn. sumę jej elementów diagonalnych. Uzyskany wynik będzie określał odpowiednik $\Phi^{\leftarrow}(p)$ dla $R_{V_n} = \sum_{i=1}^n \omega_i R_{V_i}$, gdzie $\omega_i = V_i / \sum_{i=1}^n V_i$, czyli po prostu dla zwrotu z całego portfela opcji.

Alternatywnie możemy analitycznie znaleźć poprawkę dla kwantyli pochodzących z rozkładu normalnego, wynikającą z istnienia skośności i kurtozy. Dokonuje się tego korzystając z tzw. rozwinięcia Cornisha-Fishera [1]. Określmy z_α jako α -kwantyl standardowego rozkładu normalnego $N[0,1]$. Dla zmiennej X o nieznanym rozkładzie z danymi 4 pierwszymi momentami określmy α -kwantyl jako v_α . Oznaczmy przez γ współczynnik skośności, a przez κ - eksces kurtozy (por. rozdz. 2). Wówczas v_α dany jest w przybliżeniu przez:

$$v_\alpha = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\gamma + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\kappa - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\gamma^2 \quad (73)$$

Uogólnienie na portfel opcji dokonuje się analogicznie jak w przypadku pierwszym. Obydwa podejścia są, oczywiście, jedynie przybliżeniami wpływu skośności i kurtozy (grubych ogonów) na rozkład zwrotów z opcji.

7.4. Modele wartości ekstremalnych

Wartość p wynosi zazwyczaj co najmniej 0.95. Innymi słowy, analizując ryzyko danej otwartej pozycji finansowej koncentrujemy się na tych niekorzystnych zdarzeniach, które mają co prawda niske prawdopodobieństwo zajścia, ale przynoszą wysokie straty. Wydaje się zatem sensowne dokładniejsze zbadanie własności estymatorów Value at Risk otrzymanych dzięki probabilistycznej teorii wartości ekstremalnych, które należy uważać za jedno z bardziej obiecujących podejść do zarządzania ryzykiem (zwłaszcza katastroficznym) w instytucjach finansowych i ubezpieczeniowych. Podstawowe rezultaty i omówienie zastosowań można znaleźć m.in. w [36], [19], [38], [40], [20], [39].

Teoria wartości ekstremalnych zaczyna poprawnie funkcjonować przy $p > 0.95$, często dopiero dla $p \geq 0.99$. Jest to zatem metoda nadająca się szczególnie do modelowania wyjątkowo rzadkich zdarzeń, jak np. kryzysy gospodarcze. Opisane w rozdziale 7.4.3 podejście pozwala wygładzać i przedłużać, w sposób parametryczny, skrajny, prawy ogon dystrybuanty historycznych zwrotów. Stanowi zatem interesującą alternatywę wobec wcześniej opisywanych metod wygładzania, zwłaszcza dla wysokich wartości p (≥ 0.99).

7.4.1. Model maksimów blokowych

Poniżej przedstawiono zależność pomiędzy dystrybuantą minimum z próby $F^n(x)$ a rozkładem zmiennej losowej x

$$F^n(x) = 1 - (1 - F(x))^n \quad (74)$$

W naszym przypadku $x = x_t$ oznacza zwrot w momencie t . Niestety, z reguły nie znamy prawdziwego F . Jednak poniższe twierdzenie o wartościach ekstremalnych daje nam asymptotyczny rozkład minimum niezależny od rozkładu F . Oznaczmy asymptotyczną dystrybuantę minimum przez $G(x)$. Jeśli istnieją takie ciągi rzeczywiste $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, że spełnione jest²⁰

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F^n(a_n + b_n x) - G(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

to można pokazać, że

²⁰ Oznacza to, że istnieje tzw. niezdegenerowany rozkład graniczny maksimów dla F .

$$G_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-(1 + \xi x)^{1/\xi}\right), & \xi < 0, x < -1/\xi \quad (\text{Fréchet}; i = 1) \\ \text{lub} \\ 1 - \exp\left(-(1 + \xi x)^{1/\xi}\right), & \xi > 0, x > -1/\xi \quad (\text{Weibull}; i = 2) \\ \text{lub} \\ 1 - \exp\left(-(1 + \xi x)^{1/\xi}\right) = \\ = 1 - \exp\left(-e^x\right), & \xi = 0, x \in R \quad (\text{Gumbel}; i = 3) \end{cases} \quad (75)$$

Innymi słowy: $G_{\xi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(a_n + b_n x)]^n$. Niestety, na podstawie tej metody nie możemy znaleźć $\text{VaR}(p)$, tak jak został on zdefiniowany na początku pracy. Możemy natomiast znaleźć inną miarę ryzyka. Przykładowo, jesteśmy w stanie, przy założeniu okresu posiadania k , dla danego horyzontu czasowego t i prawdopodobieństwa p , obliczyć przykładowo: a) wartość oczekiwaną największej straty w przedziale czasowym $[0, t]$ i b) kwantyle rozkładu największej straty w danym okresie²¹. Oznaczmy tę drugą miarę jako $M(p)$. Jeśli zatem mamy estymatory \hat{a}_n , \hat{b}_n i $\hat{\xi}$, możemy znaleźć $M(p)$ korzystając z zależności (por. (4)):

$$p = 1 - G_{\xi}[-M(p)] = \exp\left[-\left(1 + \xi \left(\frac{-M(p) - a_n}{b_n}\right)\right)^{1/\xi}\right] \quad (76)$$

skąd po elementarnych przekształceniach otrzymujemy

$$M(p) = -a_n + \frac{b_n}{\xi} [1 - (-\ln p)^{\xi}]. \quad (77)$$

Jeśli unormowane minimum zbiega względem dystrybuanty do pewnego niezdegenerowanego rozkładu ciągłego, musi to być jeden z podanych w równaniu (5). Mówi o tym twierdzenie Fishera-Tippetta (pot. [40]), a oznacza to, że F jest w obszarze przyciągania odpowiedniej dystrybuanty wartości ekstremalnych. Najważniejszy w zastosowaniach praktycznych rozkład Fréchéta uzyskujemy dla rozkładów o grubych ogonach, włączając rozkład t-Studenta, rodzinę rozkładów α -stabilnych dla $\alpha \in (0, 2)$ i rozkład Pareto. W tym wypadku $1/\xi$ jest po prostu wprowadzonym w rozdziale 2 indeksem ogona, równym dla wymienionych rozkładów odpowiednio liczbie stopni swobody, wartości α lub wykładnikowi charakterystycznemu. Jak podaje McNeil [39], typowe dla serii finansowych wartości ξ oscylują w granicach $0,2 - 0,5$, co jednocześnie oznacza, że odpowiednio od 2 do 5 pierwszych momentów rozkładu jest skończonych. Do obszaru przyciągania rozkładu Fréchéta należy również brzegowy rozkład zwrotów dla modelu ARCH, jako procesu generującego dane.

Rozkład Gumbela odpowiada rozkładom o „lekkich” ogonach, takim, jak rozkład normalny, log-normalny i rodzina rozkładów gamma. Można traktować ten rozkład jako przejściowy między rozkładami Fréchéta i Weibulla, które dla ξ bliskiego 0 nie różnią się wiele od rozkładu Gumbela. I w końcu rozkład Weibulla otrzymujemy dla rozkładów pozbawionych ogona, tzn. określonych na ograniczonym przedziale np. rozkład jednostajny, rozkład beta.

²¹ Np. medianę dla $p = 0.5$.

Zajmijmy się teraz procedurą obliczania $M(p)$ dla pojedynczej pozycji, zgodnie z modelem maksimów blokowych opisanym w [38]. Warto zauważyć, że możemy traktować dowolny portfel jako jedną pozycję - wówczas, aby otrzymać historyczne zwroty, mając dane dotyczące czynników ryzyka, należy zastosować procedurę symulacyjną, analogiczną do metody HS.

Mając dane N zwrotów należy wybrać bloki obejmujące n zwrotów każdy, przy czym n wyznacza nam horyzont czasowy t . Oznaczmy liczbę bloków N/n jako λ . Następnie z każdego nie nakładającego się przedziału wybieramy najmniejszy zwrot, oznaczony z_k , $k = 1, \dots, \lambda$. W kolejnym kroku estymujemy parametry rozkładu asymptotycznego, korzystając przykładowo z MNW. Można również zastosować inne estymatory ξ , opisane w poprzednim rozdziale. Test jakości dopasowania dystrybuanty wartości ekstremalnych Shermmana podaje [38]. Uporządkujmy rosnąco najmniejsze zwroty $z'_1 \leq \dots \leq z'_\lambda$. Obliczmy statystykę testu Ω Shermmana:

$$\Omega = 1/2 \sum_{i=0}^{\lambda} \left| G_{\xi}(z_{i+1}) - G_{\xi}(z_i) - \frac{1}{\lambda+1} \right|, \quad (78)$$

przy czym $G_{\xi}(z_0) = 0$ i $G_{\xi}(z_{\lambda+1}) = 1$. Ω ma asymptotycznie rozkład normalny z wartością oczekiwaną $[\lambda/(\lambda+1)]^{\lambda+1}$ i przybliżoną wariancją $(2e-5)/(e^2\lambda)$, gdzie e oznacza stałą Eulera. Jeśli dopasowanie jest dobre, możemy obliczyć $M(p)$ pozycji zgodnie ze wzorem (77). Problem polega na tym, że n powinno zasadniczo być na tyle duże (np. kwartał w przypadku danych dziennych), aby móc zastosować asymptotyczne przybliżenie dystrybuantą rozkładu ekstremalnego. Przykładowo, w [38] test Shermmana wskazywał, że odpowiednie dopasowanie otrzymano dla $n > 21$. Oznacza to konieczność posiadania odpowiednio obszernych danych, gdyż parametry rozkładu granicznego estymujemy jedynie na podstawie $N/n = \lambda$ wartości.

W [39] McNeil omawia zastosowanie powyższej teorii w przypadku stacjonarnych szeregów czasowych. Aby dane pochodzące z takiego procesu znajdowały się w obszarze przyciągania powyższych rozkładów muszą być spełnione 2 założenia. Po pierwsze, proces nie może wykazywać silnej zależności długookresowej. Po drugie, duże wartości nie mogą się skupiać. W przypadku finansowych szeregów czasowych nie można przyjąć drugiego założenia za spełnione. Aby uwzględnić efekt skupiania wprowadźmy indeks $\theta \in [0, 1]$. θ jest, intuicyjnie, odwrotnością średniej wielkości skupienia i przyjmuje wartości 1 dla szeregów nie wykazujących skupiania. Rozkład graniczny (por. (75)), przy uwzględnieniu indeksu θ , będzie miał postać:

$$G_{\xi, \theta}(x) = 1 - \exp\left(- (1 + \xi x)^{\theta \xi}\right) \quad (79)$$

Wartość θ ma wpływ na szybkość zbieżności rozkładu do rozkładu asymptotycznego, gdyż efektywnie mamy jedynie θn obserwacji zamiast n . Aby znaleźć θ na podstawie danych należy określić pewien (wysoki) próg u . Naturalnym estymatorem θ jest wówczas:

$$\hat{\theta} = \frac{1 \ln(1 - K_u/\lambda)}{n \ln(1 - N_u/N)}, \quad (80)$$

gdzie K_u oznacza liczbę bloków, w których nastąpiło przekroczenie u , N_u - liczbę przekroczeń u , a N , n i λ zostały zdefiniowane wcześniej.

Aby oszacować błąd tak otrzymanego estymatora możemy zastosować metodę profilu wiarygodności²². Oznaczmy pierwotną funkcję wiarygodności dla parametrów bez nałożonych ograniczeń jako $L(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1})$. Załóżmy, że $\theta_{n+1} = t$. Otrzymujemy wówczas dobrze znany test ilorazu wiarygodności:

$$-2(L(\theta_1, \dots, \theta_n, t) - L(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1})) \quad (81)$$

o asymptotycznym rozkładzie χ^2 z 1 stopniem swobody. Korzystając z powyższej zależności, wyznaczamy następujący zbiór jako przedział ufności dla parametru θ_{n+1} , przy poziomie ufności α :

$$\{t : L(\theta_1, \dots, \theta_n, t) \geq L(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}) - 1/2 \chi_1^2(\alpha)\}, \quad (82)$$

gdzie $\chi_1^2(\alpha)$ oznacza α kwantyl rozkładu χ^2 z 1 stopniem swobody. Przykładowo $\chi_1^2(\alpha) = 3.841$. Chcąc zatem otrzymać przedział ufności dla $M(p)$ należy podstawić:

$$a_n = -M(p) + \frac{b_n}{\xi} [1 - (-\ln p)^\xi] \quad (83)$$

i wówczas $M(p)$ staje się parametrem, co pozwala na zastosowanie powyższej metody.

7.4.2. Estymacja ogonów rozkładów

Istotnym elementem w teorii wartości ekstremalnych jest ustalenie wartości indeksu ogona $\alpha = 1/\xi$. Przykładem estymatora ξ jest estymator Pickandsa określony jako

$$\hat{\xi}_n = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{L_{n-m+1:n} - L_{n-2m+1:n}}{L_{n-2m+1:n} - L_{n-4m+1:n}} \right) \quad (84)$$

Haan i Dekkers [12] dowiedli, że $\hat{\xi}_n$ zbiega prawie na pewno (z prawdopodobieństwem 1) jak poniżej:

$$\hat{\xi}_n \rightarrow \begin{cases} \xi & i=1 \\ -\xi & i=2 \\ 0 & i=3 \end{cases}$$

gdy $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ i $m/n \rightarrow 0$. Tak więc dodatnie wartości estymatora sugerują przypadek pierwszy, ujemne - drugi, a $\hat{\xi}_n$ w okolicach zera pozwalają zakładać przypadek trzeci. Estymator ten jest zgodny i odpowiednio unormowany ma asymptotyczny rozkład normalny [53], co pozwala testować hipotezy dotyczące ξ . Niestety, estymator Pickandsa stabilizuje się dopiero przy dużych n , rzędu 10000, w zależności od grubości ogona rozkładu (im grubszy ogon, tym szybsza stabilizacja).

Lepsze właściwości (tzn. mniejszą wariancję) ma bardziej popularny estymator Hilla (pot. [53]) określony wzorem:

²² Ang. *profile likelihood*.

$$\hat{\xi}_{n,m} = \frac{1}{m} \sum_{i=n-m+1}^n \ln L_{i:n} - \ln L_{n-m:n} \quad (85)$$

Niestety, estymator ten określony jest tylko dla $\xi > 0$, tj. dla rozkładów należących do obszaru przyciągania rozkładu Fréchet. Dla tego przypadku estymator Hilla otrzymujemy się MNW. Jest on estymatorem zgodnym, a $(\hat{\xi}_{n,m} - \xi)m^{1/2}$ ma asymptotyczny rozkład $N[0, \xi^2]$. Jednak estymator ten jest obciążony - jego obciążenie wzrasta wraz ze wzrostem m (przy ustalonym n). Z drugiej strony, jego wariancja maleje ze wzrostem m .

Estymator Dekkersa-Einmahla-de Haana jest rozszerzeniem estymatora Hilla na wszystkie ξ rzeczywiste i jest dany przez:

$$\hat{\xi}_{n,m} = \hat{\xi}_{n,m}^H + 1 - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\hat{\xi}_{n,m}^H)^2}{\hat{\xi}_{n,m}^{(2)}} \right]^{-1}, \quad (86)$$

gdzie $\hat{\xi}_{n,m}^H$ oznacza estymator Hilla, a $\hat{\xi}_{n,m}^{(2)}$ zdefiniowany jest następująco:

$$\hat{\xi}_{n,m}^{(2)} = \frac{1}{m} \sum_{i=n-m+1}^n (\ln L_{i:n} - \ln L_{n-m-1:n})^2 \quad (87)$$

Największa trudność przy kalkulacji powyższych estymatorów związana jest z wyborem wartości m . Najprostszym warunkiem jest, aby $m \rightarrow \infty$ i $m/n \rightarrow \infty$. Jednak dla uzyskania wcześniej wspomnianej zgodności i asymptotycznej normalności konieczne są dodatkowe warunki. W praktyce wykreśla się wartości $\hat{\xi}$ w zależności od m i szuka obszarów stabilizowania się wykresu.

7.4.3. Modele POT

Bardziej użytecznymi dla potrzeb zarządzania ryzykiem wydają się modele POT²³, czyli modele wartości ponadprogowych. Bazują one na wcześniej nakreślonych wynikach, pozwalają jednak na lepsze wykorzystanie danych i kalkulację $Var(p)$. Modele POT koncentrują się nie na rozkładzie ekstremów z próby, a na modelowaniu asymptotycznym ogona dystrybuanty. Tym razem będziemy rozpatrywać P&L dystrybuantę, czyli aproksymacji podlega prawy ogon rozkładu (maksima rozkładu).

Aby bardziej sformalizować pojęcie prawego ogona, wprowadźmy dystrybuantę rozkładu strat ponadprogowych (ang. *excess losses distribution*):

$$F_u(y) = P\{X - u \leq y \mid X > u\}, \quad (88)$$

gdzie $0 \leq y < x_0 - u$, a $x_0 \leq \infty$ oznacza prawy punkt graniczny F ²⁴. Zazwyczaj zakładamy, że $x_0 = \infty$, tzn. dopuszczamy prawdopodobieństwo arbitralnie wielkich strat. Warto zauważyć, że zachodzi:

²³ Ang. *peak-over-threshold models*.

²⁴ Tzn. $F(x \geq x_0) = 1$.

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad (89)$$

co wynika z ogólnego wzoru dla rozkładów uciętych.

Jeśli F należy do obszaru przyciągania pewnej dystrybuanty wartości ekstremalnych, Pickands [48] pokazał, że dystrybuanta strat ponadprogowych F może być przybliżona za pomocą **uogólnionej dystrybuanty Pareto** (por. [40]; $\beta > 0$):

$$H_{\xi, \beta}^i(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \xi = 0 \end{cases}, \quad (90)$$

gdzie $x \geq 0$, gdy $\xi \geq 0$ i $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ dla $\xi \leq 0$. Powyższa dystrybuanta jest nazywana uogólnioną, gdyż zawiera w sobie trzy inne rozkłady. Dla $\xi > 0$ otrzymujemy zwykły rozkład Pareto ($i=1$), dla $\xi < 0$ mamy rozkład Pareto II rodzaju ($i=2$), a dla $\xi = 0$ - rozkład wykładniczy ($i=3$).

Zbieżność oznaczeń parametru ξ nie jest przypadkowa: zależności między uogólnioną dystrybuantą Pareto, dystrybuantą F i dystrybuantami wartości ekstremalnych przedstawione są w poniższym twierdzeniu, którego dowód można znaleźć w [50], twierdzenie 5.1.1. Następujące sformułowania są równoważne (dla odpowiednich przypadków: $i=1,2,3$):

$$\begin{aligned} F^n(c_n + d_n x) &\rightarrow G_\xi^i(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in R \\ \frac{1-F(c_n+d_n x)}{1-H_{\xi, \beta}^i(a_n+b_n x)} &\rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \\ \frac{1-F(c_n+d_n x)}{1-G_\xi^i(a_n+b_n x)} &\rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \\ a_n &= \begin{cases} 0 & i=1,3 \\ \ln n & i=2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad b_n = \begin{cases} n^\xi & i=1,3 \\ 1 & i=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Inne twierdzenie, udowodnione przez de Haana, Pickandsa, Gnedenko i Balkema, a cytowane tutaj za [20], zwięźle przedstawia nieco inną formę zależności:

TWIERDZENIE

Załóżmy, że X_1, \dots, X_n są *i.i.d.* z dystrybuantą F . Następujące stwierdzenia są równoważne:

- F należy do obszaru przyciągania dystrybuanty wartości ekstremalnych G_ξ
- istnieje funkcja $\beta: R^+ \rightarrow R^+$ taka, że:

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 < y < x_0 - u} |F_u(y) - H_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0, \quad (91)$$

gdzie $H_{\xi, \beta(u)}(y)$ jest dystrybuantą uogólnionego rozkładu Pareto, a $F_u(y)$ jest dystrybuantą wartości (strat) ponadprogowych.

Dla potrzeb praktycznych możemy przyjąć $F_u(y) = H_{\xi, \beta}^i(y)$ dla pewnych ustalonych ξ i β oraz odpowiednio dużego u . Wybór u jest w praktyce kompromisem między spełnieniem założeń teoretycznych ($u \rightarrow x_0$), a posiadaniem dostatecznej ilości obserwacji dla estymacji parametrów rozkładu H . Innymi słowy: dla zbyt małych u dopasowanie będzie słabe ze względu na niespełnienie założeń teoretycznych, a dla zbyt dużych u błąd będzie wynikiem posiadania zbyt małej liczby obserwacji dla precyzyjnego wyznaczenia parametrów.

Dla estymacji parametrów rozkładu H , przy uwzględnieniu M obserwacji większych od progów, możemy zastosować MNW. Dla określenia u (M) przydatne mogą być wspomniane wcześniej kryteria, jak na przykład pierwiastek z błędu średniokwadratowego (RMSE), czy też średni błąd absolutny (MAE).

Mając estymatory \hat{u} , $\hat{\beta}$ i $\hat{\xi}$ przekształćmy najpierw odpowiednio wzór (89) otrzymując poniższą zależność:

$$F(x) = [1 - F(u)] \cdot H_{\xi, \beta}^i(x) \cdot F(u) \quad (92)$$

dla $x > u$. Estymator $\hat{F}(u) = (n - M)/n$ otrzymamy korzystając z metody HS. Po podstawieniu estymatorów i uproszczeniu otrzymujemy:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{M}{n} \left[1 + \hat{\xi} \frac{x - \hat{u}}{\hat{\beta}} \right]^{-1/\hat{\xi}} & i = 1, 2 \\ 1 - \frac{M}{n} \exp\left(-\frac{x}{\hat{\beta}}\right) & i = 3 \end{cases} \quad (93)$$

Odwracając powyższą formułę otrzymujemy:

$$\hat{F}^{\leftarrow}(p) = \widehat{VaR}_{EV}(p) = \begin{cases} \hat{u} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left[\frac{n}{M}(1-p) \right]^{\hat{\xi}} - 1 \right) & i = 1, 2 \\ -\hat{\beta} \ln \left[\frac{n}{M}(1-p) \right] & i = 3 \end{cases} \quad (94)$$

Możemy wyznaczyć przedział ufności dla tak otrzymanego estymatora $VaR(p)$ korzystając z opisanej wcześniej techniki profilu wiarygodności.

Ridder [51] cytując za [23] prostszą, bardziej intuicyjną metodę estymacji parametrów H i obliczania VaR_{EV} . Załóżmy najpierw, że dystrybucja wartości ponadprogowych F może być przybliżana przez dystrybucję rozkładu wykładniczego ($H_{\xi, \beta}^3$). Szukamy takich parametrów u i $\beta > 0$, że

$$F_u(y) \approx H_{0, \beta}^3 \left(\frac{x-u}{\beta} \right) = 1 - \exp\left(-\frac{x-u}{\beta}\right) \quad (95)$$

gdzie $x > u$. W przypadku odwrotnej dystrybucyjności mamy

$$VaR(p) = F^{\leftarrow}(p) \approx W_3^{\leftarrow}(p) = u - \beta \ln(1-p)$$

co jest kolejnym przypadkiem modelu z parametrami skali i położenia. Dobierzmy liczbę całkowitą M tak, aby $F(u) < 1 - M/n < p$, gdzie n - wielkość próby. Wówczas mamy

$$F^{\leftarrow}(1 - M/n) \approx u - \beta \ln(M/n)$$

Ponieważ $F^{\leftarrow}(1 - M/n) \approx L_{n-M, n}$, to znając estymator $\hat{\beta}$ możemy otrzymać estymator \hat{u} jako

$$\hat{u} = L_{n-M:n} + \hat{\beta} \ln(M/n), \quad (96)$$

Uwzględniając brak pamięci rozkładu wykładniczego oraz fakt, że β jest wartością oczekiwaną rozkładu, otrzymujemy estymator β jako średnią z wartości statystyk pozycyjnych $L_{m:n}$ dla $m > M$.

$$\hat{\beta} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (L_{n-m+1:n} - L_{n-M:n}) \quad (97)$$

Podstawiając powyższy wynik do (6) i (7), uzyskujemy następujący estymator $VaR(p)$, oparty na częściowym przybliżeniu F przez dystrybuantę wykładniczą

$$\widehat{VaR}_{EXP}(p) = \hat{u} - \hat{\beta} \ln(1-p) \quad (98)$$

Przypadki $i=1$ oraz $i=2$ można rozpatrywać w sposób analogiczny do przypadku $i=3$. Pokażmy to w sytuacji, gdy F przybliżana jest rozkładem Pareto. Niech $M+1$ największych strat będzie dodatnich, tzn. $L_i > 0$ dla $i \geq n-M$. Dystrybuantę Pareto zapiszmy w postaci:

$$W_{1,\xi}(x/c) = 1 - \left(\frac{x}{c}\right)^{-\xi}, \quad x \geq c > 0, \quad \xi > 0,$$

gdzie c oznacza parametr położenia, a ξ - parametr skali. Ponieważ $P\{\ln L_i \leq x\} = P\{L_i \leq \exp(x)\}$, funkcja przybliżająca logarytmy strat będzie miała postać: $1 - \left(e^x/c\right)^{-\xi}$, co redukuje się do $1 - \exp(-\xi(x - \ln c))$. Jak można zauważyć otrzymaliśmy dystrybuantę rozkładu wykładniczego (5) z parametrami $a = 1/\xi$ i $b = \ln c$. Zatem możemy zastosować procedurę dla $i=3$, wstawiając w miejsce strat ich logarytmy. W rezultacie otrzymujemy

$$\widehat{VaR}_{PAR}(p) = \exp(\hat{b} - \hat{a} \ln(1-p)) \quad (99)$$

przy czym

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\ln L_{n-m+1:n} - \ln L_{n-M:n}) \\ \hat{b} &= \ln L_{n-M:n} + \hat{a} \ln(M/n) \end{aligned}$$

Postępując analogicznie w drugim przypadku (tj. w przypadku dystrybuanty Pareto II rodzaju) otrzymujemy:

$$\widehat{VaR}_{PII}(p) = x_0 - \exp\left(-\left[\hat{b} - \hat{a} \ln(1-p)\right]\right) \quad (100)$$

przy czym

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ln(x_0 - L_{n-m+1:n}) \\ \hat{b} &= \ln(x_0 - L_{n-M:n}) - \hat{a} \ln(M/n), \end{aligned}$$

gdzie x_0 oznacza prawostronne ograniczenie F (jak zostało wspomniane, przypadek ten odnosi się do rozkładów ograniczonych). Dokładność aproksymacji ogona dystrybuanty strat, mierzona za pomocą kryteriów RMSE lub MAE, może posłużyć do wyboru najlepszej wartości parametru M .

Falk [23] podaje również twierdzenia pozwalające ocenić prędkość zbieżności aproksymacji. Dla wszystkich przypadków zdefiniujemy $Q^*(p_n) := \hat{u} - \hat{\beta} \ln(1 - p_n)$. Wówczas przedział

$$I_n = \left[Q^* \pm \hat{\beta} \left[\ln^2 \left((1 - p_n) \frac{n}{M} \right) + 1 \right]^{1/2} M^{-1/2} z_{1-\alpha/2} \right] \quad (101)$$

spełnia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \widehat{VaR}(p_n) \in T_i(I_n) \right\} = 1 - \alpha, \quad (102)$$

gdzie $0 < \alpha < 1$, $T_1(x) = e^x$, $T_2 = x_0 - e^x$, $T_3 = x$ oraz $i = 1, 2, 3$, odpowiednio dla 1, 2 i 3 przypadku. Zakłada się przy tym, że $(M/n)^\delta M^{1/2} \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$ oraz $M^{1/2}(1 - p_n)^\delta$ jest ograniczone. $\delta > 0$ kontroluje szybkość aproksymacji prawego ogona. Monotoniczność T_i ($i = 1, 2, 3$) pozwala zbudować przedziały ufności poprzez prostą transformację granic przedziału (11).

7.5. Zmodyfikowana metoda Monte Carlo

Klasyczna metoda Monte Carlo opisana w rozdziale 6.3 pozwala generować scenariusze w oparciu o założenie normalności standaryzowanych log-zwrotów. Jednak jest faktem, że w rzeczywistości zwroty znacznie odbiegają od rozkładu normalnego i można je lepiej opisać korzystając z rozkładów o innej postaci. Opis modelu symulacyjnego opartego o rozkład t-Studenta podają Hosking *et al.* [31]. Ich podejście, przedstawione poniżej, pozwala również na wykorzystanie innych rozkładów.

Do oszacowania właściwej postaci rozkładu brzegowego zastosowano mało formalną technikę wizualną. Analizę oparto na tzw. L-momentach. L-moment rzędu k jest zdefiniowany następująco:

$$L_k = \int_0^1 W_{k-1}(x) F^{\leftarrow}(x) dx, \quad (103)$$

gdzie W_k oznacza wielomian stopnia k . L_1 jest miarą położenia, L_2 miarą dyspersji, $\tau_k = L_k/L_2$ są parametrami kształtu - τ_3 jest analogiem skośności, a τ_4 - kurtozy. L-momenty istnieją dla każdego rozkładu z określoną wartością oczekiwaną, co jest ich dużą zaletą. Aby dokonać wyboru rozkładu analizowano stosunek τ_4 i τ_6 dla danych próbkowych i teoretycznych wartości dla rozpatrywanych rozkładów. Dokonano również analizy za pomocą wykresu Q-Q (kwantyl-kwantyl). Wizualnie najlepsze dopasowanie oferował rozkład t-Studenta.

Aby móc dokonać symulacji dokonano kilka wstępnych kroków. Przekształcono standaryzowane log-zwroty za pomocą transformaty Rosenblatta (opis w rozdziale 9), obliczono współczynniki korelacji liniowej dla przekształconych zwrotów i zbadano (wizualnie) czy struktura zależności odpowiada strukturze implikowanej dla danego współczynnika korelacji w przypadku wielowymiarowego rozkładu normalnego. Ponieważ rozbieżności okazały się

niewielkie, wydaje się, że powyższa procedura zapewni dobrą aproksymację zależności między czynnikami ryzyka.

Po dopasowaniu współczynników rozkładów brzegowych t-Studenta, dokonaniu transformacji i obliczeniu macierzy współczynników korelacji można już zastosować klasyczną metodę Monte Carlo, gdyż uzasadnione jest założenie, że dane pochodzą z wielowymiarowego rozkładu normalnego. Wyniki symulacji należy oczywiście przekształcić za pomocą odwrotnej transformaty Rosenblatta tj. $y = F^{\leftarrow}(\Phi(x))$, zreskalować za pomocą zmienności i dryfu oraz (jeśli to konieczne) dokonać transformacji z log-zwrotu do ceny: $p_{t+1} = p_t \exp(r_{t+1})$. Wyniki weryfikacji i porównanie modelu zostały zamieszczone w rozdziale 9.

7.6. Model CAViaR

Engle i Manganelli [21] zaproponowali alternatywne podejście do estymacji VaR, mianowicie model CAViaR (z ang. *Conditional Autoregressive Value At Risk*), czyli warunkowy autoregresyjny VaR. Punktem wyjścia jest krytyka istniejących metod pośredniego estymowania VaR poprzez badanie rozkładu zwrotów. W przypadku modeli parametrycznych uznają oni za nierealistyczne założenia, że ekstremalne zwroty podążają tym samym procesem, co inne, a standaryzowane zwroty są przynajmniej *i.i.d.* albo wręcz normalne. W historycznej symulacji krytykują fakt, że dla całego okresu przyjętego okna, wszystkie zwroty są równoważne, ale mają zerową wagę dla okresu choćby o dzień dłuższego. Poza tym historyczna symulacja otwarcie przyjmuje niezmienny rozkład zwrotów w ramach przyjętego okresu. Słabością modeli wartości ekstremalnych jest fakt, że przykładowo, często stosowany poziom $p = 0.95$ nie jest w ich przypadku dostatecznie ekstremalny, a nadto bazują one na założeniu *i.i.d.* zwrotów.

Istota CAViaR polega na bezpośrednim modelowaniu kwantyli, w postaci modelu autoregresji. Uzasadnieniem dla takiego podejścia jest fakt skupiania się zmienności, innymi słowy - jej autokorelacji. Ponieważ VaR zależy od odchylenia standardowego, jest wysoce prawdopodobne, że również wykazuje autokorelację. Ogólne sformułowanie modelu $CAViaR(p, q)$ jest następujące:

$$VaR_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i VaR_{t-i} + l(\beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}; \Omega_{t-1}) \quad (104)$$

gdzie Ω_{t-1} określa informację dostępną w momencie t . Zapiszmy jeszcze najbardziej typowe w praktyce sformułowanie, czyli $CAViaR(1, 1)$:

$$VaR_t = \beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1} + l(\beta_2, y_{t-1}, VaR_{t-1}) \quad (105)$$

Autoregresyjny człon $\beta_1 VaR_{t-1}$ zapewnia gładkość zmian, natomiast $l(\beta_2, y_{t-1}, VaR_{t-1})$ mierzy, o ile VaR powinien się zmienić pod wpływem nowej informacji w y_{t-1} . Można przykładowo przypuszczać, że kiepski dzień zwiększy prawdopodobieństwo wystąpienia kolejnego złego dnia. Engle i Mangelli rozważają w swojej pracy 6 przykładowych modeli przedstawionych poniżej:

1. **Adaptacyjny.** $Var_t = Var_{t-1} + \beta_1 [I(y_{t-1} \leq -Var_{t-1}) - p]^{25}$.
2. **Proporcjonalnie adaptacyjny, symetryczny.**
 $Var_t = Var_{t-1} + \beta_1 (|y_{t-1}| - Var_{t-1})^+ - \beta_2 (|y_{t-1}| - Var_{t-1})^-$ ²⁶.
3. **Symetryczny wartości bezwzględnej.** $Var_t = \beta_0 + \beta_1 Var_{t-1} + \beta_2 |y_{t-1}|$.
4. **Asymetryczny wartości bezwzględnej.** $Var_t = \beta_0 + \beta_1 Var_{t-1} + \beta_2 |y_{t-1} - \beta_3|$.
5. **Asymetryczny nachylenia.** $Var_t = \beta_0 + \beta_1 Var_{t-1} + \beta_2 (y_{t-1})^+ - \beta_3 (y_{t-1})^-$.
6. **Pośredni GARCH(1,1).** $Var_t = (\beta_0 + \beta_1 Var_{t-1} + \beta_2 y_{t-1}^2)^{1/2}$.

Oczywiście, powyższe przykłady nie wyczerpują wszystkich możliwości. Ostatni model jest prawdziwy, jeśli dane generowane byłyby zgodnie z procesem GARCH(1,1). Oczywiście, gdyby taka specyfikacja była prawidłowa, należałoby raczej oszacować GARCH(1,1) za pomocą MNW i następnie obliczyć VaR. Użyteczność pośredniego GARCH dotyczy symulacji i testowania.

W przypadku danych z próby można określić p-kwantyl z próby T-elementowej jako rozwiązanie następującego problemu minimalizacji:

$$\min_b \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t: y_t \geq b} p |y_t - b| + \sum_{t: y_t < b} (1-p) |y_t - b| \right\} \quad (106)$$

Niech będzie dany model regresji kwantylowej: $y_t = x_t' \beta + u_t$, gdzie y_t oznacza p-kwantyl zmiennej losowej Y. Uogólniając powyższy zapis, [35] definiują p-kwantyl regresyjny jako wektor $\hat{\beta}$ będący rozwiązaniem poniższego problemu:

$$\min_{\beta} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t: y_t \geq x_t' \beta} p |y_t - x_t' \beta| + \sum_{t: y_t < x_t' \beta} (1-p) |y_t - x_t' \beta| \right\} \quad (107)$$

Wprowadzając do powyższego zapisu funkcję wskaźnikową otrzymujemy równoważną funkcję celu:

$$\frac{1}{T} \left\{ - \sum_t [I(y < x_t' \beta) - p] [y_t - x_t' \beta] \right\} \quad (108)$$

Biorąc pod uwagę postać (5) oraz przyjęte funkcje regresji, estymator $\hat{\beta}$ otrzymamy korzystając z metody najmniejszych odchyłeń absolutnych (MNOA). Engle i Manganelli modyfikują dla potrzeb regresji kwantylowej wyniki uzyskane w innych pracach, a dotyczące estymatorów MNOA. Tak więc, przy spełnieniu określonych założeń, $\hat{\beta}$ są zgodnymi i asymptotycznie normalnymi estymatorami β . W [21] podane są również wersje testów Walda i mnożnika Lagrange'a dla estymatorów parametrów regresji kwantylowej uzyskanych MNOA. Pozwala to na testowanie istotności nakładanych na model ograniczeń i właściwej jego specyfikacji.

²⁵ Funkcja wskaźnikowa $I(\text{wyrażenie})$ zwraca 1, jeśli wyrażenie jest prawdziwe i 0 w przeciwnym wypadku.

²⁶ Przyjęto następujące oznaczenia: $(x)^+ = \max(x, 0)$ i $(x)^- = \min(x, 0)$.

Ze względu na nieróżniczkowalność (5) do znalezienia $\hat{\beta}$ można zastosować metody genetycznej optymalizacji. Algorytmy genetyczne pozwalają na znalezienie globalnych optimów nawet przy bardzo skomplikowanych problemach. Engle i Manganelli zastosowali metodę Różnicowego Ewolucyjnego Algorytmu Genetycznego [REAG, ang. *Differential Evolutionary Genetic Algorithm* (DEGA)]. Poniżej zaprezentowany jest zarys tej metody.

Przebieg optymalizacji w REAG determinowany jest przez 3 czynniki: rozmiar populacji (RP), parametr rekombinacji (ang. *crossover*, stąd: CR) i parametr mutacji (F). Załóżmy, że mamy zmaksymalizować funkcję z D parametrami. REAG rozpoczyna się od wygenerowania RP losowych D-wymiarowych wektorów z przedziału zadanego przez użytkownika i obliczeniu funkcji celu dla tych wartości początkowych. Parametry i obliczone wartości są przechowywane w $NP \times D + 1$ wymiarowej macierzy populacji celowej (ang. *target population*). Następne pokolenie generowane jest w 3 następujących krokach:

1. Tworzona jest $NP \times D + 1$ wymiarowa macierz populacji próbnej.
2. Siła, dopasowanie (ang. *fitness*) członków populacji próbnej jest porównywane z odpowiednimi członkami populacji celowej.
3. Najsilniejsze wektory przeżywają i stają się nową populacją celową.

Cechą charakterystyczną jest tworzenie populacji próbnej. Każdy nowy wektor ma dwóch rodziców P_1 i P_2 . P_1 to odpowiedni wektor z populacji celowej. P_2 tworzony jest według zasady: $P_2 = T_1 + F(T_2 - T_3)$, gdzie $T_i, i = 1, 2, 3$ to wektory wylosowane z populacji celowej, a F to parametr mutacji. Następnie generowane jest D liczb losowych z rozkładu jednostajnego $[0, 1]$. Jeśli k-ta ($k = 1, \dots, D$) liczba jest większa od parametru CR, to k-ta cecha jest dziedziczona od pierwszego rodzica, jeśli mniejsza - od drugiego.

8

Model VaR na przykładzie systemu Risk Metrics

*RiskMetrics*TM jest praktycznym przykładem modelowania VaR. Na rozważany system składa się metodologia, dane na temat setek instrumentów na całym świecie i oprogramowanie pozwalające na obliczanie VaR w zgodzie ze wspomnianą metodologią i z wykorzystaniem oferowanych danych. Jest to system uważany za swego rodzaju standard w zakresie modelowania VaR i dlatego znakomicie nadaje się do przedstawienia praktycznych aspektów powyższych rozważań teoretycznych.

Podstawowy model kalkulacji VaR stosowany w *RiskMetrics*TM oparty jest założeniu, że zwroty generowane są w heteroskedastycznym, geometrycznym ruchu Browna. Dalej zakłada się, że wariancja procesu ceny zmienia się zgodnie z pewną odmianą procesu GARCH. Jak widać, jest to zmodyfikowana metoda wariancji-kowariancji, gdyż przyjmuje się normalność wystandaryzowanych względem warunkowej wariancji log-zwrotów.

Dla przypomnienia, w ogólnej postaci model GARCH (p, q) przedstawia się następująco

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (109)$$

$$h_t = c_0 + \sum_{i=1}^q c_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i h_{t-i} \quad (110)$$

W *RiskMetrics*TM kalkuluje się h_t jako wykładniczą średnią ruchomą kwadratów obserwacji (EWMA - ang. *Exponentially Weighted Moving Average*), co można zapisać jako:

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (111)$$

$$h_t = (1-b)y_{t-1}^2 + bh_{t-1}, \quad (112)$$

gdzie $b < 1$.

Dla potrzeb *RiskMetrics*TM, b w powyższym zapisie oznacza się jako λ , a zamiast y_t mamy log-zwroty oznaczone jako r_t . Dla danych dziennych $\lambda = 0.94$, a dla danych tygodniowych $\lambda = 0.97$. Oznacza to, że w praktyce wykorzystuje się odpowiednio 74 i 151 ostatnich obserwacji (przy poziomie tolerancji 1%)²⁷. Formuła pozwalająca obliczyć liczbę efektywnie (przy poziomie tolerancji γ) branych pod uwagę dni ma postać: $K = \ln \gamma / \ln \lambda$. Analogicznie wyznaczane są kowariancje pomiędzy log-zwrotami z różnych czynników ryzyka, mianowicie: $\sigma_{12,t}^2 = \lambda \sigma_{12,t-1}^2 + (1-\lambda)r_{1t}r_{2t}$.

Dla uproszczenia przyjmuje się, że wektor wartości oczekiwanych zwrotów z czynników ryzyka jest równy zeru. Wynika to z zanedbywalnie małego wpływu dryfu na wartość VaR, zwłaszcza dla krótkich okresów. W rezultacie wariancja zwrotów dana jest przez średnią z kwadratów zwrotów (zwaną inaczej *innowacjami*).

²⁷ Czyli obserwacje te mają łącznie wagę 0.99

Procedura doboru optymalnego λ oparta jest na powszechnie znanym wśród statystyków kryterium pierwiastka ze średniokwadratowego błędu predykcji. Innymi słowy, szuka się λ takiego, by zminimalizować wyrażenie

$$\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t^2 - \hat{\sigma}^2(\lambda))^2}, \quad (113)$$

gdzie $\hat{\sigma}^2(\lambda)$ jest prognozą wariancji (czyli r_t^2) na moment t zależną od wartości λ . W ten sposób znajduje się optymalny współczynnik λ dla i -tej serii danych oznaczony przez λ_i^* oraz odpowiadający mu błąd τ_i^* . Aby znaleźć optymalne λ dla wszystkich N serii zastosowano średnią ważoną według następującego wzoru:

$$\lambda_{opt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau_i^*}{\sum_{j=1}^N \tau_j^*} \times \lambda_i^* \right), \quad (114)$$

w którym wagami dla poszczególnych λ_i^* są wielkości błędów τ_i^* .

W *RiskMetrics*TM stosowane są, wcześniej już opisane, sposoby mapowania przepływów pieniężnych i uwzględniania różnic czasowych przy wyznaczaniu korelacji między czynnikami ryzyka. Dla potrzeb portfeli zawierających instrumenty pochodne stosuje się bądź to metodę opisaną w 7.3, bądź technikę Monte Carlo (pot. rozdział 6.3).

8.1. Rozwinięcia modelu

Przedstawiony powyżej system *RiskMetrics*TM nie oddaje w pełni charakterystyk danych finansowych przedstawionych w rozdziale 2. W tablicy 6 zostały przedstawione parametry empirycznych rozkładów wystandaryzowanych względem warunkowych wariancji log-zwrotów. Zostały one oparte na obserwacjach kursów wymiany walut kilku krajów dla danych obejmujących 86 tygodni. Widać, że przyjęte założenia modelu nie odzwierciedlają dobrze rzeczywistości, gdyż standaryzowane zwroty nadal wykazują grube ogony (kurtozę) i skośność. Zajmijmy się zatem dwoma modyfikacjami, które pozwalają lepiej od pierwotnego modelu modelować zjawisko grubych ogonów. Przy okazji stanowią one dobry przykład dwóch bardziej zaawansowanych technik modelowania VaR.

Tablica 6. Parametry zwrotów dla kursów wymiany

Kraj	Skośność	Kurtoza
Australia	0.314	3.397
Portugalia	1.747	0.533
Chile	1.049	0.512
Czechy	0.167	12.516
Filipiny	1.654	0.494
Rozkład normalny	0.000	3.000

Źródło: [34], s.230-231

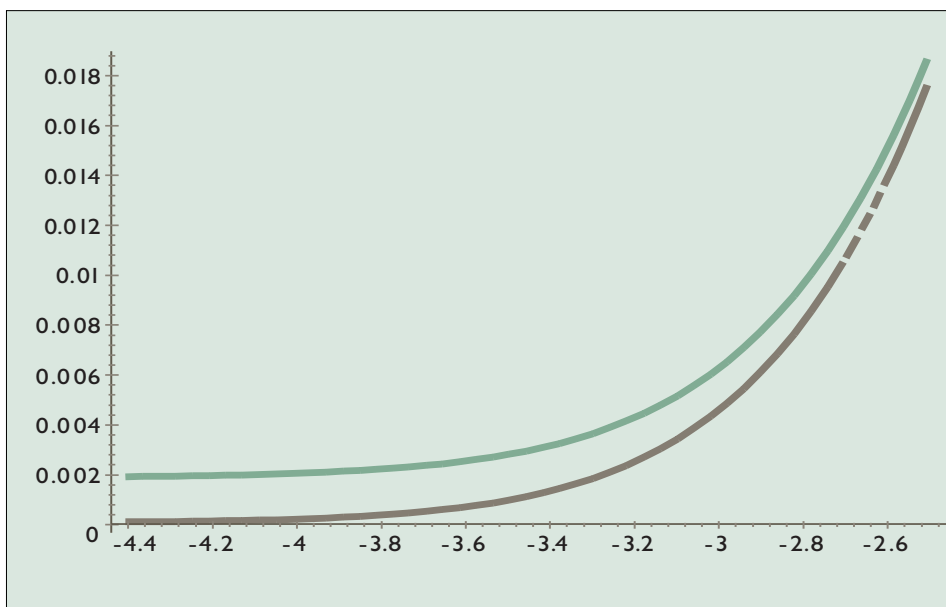
8.1.1. Mieszany rozkład normalny (jump-diffusion model)

Do rozkładów stosowanych przy modelowaniu rozkładów zwrotów, zalicza się mieszany rozkład normalny. Dla potrzeb *RiskMetrics*TM zastosowano rozkład dwupunktowy jako rozkład mieszający. Oznacza to, że standaryzowane log-zwroty mają funkcję gęstości prawdopodobieństwa daną przez:

$$f(r) = p_x \cdot f_N(\mu_1, \sigma_1) + (1 - p_x) \cdot f_N(\mu_2, \sigma_2), \quad (115)$$

gdzie przez $f_N(\mu, \sigma)$ oznaczono gęstość rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ . Taka metoda pozwala uzyskiwać grubsze ogony rozkładów. Poniższy rysunek ilustruje różnicę. Linia niebieską oznaczono lewy ogon rozkładu $N[0,1]$, a linią czerwoną - rozkładu mieszanego z parametrami $p_x = 0.95$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$ i $\sigma_2 = 10$.

Rys. 8. Ogony rozkładów: normalnego i mieszanego normalnego



Dokładny opis modelu można znaleźć w [1], poniżej zaprezentowane zostały główne jego elementy. Zapiszmy najpierw powyższy model w innej formie: $r_t = \phi n + (1 - \phi)\beta_t$, gdzie $n \sim N[\mu_n, \sigma_n]$, $\beta \sim N[\mu_\beta, \xi]$, ϕ ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem p_x , a r_t oznacza zwrot z czynnika ryzyka w momencie t . Intuicyjnie można interpretować powyższy model następująco: w większości wypadków zwroty losowane są zgodnie z rozkładem normalnym $N[\mu_n, \sigma_n]$. Jednak okazjonalnie może zdarzyć się coś niezwykłego (np. krach giełdowy) powodującego znaczący wzrost (skok) wariancji zwrotów. Przyjmujemy, że taki zwrot (zwroty) losowany jest z innego rozkładu normalnego o dużo większej wariancji. Tak więc warunkowo względem ϕ zachowana zostaje normalność log-zwrotów, co znacząco upraszcza obliczenia.

Aby móc zastosować powyższy model w praktyce, należy dokonać estymacji nieznanych parametrów p_x, σ_n i ξ , zakładając w dalszym rozumowaniu $\mu_n = \mu_\beta = 0$. Niestety, nie możemy zastosować klasycznej metody największej wiarygodności (MNW), gdyż w ogólnym przypadku nie istnieje globalne maksimum funkcji wiarygodności [52]. Prowadzi to do niestabilności rozwiązań, braku zbieżności algorytmów optymalizujących i optimum lokalnych. W literaturze istnieją co najmniej dwie propozycje rozwiązania problemu: podejście bayesowskie oraz quasi-bayesowska metoda największej wiarygodności.

W ramach podejścia bayesowskiego pierwszym krokiem jest zdefiniowanie rozkładów *a priori* poszczególnych parametrów. Z reguły dobiera je się tak, aby wynikający rozkład *a posteriori* miał tę samą postać (przy określonych założeniach). Dla wariancji tzw. rozkładem sprzężonym (por. [14]) jest odwrotny rozkład chi-kwadrat, co możemy zapisać następująco $\sigma_n^2 \chi_v^{-2}$. Wartość oczekiwana rozkładu χ_v^{-2} wynosi $1/(v-2)$, zatem aby pozostać w zgodzie z założeniem, że standaryzowane zwroty mają wariancję 1, niech $\sigma_n^2 \sim \lambda v \chi^{-2}$, gdzie λ - pewna stała normalizująca. β_i ma normalny rozkład *a priori*, $\beta_i \sim N[0, \xi]$. Rozkładem sprzężonym dla parametru p_x w rozkładzie zero-jedynkowym jest rozkład beta, tzn. $p_x \sim B(\gamma_1, \gamma_2)$. Parametry dobieramy mając na uwadze, że wartość oczekiwana dla $B(\gamma_1, \gamma_2)$ wynosi $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Parametry rozkładów *a priori* ustalamy na podstawie naszych przekonań, informacji spoza próby i otrzymanych w poprzednich badaniach rozkładów *a posteriori*.

Następnym krokiem jest uzyskanie tzw. warunkowych rozkładów *a posteriori* dla poszczególnych parametrów. Stosuje się tutaj klasyczne metody „nakładania” danych z próby na nasze przekonania *a priori* dotyczące rozkładu estymowanych parametrów. Zatem, gdy $\phi = 0$ to $\beta \sim N[0, \xi]$. Gdy $\phi = 1$, wówczas $\beta_i \sim N[\mu_i, \sigma_\beta^2]$, gdzie $\mu_i = (r_i \xi^2)/(\xi^2 + \sigma_n^2)$, $\sigma_\beta^2 = \sigma_n^2 \xi^2/(\xi^2 + \sigma_n^2)$, przy czym $\sigma_n^2 \sim [v\lambda + \hat{s}^2] \cdot \chi_{v+T}^{-2}$ i $\hat{s}^2 = \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2$, \bar{r} - średnia z próby. Analogiczne wzory dla ϕ i p_x można znaleźć w [1].

W klasycznym wnioskowaniu bayesowskim, następnym krokiem jest uzyskanie łącznego rozkładu *a posteriori* szukanych parametrów. Przykładowo, dla zmiennej o rozkładzie normalnym z nieznaną wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym, szukany rozkładem jest rozkład T^2 Hotellinga. Ponieważ jednak w naszym przypadku analityczna postać łącznego rozkładu parametrów β, σ_n^2 i p_x jest bardzo skomplikowana, to mając warunkowe rozkłady *a posteriori* stosujemy tzw. **sampler (generator) Gibbsa**. Jest to kolejny przykład wpływu technik komputerowych na rozwój statystyki. Sampler Gibbsa jest algorytmem wywodzącym się z tzw. *Markow Chain Monte Carlo methods*, czyli symulowanych łańcuchów Markowa.

Załóżmy, że dany mamy zestaw zmiennych $X = (X_1, \dots, X_N)$ o łącznym rozkładzie $f(X_1, \dots, X_N)$. Zakłada się, że łączny rozkład jest jednoznacznie określony przez rozkłady warunkowe $f(X_i) = f(X_i | X_j; i \neq j) i = 1, \dots, N$ i że możliwe jest losowanie z tych rozkładów warunkowych. Wówczas mając dany arbitralny zestaw wartości początkowych $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$, losujemy kolejno $x_i^{(1)}$ z rozkładów warunkowych $f(x_i | x_j^{(0)}; i \neq j)$ i uzyskujemy po N krokach $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_N^{(1)})$, co jest końcem pierwszej iteracji algorytmu.

Można pokazać, że dla dostatecznie dużego A , $x^{(A)}$ jest wylosowany z $f(X_1, \dots, X_N)$. Tak więc przykładowo, można dokonać 1500 iteracji algorytmu, wykorzystując jedynie 500 ostatnich wyników do wnioskowania.

Generator Gibbsa pozwala uzyskać nam uzyskać łączny rozkład *a posteriori* parametrów jedynie na podstawie wcześniej wyprowadzonych warunkowych rozkładów *a posteriori*. Mając łączny rozkład można oczywiście uzyskać rozkłady brzegowe, przy czym w dalszych obliczeniach jako ocenę parametru stosuje się medianę lub wartość oczekiwaną takiego rozkładu. Rys. 9 pokazuje przykładowy rozkład brzegowy dla β_t . Interpretując taki wykres, można powiedzieć, że opisywany model nadal nie oddaje w pełni własności zwrotów, gdyż wykres ten dalece odbiega od zakładanego *a priori* rozkładu normalnego.

Rys. 9. Brzegowy rozkład *a posteriori* zwrotów na przykładzie cen złota



Powyższą skomplikowaną procedurę zaprezentowałem głównie w celu pokazania możliwości metod symulacyjnych w rozwiązaniu różnego rodzaju problemów. Dużo prostszą metodę estymacji rozważanego modelu opisuje [52]. Przytacza on zaproponowany w [27] estymator wyznaczony przez maksymalizację następującej zmodyfikowanej funkcji wiarygodności:

$$L = \sum_t \log \left[\frac{p_x}{\sigma_n} \exp\left(-\frac{(R_t - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\right) + \frac{1-p_x}{\sigma_\beta} \exp\left(-\frac{(R_t - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \right] - \quad (116)$$

$$-\frac{a_n}{2} \log(\sigma_n^2) - \frac{a_\beta}{2} \log(\sigma_\beta^2) - \frac{b_n}{\sigma_n} - \frac{b_\beta}{\sigma_\beta} - \frac{c_n(m_n - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{c_\beta(m_\beta - \mu_\beta)^2}{2\sigma_\beta^2},$$

przy założeniu, że $n \sim N[\mu_n, \sigma_n]$, $\beta \sim N[\mu_\beta, \sigma_\beta]$. Nieujemne parametry $a_n, a_\beta, b_n, b_\beta, c_n, c_\beta, m_n, m_\beta$ odzwierciedlają poglądy *a priori*, co do wartości estymowanych parametrów. Przykładowe wartości parametrów podaje [52]: $a_n = a_\beta = b_n = b_\beta = 0.2$, $c_n = c_\beta = 0.1$ i $m_n = m_\beta = 0$. Oczywiście dla uproszczenia można założyć $\mu_n = \mu_\beta = 0$ i konsekwentnie usunąć dwa ostatnie człony z funkcji (116). Można interpretować taki estymator jako pewną analogię estymatora bayesowskiego lub estymator otrzymany MNW z funkcją kary.

Ostatnią kwestią pozostaje uogólnienie modelu na portfel M otwartych pozycji finansowych zmapowanych względem m monitorowanych czynników ryzyka. Głównym problemem jest tutaj kwestia niezależności zmiennych ϕ_i i β_i dla zwrotów z poszczególnych czynników ryzyka $r_i, i=1, \dots, m$. Zgodnie z wynikami badań [1], można przyjąć niezależność zmiennych ϕ_i i β_i . Wpływ przyjęcia innych założeń jest niewielki, poza tym powoduje wzrost złożoności obliczeniowej, a co więcej, założenie niezależności zdaje się prowadzić do dokładniejszych wyników dla większych p . Przyjmujemy dla uproszczenia $\mu_n = \mu_\beta = 0$. Zgodnie z powyższymi założeniami i wprowadzonymi oznaczeniami, $VaR(p)$ dla portfela można przedstawić w postaci:

$$VaR(p) = \left(\sqrt{w_\beta \Sigma_\beta w_\beta^T} + \sqrt{w_n \Sigma_n w_n^T} \right) \Phi^{\leftarrow}(p) \quad (117)$$

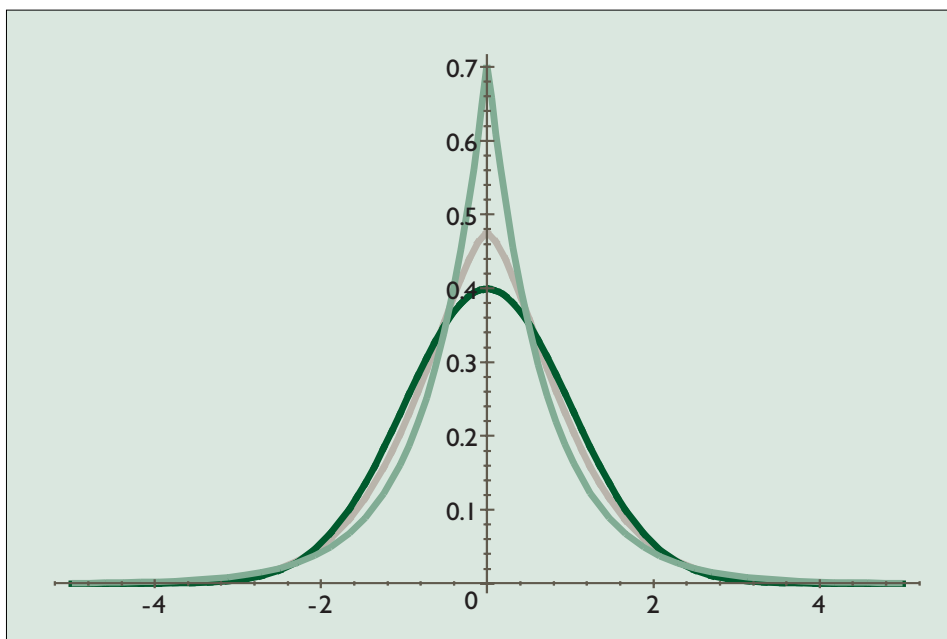
gdzie Σ_n, Σ_β mają na przekątnej odpowiednio σ_n^2 i σ_β^2 , a poza przekątną zwykle kowariancje między zwrotami z poszczególnych czynników ryzyka, $w_{\beta,i} = \omega_i(1 - p_{x,i})\delta_i(r_i)$, a $w_{n,i} = \omega_i p_{x,i}\delta_i(r_i)$, przy czym ω_i oznacza udział i -tego czynnika ryzyka w portfelu, a $\delta_i(r)$ - pochodną funkcji wyceniającej względem i -tego czynnika ryzyka.

Zgodnie z powyższym modelem można również przeprowadzać estymację VaR za pomocą metody symulacyjnej.

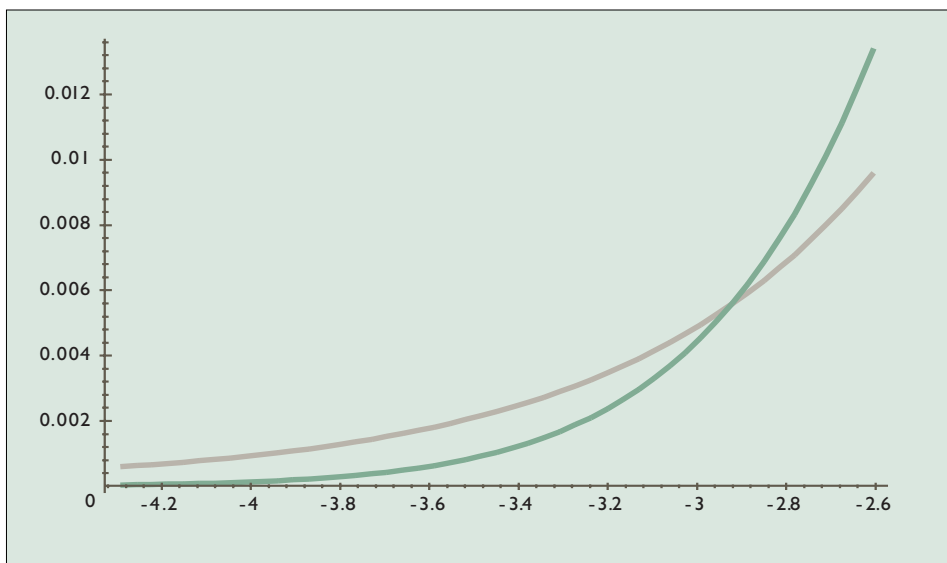
8.1.2. Rozkład GED

Powyższy paragraf stanowi silny argument przeciwko postępowaniu się rozkładem normalnym dla prognozowania VaR. Po pierwsze, stopniowo traci na sile argument prostoty obliczeniowej związanej z rozkładem normalnym. Co prawda, za cenę paru założeń udało się uratować prostą formę końcową, tym niemniej obliczanie parametrów modelu nie należy do łatwych. W ramach *RiskMetricsTM* wartości σ_β^2, p_x i μ_β są obliczane jedynie raz na miesiąc, a we wzorze (1) zamiast σ_n^2 podstawia się kalkulowane dziennie σ^2 , zgodnie z opisem w rozdziale 8. Po drugie, nawet za cenę wprowadzanych komplikacji, nadal nie udaje się zbudować w pełni poprawnego modelu rzeczywistości, o czym świadczy rys. 9.

Rys. 10. Rozkład GED dla $\nu=1$, $\nu=1.5$ i $\nu=2$ (odpowiednio linia j. zielona, szara, c. zielona)



Rys. 11. Ogony rozkładu normalnego i GED dla $\nu = 1$



Wydaje się zatem uzasadnione, pozostając w kręgu modeli parametrycznych, odejście od rozkładu normalnego na rzecz bardziej elastycznych funkcji gęstości. Jako podstawę dla rozszerzenia modelu, przyjęto w *RiskMetrics*TM tzw. **uogólniony rozkład błędów** (ang. *Generalized Error Distribution* - GED). Jego funkcja gęstości jest dana przez:

$$f(x) = \frac{\nu}{\lambda 2^{(1+\nu^{-1})} \Gamma(\nu^{-1})} \exp\left(-\frac{|x/\lambda|^\nu}{2}\right) \quad (118)$$

gdzie

$$\lambda = \sqrt{\frac{\nu \Gamma(\nu^{-1})}{3}} 2^{-\frac{1}{\nu}} \quad (119)$$

GED jest rozkładem symetrycznym, z parametrem ν określającym kształt. Dla $\nu = 2$ mamy rozkład normalny, $\nu < 2$ daje w efekcie wzrost kurtozy, a $\nu > 2$ - spadek w stosunku do rozkładu normalnego, co ilustruje rys. 10. Dodatkowo, na rys. 11 porównano grubość ogonów rozkładów normalnego i GED dla $\nu = 1$. Jak widać, GED pozwala lepiej aproksymować zjawisko „grubych ogonów” (kurtozy zwrotów).

Weryfikacja i ocena modeli

Jak zostało to przedstawione, istnieje wiele możliwości specyfikacji modelu VaR. Tym istotniejszą kwestią staje się weryfikacja jakości prognoz VaR²⁸. W literaturze podawanych jest wiele sposobów oceny otrzymywanych wyników. Tym niemniej okazuje się, że łatwiej jest sformułować model, niż następnie sprawdzić jego niezawodność. Problemem jest fakt, że testy statystyczne wymagają danych, a dla $VaR(0.99)$ rocznie należy przewidywać jedynie 2-3 obserwacje zwrotów większych od VaR. Tak więc testy VaR będą miały niewielką moc (zdolność do odrzucania fałszywych hipotez).

Naturalną miarą jest odsetek okresów, w których straty przekroczyły prognozowany VaR. I tak BIS ustalił trzy strefy jakości dla $VaR(0.99)$, bazując na liczbie przekroczeń 1-dniowego $VaR(0.99)$ obserwowanej w ciągu ostatnich 250 dni. Tablica 7 przedstawia zarys tego systemu weryfikacji. $1-\alpha$ wyznacza prawdopodobieństwo, że prawidłowo wyspecyfikowany model wygenerował daną lub mniejszą liczbę przekroczeń. Prawdopodobieństwo to można wyznaczyć, korzystając z faktu, że w przypadku prawidłowo wyspecyfikowanego modelu, obserwowana częstość naruszeń ma rozkład dwumianowy $B(n, 1-p)$, gdzie n oznacza liczbę obserwacji, p jest poziomem istotności dla VaR.

Tablica 7. Definicja stref jakości modelu VaR

Strefa	Liczba przekroczeń	Zwiększenie mnożnika	α
Zielona	0	0	8,11%
	1	0	28,59%
	2	0	54,32%
	3	0	75,81%
	4	0	89,22%
Żółta	5	0.4	95,88%
	6	0.5	98,63%
	7	0.65	99,60%
	8	0.75	99,89%
	9	0.85	99,97%
Czerwona	10 i więcej	1	99,99%

Źródło: [6], str.15.

Oczywiście, strefy wyznaczone przez BIS zostały ustalone *ad hoc* i najprawdopodobniej nie są optymalnym systemem kontroli jakości. Po pierwsze jest dyskusyjne, czy system, w którym bank z jak najbardziej prawidłowo wyspecyfikowanym modelem podlega karze, średnio biorąc, raz na 10 lat, jest sprawiedliwy. Po drugie, powyższy test ma ograniczoną moc, co jest wynikiem zarówno przyjęcia wysokiego p , jak i rozpatrywania tylko 250 ostatnich obserwacji. Przykładowo, w przypadku modelu wyspecyfikowanego dla $p = 0.97$ ²⁹ bank z prawdopodobieństwem 12,8% zostanie zaliczony do strefy zielonej. Lepsze wyniki może przynieść obniżenie p lub wydłużenie okresu weryfikacji. Jorion [33] rozważa wpływ zmiany poziomu ufności dla VaR (p) z 0,99 na 0,95. Takie zmniejszenie p pozwala na zwiększenie mocy testu o 5,4%, przy jednoczesnym wzroście prawdopodobieństwa błędu I rodzaju o 1,7%.

²⁸ W żargonie zarządzających ryzykiem procedury weryfikacji modelu VaR określa się jako *backtesting*.

²⁹ Co odpowiada (przy założeniu normalnego rozkładu strat) obniżeniu wymaganego kapitału o ok. 25%.

Jak widać, jakość kontroli wzrasta, ale raczej nieznacznie w porównaniu z pierwotnym rozwiązaniem.

Kolejnym problemem jest całkowite pominięcie kwestii warunkowej poprawności modelu. Prawidłowo wyspecyfikowany model powinien spełniać warunek:

$$P(r_t > VaR_t | \Phi_{t-1}) = p \quad (120)$$

gdzie Φ_{t-1} oznacza zasób informacji w momencie $t-1$. Innymi słowy nie podlega sprawdzeniu niezależność przekroczeń. Jest to ważne kryterium, gdyż skupianie się przekroczeń powoduje wzrost ryzyka instytucji (kumulacja strat).

Berkowitz [7] przedstawia sposób weryfikacji modelu oparty na pełnej prognozowanej P&L dystrybucji. Korzystając z transformacji Rosenblatta, zdefiniujmy:

$$x_t = \int_{-\infty}^{y_t} \hat{f}(u) du = \hat{F}(y_t), \quad (121)$$

gdzie y_t oznacza realizację *ex post* straty/zysku, $\hat{f}(u)$ jest prognozowaną funkcją gęstości strat, a $\hat{F}(y_t)$ oznacza wartość prognozowanej P&L dystrybuanty dla zwrotu y_t . Rosenblatt dowiódł dla przypadku ogólnego, że jeśli $\hat{f} = f$, gdzie f oznacza prawdziwą funkcję gęstości zwrotów (strat), to x_t są *i.i.d.* i mają rozkład jednostajny na $[0,1]$, $x_t \sim U_{[0,1]}$, $g(x_t) = f(y_t) / \hat{f}(y_t) = 1$. Zgodnie z twierdzeniem podanym w 6.3, jeśli prawdziwa jest hipoteza $\hat{f} = f$, to zmienne $z_t = \Phi^{\leftarrow}(x_t)$ są również *i.i.d.* i $z_t \sim N[0,1]$. Taka sprytna transformacja pozwala nam na przekształcanie zmiennej o dowolnym, znanym rozkładzie w zmienną o innym dowolnym, ale znanym rozkładzie (tzn. ze znaną odwrotną dystrybuantą) - a w danym przypadku na wykorzystanie metod dla rozkładów normalnych.

Przykładowo, można sprawdzić wartość oczekiwaną, wariancję i autokorelację I rzędu (niezależność) z_t . Zapiszmy następujący model AR(1):

$$z_t - \mu = \rho(z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (122)$$

i niech hipotezą zerową będzie $\rho = \mu = 0$ i $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 = 1$. Łącznym testem dla tych warunków ograniczających może być szeroko znany test ilorazu wiarygodności (ang. *Likelihood Ratio* - LR), który przybierze w naszym przypadku następującą postać:

$$LR = -2 \left[L(0,1,0) - L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}) \right], \quad (123)$$

gdzie $L(0,1,0)$ oznacza wartość funkcji wiarygodności dla AR(1) przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, a $L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho})$ jest wartością dla estymatorów parametrów z próby. Statystyka testu ma asymptotyczny rozkład χ^2 z 3 stopniami swobody. Funkcja wiarygodności dla AR(1) ma postać:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{[z_1 - \mu / (1-\rho)]^2}{2\sigma^2 / (1-\rho^2)} - \\ & - \frac{T-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{T-1}{2} \ln(\sigma^2) - \sum_{t=2}^T \left(\frac{(z_t - \mu - \rho z_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (124)$$

Poza częstością z jaką występują straty większe od VaR, ważnym parametrem modelu jest prawidłowe określenie rozmiaru tych naruszeń. Berkowitz udowadnia intuicyjną zależność: jeśli estymowana P&L gęstość nie oddaje w pełni własności grubych ogonów, to rozkład z_t będzie miał ogony grubsze niż rozkład normalny. Aby przetestować odchylenie od rozkładu normalnego w dla $y_t < VaR$, można zastosować poniższy test LR. Weźmy obcięty rozkład normalny dla $y_t < VaR$. Wówczas funkcja wiarygodności dla oceny parametrów takiego obciętego rozkładu ma postać:

$$l = -\frac{T}{2} \left[\ln(2\pi) + \ln(\sigma^2) \right] - \sum_{i: y_i < VaR} \left(\frac{y_i - \mu}{2\sigma^2} \right)^2 + \sum_{i: y_i > VaR} \ln \Phi \left(\frac{VaR - \mu}{\sigma} \right) \quad (125)$$

gdzie μ i σ^2 oznaczają średnią i wariancję dla rozkładu obciętego. Jak zwykle, mamy:

$$LR = -2 \left[L(\mu, \sigma^2) - L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \right]; LR \underset{a}{\sim} \chi^2_2 \quad (126)$$

Dodatkowo można również sprawdzać, czy odrzucenie modelu wynika z niewłaściwego określenia rozkładu zwrotów z czynników ryzyka, czy też jest związane z błędnym modelem wyceny. W tym celu należy obliczyć $y_t^* = p(r_t)$ $t=1, \dots, T$, gdzie r_t oznaczają historyczne (zrealizowane) zwroty z czynników ryzyka, a $p(\cdot)$ jest funkcją wyceniającą zgodną z przyjętym modelem. Jak poprzednio dokonujemy transformacji y_t^* i otrzymujemy wektor zmiennych z_t^* , które przy założeniu właściwej postaci rozkładów zwrotów z czynników ryzyka są *i.i.d.* z rozkładem $N[0,1]$. Możemy zatem przeprowadzić test analogiczny, jak w przypadku z_t . Jeśli odrzucimy model w tym teście, oznacza to błędną specyfikację rozkładu. Jeśli zaś odrzuciliśmy model zgodnie z (2), ale nie mamy podstaw do odrzucenia w przypadku z_t^* , możemy podejrzewać, że wybraliśmy istotnie błędny model wyceny.

Zgodnie z wynikami symulacji zamieszczonymi w [7], testy oparte na iloczynie wiarygodności i pełnej P&L dystrybucie mają znacznie większą moc niż testy skupiające się jedynie na liczbie naruszeń VaR.

Jeśli model jest prawidłowo sformułowany, $P(y_t < -VaR_t(p)) = 1 - p$, $\forall t$. Równoważnym sformułowaniem jest żądanie, aby ciąg $\{I(y_t < -VaR_t)\}_{t=1}^T$ był *i.i.d.* Engle i Manganeli [21] krytykują klasyczne testy niezależności i przedstawiają nowy test jakości modelu. Wprowadźmy funkcję $Hit_t = I(y_t < -VaR_t) - (1 - p)$ o wartości oczekiwanej zero. Co więcej, warunkowa wartość oczekiwana względem informacji w momencie $t-1$ również wynosi zero. Aby dokonać weryfikacji jakości modelu należy zbudować model sztucznej regresji Hit_t względem dowolnie wybranych zmiennych (np. opóźnionych wartości Hit_t , prognozowanego VaR etc.).

$$Hit_t = X\delta + u_t, \quad u_t = \begin{cases} -(1-p) & \text{z p-stwem } p \\ p & \text{z p-stwem } (1-p) \end{cases}, \quad (127)$$

gdzie $\delta_{1 \times n}$ oznacza wektor parametrów regresji, a X - macierz danych. Jako hipotezę zerową mamy $H_0: \delta = 0$. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, estymator otrzymany

metodą najmniejszych kwadratów (MNK) wektora parametrów δ , czyli $\hat{\delta}_{MNK} = (X^T X)^{-1} X^T Hit$, ma asymptotycznie rozkład $N(0, p(1-p)(X^T X)^{-1})$. Zgodnie z tym:

$$\frac{\hat{\delta}_{MNK}^T (X^T X) \hat{\delta}_{MNK}}{p(1-p)} \underset{a}{\sim} \chi_n^2 \quad (128)$$

gdzie a oznacza zbieżność asymptotyczną.

9.1. Wyniki badań empirycznych

W [34] podane są również wyniki testów podstawowego modelu *RiskMetrics*TM. Weryfikacji modelu dokonano na portfelu składającym się z 215 czynników ryzyka w okresie 1001 dni, dla $p = 0.95$. Badano nieobciążoność prognoz oraz porównano zrealizowaną i zakładaną (zgodnie z modelem) skalę naruszenia VaR. Częstość naruszeń wyniosła 5,74%, co mieści się w 90% przedziale ufności dla prognozowanego kwantyla. Co ciekawe, z reguły naruszenia miały mniejszą skalę niż wynikało to z założenia o warunkowej normalności log-zwrotów³⁰.

Boudoukh *et al.* [8] przedstawiają porównanie modelu hybrydowego z klasycznym modelem HS i modelem analogicznym z modelem *RiskMetrics*TM. Porównania dokonano na podstawie 3 kryteriów: nieobciążoności, braku autokorelacji i MAPE - średniego absolutnego błędu prognozy (dla ruchomego okna 100 dni). Przeprowadzono również test istotności dla autokorelacji. Porównań dokonywano dla $p = 0.99$ i $p = 0.95$. Przyjęty okres dla wszystkich metod wynosił 250 dni. W przypadku modelu zgodnego z *RiskMetrics*TM, przyjęto takie same współczynniki wygładzające, jak w przypadku modelu hybrydowego, tj. 0.97 i 0.99, a nie $\lambda = 0.94$, stosowany oryginalnie dla prognoz jednodniowych w systemie *RiskMetrics*TM. Testów dokonano na czterech seriach danych obejmujących rynki akcji, obligacji, walut i towarów. Dane obejmowały w sumie 1250 dni, z czego 250 wykorzystano dla zbudowania pierwszej prognozy.

Dla $p = 0.95$ wszystkie metody wykazywały zbliżoną nieobciążoność. Dla $p = 0.99$ najlepszy był model hybrydowy ze wskazaniem na $\lambda = 0.99$. Metoda hybrydowa wykazała się również niższą autokorelacją. W efekcie najniższy MAE wykazywała metoda hybrydowa, aczkolwiek dla $p = 0.95$ różnice były stosunkowo niewielkie. Jednak dla $p = 0.99$, średnio biorąc, metody hybrydowy dawały MAE o 30 - 40% niższy od metody *RiskMetrics*TM i o 14-28% niższy od normalnego modelu HS.

Hosking *et al.* [31] porównują metodę opisaną w rozdziale 7.5 z metodą wariancji-kowariancji, metodą historycznej symulacji i klasyczną metodą Monte Carlo opartą o log-normalność zwrotów. Dane obejmowały 1838 obserwacji w 6 dużych, typowych dla banku portfeli, związanych głównie ze stopą procentową. W modelu HS, wariancji-kowariancji i klasycznym Monte Carlo do wnioskowania użyto 260 ostatnich obserwacji, a dla oceny wariancji w zmodyfikowanej metodzie Monte Carlo 65, 130 i 260 obserwacji w 3 wariantach.

³⁰ Mimo tego, że przyjęto błędną (-2,63 zamiast -2,06) oczekiwaną wartość warunkową przekroczenia.

Parametry modeli były estymowane raz na miesiąc, nie stosowano wykładniczego dla oceny wariacji.

Porównaniu podlegała jedynie nieobciążoność prognoz, na poziomie $p = 0.99$, 0.975 , 0.95 i 0.9 . Dla jedyne porównywalnego okresu 260 dni (dla estymacji parametrów), jedynie dla $p = 0.9$ zmodyfikowana metoda Monte Carlo nie okazała się najlepsza. Przewaga tej metody wzrastała w miarę wzrostu p . Dla $p = 0.99$ i $p = 0.975$ jedynie to podejście dało wyniki w przedziale ufności wyznaczonym na podstawie rozkładu dwumianowego $B(1836, 1-p)$.

Hendricks [29] dokonał oceny 12 modeli VaR, tj. metody HS (dla $t = 125, 250, 500$ i 1250 dni), metodologii *RiskMetrics*TM ($\lambda = 0.94, 0.97$ i 0.99) i zwykłej metody wariacji-kowariancji (dla $t = 50, 125, 250, 500$ i 1250 dni). Eksperyment przeprowadzono na 1000 losowo skonstruowanych portfelach, obejmujących liniowe pozycje w ośmiu walutach. Dienne wartości kursów walut (w USD) obejmowały okres od 1.I.1978 do 18.I.1995, czyli w sumie 4255 dni, z czego początkowo 1250 dni zarezerwowano na potrzeby początkowej prognozy VaR. Dokonano oceny $VaR(0.95)$ i $VaR(0.99)$ na podstawie 9 kryteriów. Kryteria te trudno uznać za standardowe podejście do weryfikacji modeli VaR, dlatego nie zostały one w większości opisane w poprzednim podrozdziale. Tym niemniej można na ich podstawie wyciągnąć szereg interesujących wniosków.

Pierwsze kryterium mierzyło odchylenia przeciętnych wartości VaR od średniej dla wszystkich metod. Zarówno dla $p = 0.95$, jak i $p = 0.99$ średnia wartość prognoz rośnie wraz z wydłużeniem zakresu uwzględnianych danych. Maksymalna różnica uśrednionego po czasie VaR między poszczególnymi metodami wyniosła 9% (jest to wartość przeciętna dla wszystkich 1000 portfeli). Jednak dla $p = 0.99$ ta różnica wzrosła do 20%. Najwyższe oceny dawał $VaR_{HS;1250}(0.99)$, a najniższe $VaR_{RM;0.94}(0.99)$.

Drugie kryterium mierzyło odchylenie standardowe poszczególnych metod względem średniej po metodach prognozy dla danego momentu. Wartości oscylowały od 0.06 do 0.18 dla $p = 0.95$ i od 0.09 do 0.22 dla $p = 0.99$. Innymi słowy, różnice w ocenie VaR dla różnych metod i określonego dnia rzędu 30 - 50% nie są zjawiskiem niezwykłym.

Trzecie kryterium badało zmienność prognoz VaR w czasie dla poszczególnych metod. Ogólnie wyniki wskazują na spadek zmienności z wydłużaniem się okresu danych użytych dla potrzeb kalkulacji. Największą zmienność wykazywała metoda RM, najmniejszą - wariacji-kowariancji.

Czwarte kryterium oceniało bezwarunkową nieobciążoność prognoz. Dla $p = 0.95$ wszystkie metody wykazywały nieobciążoność, gdyż prognozy pokrywały od 94.4% do 95.4% strat, a maksymalny zakres (względem poszczególnych portfeli) wynosił 93.8% - 96.7%. Wydaje się niemniej, że okres 125 dni w przypadku metody HS jest nieco za krótki. Warto również zauważyć, że lepsze wyniki uzyskiwano stosując okres do 125 dni w przypadku metody wariacji-kowariancji i $\lambda = 0.94$ lub 0.97 dla metody RM. Inaczej wygląda sytuacja

dla $p = 0.99$. Jedynie $VaR_{HS;1250}(0.99)$ zapewniał właściwe bezwarunkowe prognozy. Pozostałe metody dawały za niskie wartości VaR. Metody RM i wariancji-kowariancji mieściły się w zakresie od 98.2% do 98.5%, a HS dla krótszych okresów - od 98.3% do 98.8%. Tym niemniej obciążenie malało z wydłużaniem zakresu uwzględnianych danych. Metoda HS charakteryzowała się również mniejszą zmiennością wyników dla różnych portfeli. Warto zauważyć, że chociaż pozornie nieduże, obciążenie takie oznacza niedoszacowanie o 20 do 80% częstości występowanie strat większych od VaR.

Piąte kryterium mierzyło średni stosunek prognozowanego VaR do VaR niezbędnego dla osiągnięcia nieobciążoności prognoz. Innymi słowy, jest to wielkości korekty jaką należy wprowadzić, aby osiągnąć nieobciążoność. Dla $p = 0.95$ mnożnik wahał się w granicach 0.97 - 1.04. Dla $p = 0.99$ przedział wynosił 1 - 1.15.

Jako szóste kryterium obliczono przeciętny stosunek wielkości naruszenia VaR do prognozowanego VaR. Średnio biorąc relacja wynosiła 1.3 - 1.4, niezależnie od poziomu p . Dla porównania, zgodnie z założeniem o normalności zwrotów, stosunek powinien wynosić 1.25 dla $p = 0.95$ i ok. 1.15 dla $p = 0.99$. Stanowi to jeszcze jeden dowód na istnienie grubych ogonów dla danych finansowych.

Kolejne, siódme kryterium jest zbliżone do poprzedniego. Zamiast średniej zbadano jednak maksimum obliczanej relacji. Dla $p = 0.95$ uzyskano wyniki (średnie po wszystkich portfelach) w granicach 3.5-4, tym niemniej w zależności od portfela, wartości oscylowały pomiędzy 2.5 i 6.

Dla $p = 0.99$ uzyskano odpowiednio 2.5 - 2.8 i 1.75 - 4. W sposób oczywisty, otrzymane wielkości zależą od rozpatrywanego okresu (tutaj - 12 lat).

Ósmym kryterium była korelacja pomiędzy VaR, a absolutnymi zwrotami z czynnika ryzyka. Stanowi to odpowiedź na pytanie, na ile VaR reaguje na „prawdziwe” zmiany w ryzyku portfela. Korelacja malała wraz z wydłużaniem się zakresu danych do estymacji. Najwyższą korelację odnotowano w przypadku metody RM, pozostałe metody dawały zbliżone rezultaty. Dla okresu powyżej 250 dni, korelacje dla metody HS i wariancji-kowariancji były znikome (<0.05).

Ostatnie kryterium mierzyło odchylenia przeciętnych wartości VaR, po dokonaniu korekty współczynnikiem obliczonym dla potrzeb kryterium nr 5, od średniej dla wszystkich (skorygowanych) metod. Innymi słowy, badano różnicę dla nieobciążonych prognoz przy zastosowaniu różnych metod. Pozwala to stwierdzić, która metoda, odpowiednio „wykalibrowana”, daje najniższe średnie prognozy VaR. Generalnie najlepsza okazała się metoda RM, która dawała prognozy (średnio po portfelach) do 7% niższe. Oczywiście, wykalibrowania w rozważanym przypadku dokonano *ex post*, co nie jest możliwe w rzeczywistości.

Cardenas *et al.* [9] podaje wpływ opisanych przez nich technik (opisanych w rozdz. 6.3) na skrócenie czasu obliczeń metodą MC. Portfel składał się z 500 otwartych pozycji w 24 walutach, 40% jego wartości stanowiły opcje (w tym egzotyczne), w sumie wpływ

na jego wartość miało 100 czynników ryzyka. Klasyczne podejście MC, przy założonym odchyleniu standardowym estymatora VaR wynoszącym 5%, zajęło 105 minut czasu obliczeniowego. Zastosowanie techniki zmiennej kontrolującej i obciążenia P&L dystrybuanty pozwoliło na skrócenie czasu do 13 minut, a więc przeszło ośmiokrotnie. Dla odchylenia 3%, różnica czasowa wzrosła do ponad 11 razy.

Frye [24] przetestował liniową interpolację w metodzie MC (pot. rozdz. 6.3) na portfelu złożonym z wystawionych opcji kupna na 3 miesięczną stopę procentową i opcji sprzedaży na 30-letnie obligacje, z terminami wykupu 1 tydzień. Taki portfel charakteryzuje się dużą zmiennością wartości oraz współczynników delta i gamma. Uzyskane wyniki (dla różnych p) średnio przeceniały ryzyko o 17% (w stosunku do pełnej metody MC). Tym niemniej dla mniej wrażliwych portfeli i innych skoków siatki (w teście skok wynosił jedno odchylenie standardowe), wyniki powinny być dużo lepsze.

Procedury komplementarne i alternatywna miara ryzyka

Zajmijmy się najpierw koncepcją **scenariuszy awaryjnych**³¹. Jak sama nazwa sugeruje, istota tej metody polega na tworzeniu i symulowaniu skutków pewnych możliwych, kryzysowych sytuacji rynkowych, w kontekście posiadanego portfela. Jest to środek komplementarny w stosunku do Value at Risk. Można uznać, że VaR określa próg maksymalnych, zwykłych strat rynkowych oraz niezbędne rezerwy kapitałowe związane z ryzykiem rynkowym. Na podstawie VaR nie potrafimy jednak powiedzieć niczego na temat rozmiaru i efektów przekroczeń tego wyliczonego progu. *Stress testing* jest prostym środkiem do oceny skali i skutków owych ekstremalnych, anormalnych i nieregularnie występujących zdarzeń rynkowych, które mogą wymagać zaangażowania innych niż wspomniany kapitał rezerwowi źródeł finansowania. Z drugiej strony scenariusze awaryjne są zabezpieczeniem przed zawodnością założeń, leżących u podstaw skuteczności każdego z modeli VaR (por. [43]).

Przed wszystkim, w każdym modelu zakłada się pewną stałość, bądź powtarzalność warunków rynkowych w określonym przedziale czasowym. Innymi słowy, tylko jeśli przyszłe ruchy cen będą zbliżone do tych obserwowanych w przeszłości, modele te będą dawać dobre rezultaty. Zdarzają się jednak załamania w warunkach rynkowych, związane przykładowo z wojnami, katastrofami ekologicznymi, atakami spekulantów etc. Są to właśnie sytuacje awaryjne, które mogą być oddane w ograniczonym stopniu przez metody VaR. Celem scenariuszy awaryjnych jest zbadanie skutków takich załamań. W przypadku tej metody nie określa się prawdopodobieństw zajścia różnych kryzysowych sytuacji, tym niemniej stosowane scenariusze muszą być w jakiś sposób uzasadnione, a więc prawdopodobne.

Analiza scenariuszy awaryjnych nie służy określaniu prawdopodobieństw zająć wielkich strat. Jej celem jest jedynie zbadanie ogólnej zdolności przetrwania przez dany podmiot granicznych obciążeń oraz określeniu, względnie opracowaniu, możliwości przeciwdziałania najbardziej negatywnym zdarzeniom rynkowym.

Uzasadnieniem zasadności stosowania *stress testingu* niech będzie przykład cytowany w [43]. W styczniu 1998 roku koreański dom inwestycyjny SK Securities Co. poniósł straty w wysokości 189 mln USD związane z transakcją swap, zawartą w styczniu 1997 roku, o okresie do wygaśnięcia 1 rok. Formuła wypłaty związana ze swapem była następująca:

$$N \left[5 \left(\frac{B_0}{B_2} - 1 \right) + \max \left(0, \frac{3R_0 - R_1 - R_2}{R_2} \right) + \max \left(0, 1 - \frac{J_0}{J_2} \right) - 0.97 \right], \quad (129)$$

gdzie $N = 53$ mln USD oznacza sumę transakcji, $B_0(B_2)$, $R_0(R_2)$, $J_0(J_2)$ oznaczają kursy USD odpowiednio w tajlandzkiej bahta, indonezyjskiej rupii i jenach japońskich na początku (końcu) transakcji, a R_1 jest kursem USD w rupii po sześciu miesiącach od zawarcia umowy.

³¹ Ang. *stress testing*.

Gdyby kursy pozostawały stałe w okresie umowy, SK Securities otrzymałoby $53 \cdot 0.03 = 1.59$ mln USD. Negatywne skutki dla tej firmy miały: deprecjacja rupii ($R_2 > R_0$) i bahta ($B_2 > B_0$) lub aprecjacja jena ($J_2 < J_0$) względem dolara. Decyzja zawarcia umowy oparta była na analizie danych historycznych. Roczne zmienności kursu wynosiły 1.23%, 2,2% i 6.88% odpowiednio dla bahta, rupii i jena. Kryzys azjatycki spowodował, że waluty te straciły do dolara odpowiednio 51.8%, 77.9% i 2.9%. Nic dziwnego, że $VaR(0.99)$ dla transakcji, w zależności od zastosowanej metody, dawał wyniki 12-18 razy niższe.

Jednak rozważenie trzech prostych scenariuszy, podanych w tabelicy 8, pozwoliłoby na inne spojrzenie na ryzyko związane z transakcją. Oczywiście, zasadne jest pytanie, na ile uzasadnione *a priori* mogły się w styczniu 1997 roku wydawać takie scenariusze. Niewątpliwie jednak zarządzający ryzykiem w SK Securities powinni, jako minimum zabezpieczenia, określić możliwość zaabsorbowania takich strat i stworzyć plany awaryjne pozwalające przeciwdziałać skutkom przedstawionych scenariuszy.

Tablica 8. Straty dla trzech scenariuszy awaryjnych

	THB	IDR	JPY	Strata (mln USD)
Scenariusz 1: mały kryzys	-15%	-15% (-8%)	0%	58,0
Scenariusz 1: średni kryzys	-30%	-30% (-15%)	0%	116,3
Scenariusz 1: duży kryzys	-50%	-50% (-30%)	0%	183,9

Źródło: [43], str.7

Nie ma powszechnie przyjętego standardu przeprowadzania procedury *stress testingu*, a organy nadzoru dopuszczają elastyczność w formułowaniu scenariuszy awaryjnych. Tym niemniej stosowanie standardowych scenariuszy niewątpliwie ułatwia porównanie ekspozycji, zarówno w czasie, jak i między podmiotami. Takie ujednoczone scenariusze zostały przykładowo sformułowane przez Derivatives Policy Group (DPG). Dotyczą one wymienionych dziewięciu tzw. zasadniczych czynników ryzyka³². Standardowe scenariusze uwzględniają m.in. 10% zmianę indeksów akcji, 20% wzrost zmienności indeksów akcji, kursów wymiany i 3-miesięcznej stopy procentowej, równoległe przesunięcie krzywej dochodowości o 100 punktów bazowych i zmianę kursów o 6% (główne waluty) lub 20% (pozostałe waluty). Dokładniejszy opis można znaleźć w [43].

Naturalnym źródłem scenariuszy awaryjnych są dane historyczne (por. rozdz. 5). Oczywiście, każda metoda kalkulacji VaR również bazuje, w mniejszym lub większym stopniu, na danych historycznych. Różnica polega na tym, że przy *stress testingu* uwzględnia się dłuższe szeregi czasowe i wybiera ekstremalne warunki rynkowe. Dla uwzględnienia kwestii płynności, można zastosować wydłużony okres posiadania aktywów (np. zalecany przez BIS okres 10-dniowy), metodę opisaną w rozdziale 4.4 lub kombinację obu podejść.

³² Ang. *core risk factors*.

Jedną z pułapek ponownie ilustruje kryzys azjatycki. Maksymalne zmiany wartości walut krajów Azji Południowo-Wschodniej, wybrane z 10-letniego okresu do końca 1996 roku, okazały się nawet 8-krotnie mniejsze niż maksymalne zmiany w roku 1997 ([43], str. 22). Przyczyną było wcześniejsze, sztuczne utrzymywanie stabilnego kursu przez władze monetarne tych państw. Istota problemu wskazuje zarazem na rozwiązanie: w przypadku czynników ryzyka odgórnie kontrolowanych nie należy opierać się bezpośrednio na danych historycznych dotyczących tychże czynników i uwzględniać możliwość kryzysu, czy też zmiany reżimu rynkowego. Można przykładowo zastosować scenariusze oparte na danych dotyczących zbliżonych pod względem charakterystyki, lecz nie kontrolowanych czynników ryzyka (kursów walut w tym wypadku).

W przypadku prawdziwych portfeli, których wartość zależy od dziesiątek lub setek czynników ryzyka, byłoby wysoce nieuzasadnione symulowanie efektów najbardziej negatywnych scenariuszy dla wszystkich czynników ryzyka jednocześnie. Uzasadnionym byłoby natomiast wykorzystanie istniejących danych historycznych dotyczących jednoczesnych zmian wartości czynników ryzyka.

Inna pułapka polega na różnicy pomiędzy scenariuszami awaryjnymi a **scenariuszem najgorszej ewentualności**³³. Historyczne kryzysy lub przyjęte standardowe scenariusze nie muszą wcale zawierać wszystkich najgorszych, niemniej prawdopodobnych, zestawów wartości czynników ryzyka, w kontekście konkretnego portfela. Aby to sobie uświadomić, wystarczy rozważyć hipotetyczny portfel złożony wyłącznie z kontraktów typu *straddle*, w przypadku którego *Worst Case Scenario* polegałby na braku zmian wartości czynników ryzyka. Poza tym, można sobie wyobrazić wystąpienie kryzysów, równie prawdopodobnych, jak te które zdarzyły się naprawdę i o podobnej skali, ale przynoszące dużo większe straty dla konkretnego portfela.

Pierwsza metoda poszukiwania scenariuszy najgorszej ewentualności, wspomniana już wcześniej, polega na budowaniu, w oparciu o wiedzę ekspercką, pewnych uzasadnionych i możliwych scenariuszy i rozważaniu ich efektów. Przykładem może być rozpatrywanie skutków zabójstwa prezydenta USA, upłynnienia kursu walutowego, trzęsienia ziemi w Tokio itd.

Druga metoda ma charakter numeryczny. Definiuje się warunki jakie muszą spełniać scenariusze i następnie poszukuje się globalnego minimum wartości portfela. Podajmy przykład metod pozwalających na przeprowadzenie takiego postępowania (dalsze przykłady znajdują się w [43]). Jako warunek dopuszczalności scenariuszy można przyjąć regułę „k razy powiększona elipsoidalna z macierzą wariancji-kowariancji Σ ”:

$$r^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot r \leq k^2, \quad (130)$$

³³ Ang. *Worst Case Scenario*.

gdzie r oznacza wektor zwrotów z czynników ryzyka. Macierz wariancji-kowariancji Σ może być estymowana zarówno na podstawie wszystkich danych, bądź tylko dla znacznych zmian cen, co pomaga złagodzić efekty opisane w rozdziale 4.3.

Problem znalezienia globalnego minimum wartości portfela nie jest w praktyce zagadnieniem trywialnym. Wynika to z rozmiarów rozważanej przestrzeni (równej liczbie czynników ryzyka), nieliniowości nakładanych warunków i skomplikowanych, nieliniowych formuł wyceny dla instrumentów pochodnych. Utrudnia to zastosowanie metod gradientowych. Przykładowymi alternatywami mogą być algorytmy genetyczne (pot. rozdz. 7.6), metody Monte Carlo i quasi-Monte Carlo, wielowymiarowa metoda simpleksowa, czy też symulowana metoda wyżarzania³⁴.

Opiszmy w skrócie ostatnią z tych metod, zbliżoną nieco do idei algorytmów genetycznych i pozwalającą na znalezienie minimum globalnego nawet w otoczeniu minimum lokalnych. Wartości czynników ryzyka są dobierane losowo, w oparciu o aktualny wektor czynników ryzyka r_n . Założmy, że różnica wartości funkcji wyceniającej dla aktualnego i kolejnego wektora r wynosi ΔP . Jeśli dla nowego scenariusza portfel ma mniejszą wartość, następuje zmiana wektora wyjściowego. W odwrotnym przypadku ($\Delta P > 0$), przejścia ma miejsce z prawdopodobieństwem $e^{-\Delta P/T}$ (oczywiście, przy zapamiętaniu poprzedniego scenariusza i odpowiadającej wartości funkcji). Stopniowo malejący parametr T („temperatura”) określa prawdopodobieństwo przejścia do stanów o wyższej wartości portfela.

Praktyczną wskazówką przy budowaniu scenariuszy awaryjnych i scenariuszy najgorszej możliwości, jest ich podzielenie ze względu na prawdopodobieństwo zajścia. Nie chodzi tu o określenie prawdopodobieństw, a jedynie opisowe (poglądowe) wyznaczenie pewnych rozgraniczeń jakościowych. Przykładowo, można oczekiwać, że najgorsza sytuacja rynkowa w okresie ostatnich 100 lat ma mniejsze prawdopodobieństwo zajścia od najgorszej sytuacji rynkowej dla okresu ostatnich 10 lat. Ważne jest również wyodrębnienie głównych czynników ryzyka kształtujących wartość portfela. Można tego dokonać za pomocą analizy czynnikowej lub metod programowania matematycznego. Pozwala to na koncentrację na zmianach w ważnych, istotnych obszarach, ułatwia zabezpieczanie się (ang. *hedging*) i tworzenie realnych planów awaryjnych (ang. *contingency plans*).

Ostatnio w literaturze duże zainteresowanie wzbudza alternatywna (choć w rzeczywistości bardzo zbliżona) do VaR miara ryzyka, określana jako „Tail VaR”, „Conditional VaR”, „Mean Excess Loss” czy też „Mean Shortfall”. Ze względu na kwestie językowe, jak i widoczny brak jednolitości w nazewnictwie, oznaczmy tę miarę jako $ECL(p)$ ³⁵, czyli po polsku **oczekiwaną warunkową stratę**. Nazwa wydaje się adekwatna, gdyż jest to wartość oczekiwana strat, ale tylko większych od $VaR(p)$. Można zapisać formalnie:

$$ECL(p) = E[X | X > VaR(p)], \quad (131)$$

³⁴ Ang. *simulated annealing method*.

³⁵ Z ang. *Expected Conditional Loss*.

gdzie E oznacza operator wartości oczekiwanej. $ECL(p)$ jest spójną miarą ryzyka w rozumieniu Artznera *et al.* (zob. rozdział 3.3), przy dużo słabszych założeniach, niż ma to miejsce w przypadku $VaR(p)$. Jest to teoretyczny argument przemawiający za tą miarą.

W praktyce jest to raczej miara komplementarna względem VaR, gdyż pozwala na odpowiedź na nieco inne pytanie. O ile VaR pozwala ustalić dolną granicę zwykłych strat związanych z ryzykiem rynkowym dla danego portfela, o tyle ECL określa przeciętny rozmiar strat nietypowych. Estymacja ECL oparta jest na tych samych metodach, co w przypadku VaR. Nic dziwnego, gdyż w obu wypadkach do kalkulacji potrzebna i wystarczająca zarazem jest znajomość prawego ogona dystrybuanty strat. Dla standardowego rozkładu normalnego mamy przykładowo zależność:

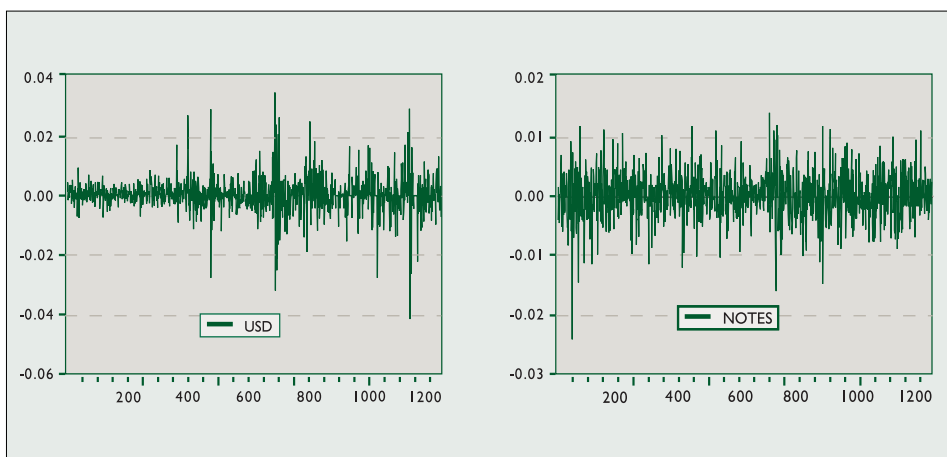
$$ECL(p) = \frac{f_N(\Phi^{-1}(p))}{1-p}, \quad p > 0.5 \quad (132)$$

11.1. Charakterystyka instrumentów składowych i zwrotów z portfela

Postanowiłem dokonać analizy i porównania kilku spośród przedstawionych powyżej metod kalkulacji VaR. Pierwszym krokiem było stworzenie przykładowego portfela. Założyłem, że nasz hipotetyczny inwestor inwestuje w dniu 2 stycznia 1996 roku po 100 tys. PLN w akcje polskie (akcje Elektrimu), akcje amerykańskie (akcje Microsoftu), 13-tygodniowe bony skarbowe i 10-letnie benchmarkowe, rządowe obligacje amerykańskie. W przypadku bonów założono codzienną korektę pozycji utrzymującą stały termin do wykupu oraz przyjęto za oprocentowanie 3-miesięczny WIBOR. Dla amerykańskich T-Notes również przyjąłem stałą korektę pozycji. Te założenia, czynione ze względów obliczeniowych oraz dostępność danych, nie odbiegają od uproszczeń przy „rozbijaniu” pozycji na poszczególne czynniki ryzyka. Jak łatwo zauważyć, zakłada się również doskonałą podzielność papierów oraz brak kosztów transakcji.

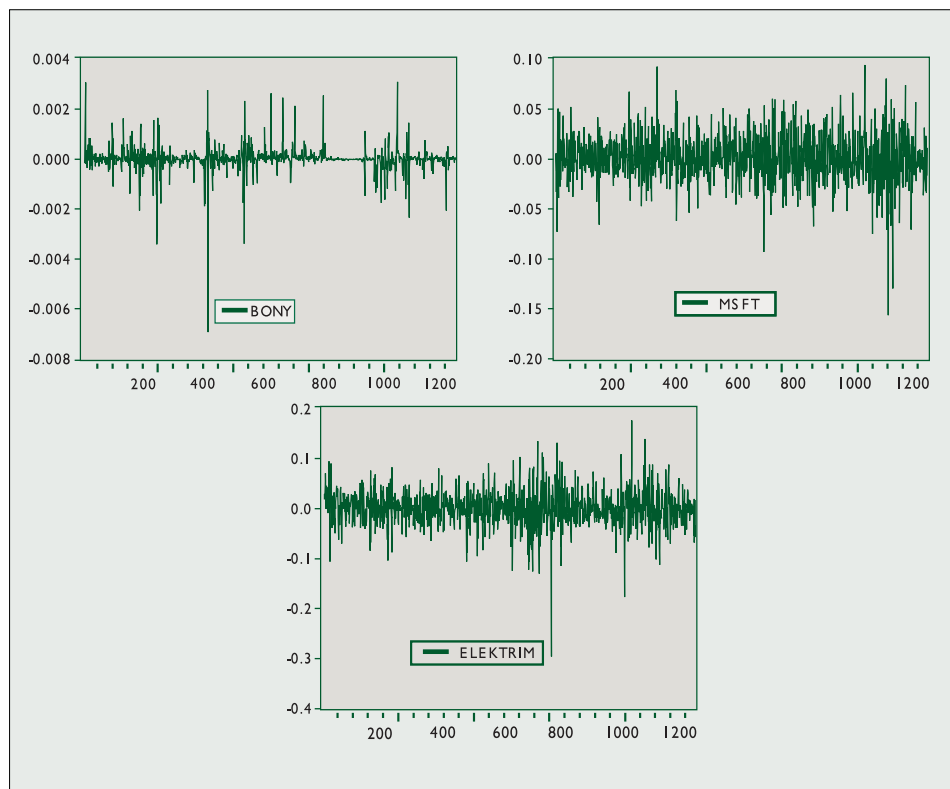
Obserwacje obejmują okres od 02.01.1996 do 20.09.2000 roku (1238 dziennych zwrotów). Dane pochodzą z serwisów finance.yahoo.com (akcje Microsoft i obligacje amerykańskie), bossa.pl (Elektrim) i www.oanda.com (kurs USD/PLN) oraz danych NBP (WIBOR 3M). Oprócz wymienionych aktywów, czynnikiem ryzyka dla portfela jest również kurs dolara amerykańskiego względem złotego.

Rys. 12. Zwroty dla kursu PLN/USD oraz amerykańskich T-Notes



Na rys. 12 i 13 przedstawiono graficzny obraz każdej z serii czasowych log-zwrotów, zaś w tabelicy przedstawione zostały podstawowe statystyki opisowe danych użytych dla potrzeb niniejszej symulacji. Jak widać istnieją zarówno cechy wspólne, jak i charakterystyczne dla poszczególnych aktywów.

Rys. 13. Zwroty dla akcji i bonów



Wartość oczekiwana zmian jest o rząd lub dwa wielkości mniejsza w przypadku instrumentów dłużnych w porównaniu do akcji - wynika to chociażby z faktu, że stopy nie mogą rosnąć (maleć) w nieskończoność³⁶, natomiast ceny akcji i kursy mogą wykazywać dużo dłuższe trendy. Wartość ekstremalnych obserwacji jest 6-14 razy większa od obserwowanych odchyłeń standardowych, przy czym bez wyjątku większe (co do wartości bezwzględnej) są zwrot minimalne. Pokrywa się to z obserwowanymi wartościami skośności (por. rozdz. 2). Wszystkie szeregi cechują się ekscysem kurtozy ($\kappa > 3$). Wysoka wartość tego parametru w przypadku bonów spowodowana jest prawdopodobnie faktem kontroli przez NBP poziomu krótkoterminowych stóp procentowych. Tak więc na rynku występowały rzadkie (ale stosunkowo znaczne) zmiany związane ze zmianą stóp interwencyjnych. Kurtoza dla kursu PLN/USD jest w dużej mierze spuścizną wcześniejszych obserwacji - do mniej więcej połowy 1998 roku złoty poruszał się w stosunkowo wąskim paśmie i jego kurs podlegał regulacji (interwencjom) ze strony NBP, a sam rynek był mało płynny. Przy Elektrimie należy wskazać na istnienie dość długich okresów zastoju na giełdzie oraz (ponownie) płytki rynek. Wynika z tego dość ogólny wniosek, iż tendencja do anormalnego rozkładu zwrotów może być szczególnie widoczna w przypadku rynków regulowanych i mało płynnych. Potwierdzeniem powyższych anomalii są

³⁶ Aczkolwiek 4 i pół roku nieskończonością oczywiście nie jest ...

wartości statystyki Jarque-Bera, nakazujące odrzucenie normalnego rozkładu zwrotów dla wszystkich aktywów.

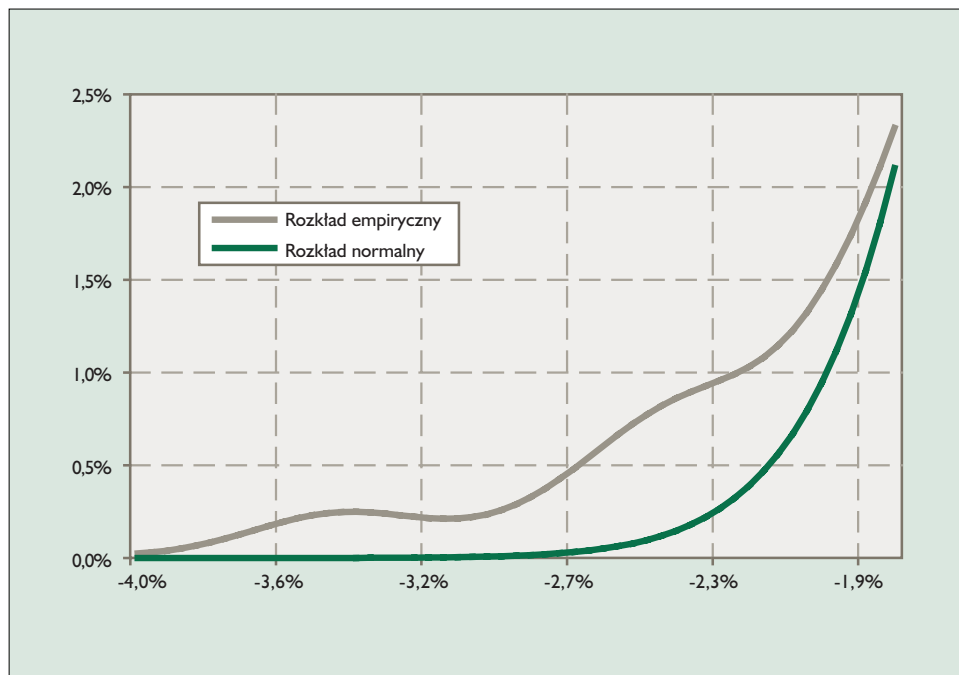
Warto zauważyć, że najbardziej ryzykownymi aktywami w portfelu są akcje. Są one o prawie rząd wielkości bardziej ryzykowne niż inwestycje w dolary czy długoterminowe obligacje skarbowe. Najmniej ryzykowna jest inwestycja w krótkoterminowe bony skarbowe.

Tablica 9. Charakterystyka opisowa zwrotów z czynników ryzyka

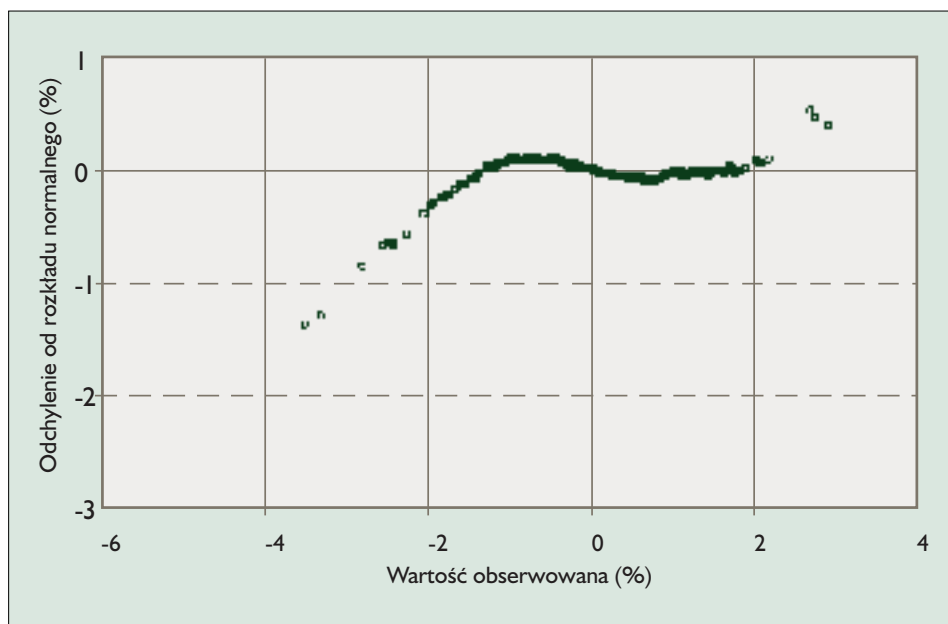
	USD	NOTES	ELEKTRIM	MSFT	BONY
Średnia	0,05%	0,00%	0,13%	0,14%	0,00%
Mediana	0,02%	0,00%	0,00%	0,06%	0,00%
Maksimum	3,5%	1,4%	17,7%	9,4%	0,3%
Minimum	-4,2%	-2,4%	-29,6%	-15,6%	-0,7%
Odch. Std.	0,57%	0,38%	3,54%	2,31%	0,05%
Skośność	-0,018	-0,295	-0,504	-0,331	-2,358
Kurtoza	11,80	5,28	8,97	6,20	46,76
Statystyka Jarque-Bera	3991	286	1890	552	99919
P-stwo	0	0	0	0	0
Obserwacje	1238	1238	1238	1238	1238

Źródło: obliczenia własne

Rys. 14. Ogony rozkładu normalnego i rozkładu empirycznego zwrotów z portfela



Rys. 15. Wykres kwantyl-kwantyl (bez trendu) zwrotów z portfela względem rozkładu normalnego

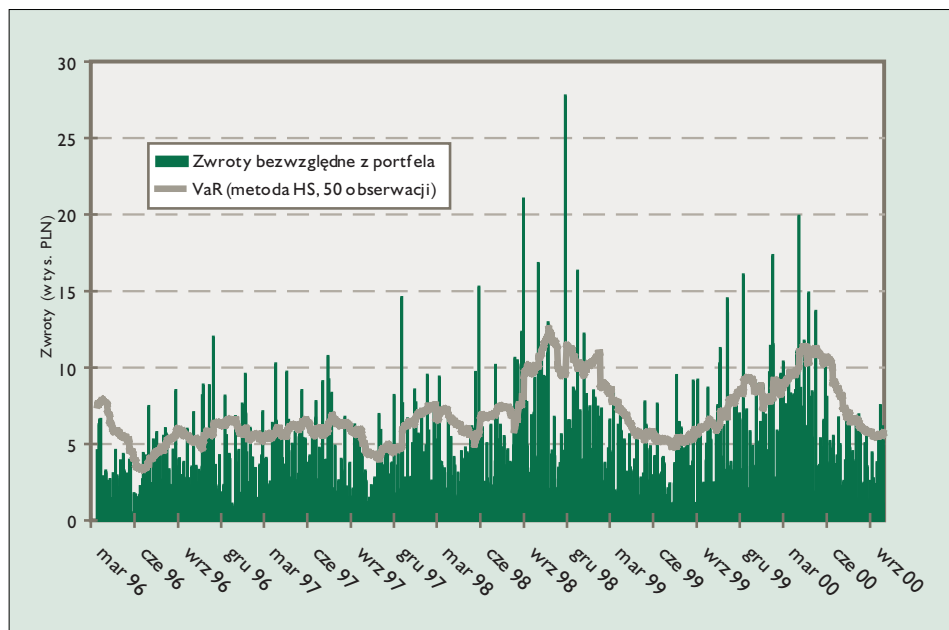


Na koniec przyjrzyjmy się zwrotom z naszego hipotetycznego portfela w rozpatrywanym okresie. Rysunki 14³⁷ i 15 pokazują wyraźnie, że rozkład zwrotów odbiega od rozkładu normalnego. Co więcej, największe odchylenie możemy zaobserwować dla skrajnych obserwacji, a zwłaszcza tych pochodzących z lewego ogona rozkładu (czyli prawego ogona P&L dystrybuanty). Rysunek 16 pokazuje z kolei dynamiczny obraz zachowania się portfela w okresie próby. Jak widać, do około lipca 1998 szereg wykazuje dość stabilne zachowanie. Od lipca 1998 do mniej więcej lutego 1999 mamy do czynienia ze stosunkowo gwałtownymi zmianami wartości portfela, po czym do mniej więcej października 1999 zwroty cechują się relatywnie niższą zmiennością. Sytuacja powtarza się pod koniec próby - najpierw występuje okres około 150 obserwacji o dużej zmienności, a następnie, aż do końca szeregu, amplituda zmian spada.

Ze względu na zauważalne zmiany w poziomie zmienności zwrotów, można podejrzewać, że faworyzowane będą krótsze okna obserwacji. Zawarcie nawet wszystkich 600 pierwszych obserwacji nie pozwoli bowiem na skuteczne przewidzenie wielkości zwrotów w okresach zwiększonej zmienności rynku. Zatem lepsze charakterystyki powinny posiadać metody elastyczniejsze, oparte na mniejszej liczbie zwrotów.

³⁷ Rozkład empiryczny na rysunku 14 został uzyskany za pomocą estymatora rdzeniowego, z funkcją jądra określoną rozkładem normalnym.

Rys. 16. Zwroty z portfela oraz przykładowy Value-at-Risk



11.2. Opis symulacji

Przy empirycznym porównywaniu różnych podejść do modelowania VaR szybko pojawiają się problemy związane ze skalą problemu. Do wyboru jest co najmniej kilka metod kalkulacji VaR, a dla każdej z metod istnieje przynajmniej jeden parametr (długość okna obserwacji, wartość parametru wygładzającego etc.), który można elastycznie zmieniać. Co gorsza, istnieje nieskończona liczba kombinacji składów portfela i okresów historycznych, na których można przeprowadzać badania. Na koniec można jeszcze dodać, że finansowe serie czasowe, na których się operuje, obejmują z reguły co najmniej kilkaset obserwacji.

Innymi słowy, z powodów czysto obliczeniowych, niemożliwe jest porównanie wszystkich metod VaR, z różnymi wartościami parametrów i dla szerokiego przekroju okresów historycznych oraz składów portfela. Sprawia to, że wnioski wyciągane na podstawie symulacji, jak te poniżej lub opisane w rozdziale 9, mają jedynie cząstkowy charakter.

W niniejszej pracy podjąłem się porównania trzech podstawowych metod VaR: historycznej symulacji (HS), metody wariancji-kowariancji (VC) i metody *RiskMetrics*TM (RM). W przypadku metod HS i VC zmianie podlegała długość okna obserwacji, a w przypadku metody RM - wartość wygładzającego parametru λ .

Aby zbadać wpływ długości okna obserwacji na zachowanie VaR, można zastosować dwa podejścia tj. stałego i zmiennego punktu startu. W pierwszym symulacje rozpoczynały się od obserwacji numer 500, niezależnie od długości okna obserwacji. Oznacza to, że najdłuższe okno w tym podejściu obejmowało 500 (pierwszych) obserwacji. Przy zmiennym punkcie startu, długość okna obserwacji wyznaczała punkt rozpoczęcia symulacji. Przykładowo, dla

okna 150 obserwacji, pierwszą obserwacją dla celów symulacji była obserwacja numer 151, a pierwsze 150 obserwacji posłużyło do wyliczenia wstępnej wartości VaR. Podejście stałego punktu startu pozwala na uchwycenie zmian w VaR wynikających ze zmiany długości okna (gdyż symulacja dokonywana jest każdorazowo na tej samej próbie). Przy metodzie zmiennego punktu startu, można porównać efektywność VaR dla różnych metod (ale tej samej ilości wykorzystywanej informacji historycznej) oraz sprawdzić jakość metody z danym oknem obserwacji wykorzystując całą możliwą informację z próby (w celu porównania z wynikami dla metody stałego punktu startu).

Przy podejściu stałego punktu startu, dla metod HS i VC, długość okna ulegała zmianie od 50 do 500 w krokach po 10 obserwacji. Dla startu zmiennego i metod HS oraz VC, długość okna zmieniała się od 50 do 500 w krokach po 10 obserwacji, a następnie od 500 do 750 w krokach po 25 obserwacji. Daje to w sumie 200 kombinacji parametrów.

Inne podejście konieczne jest dla metody RM. W tym przypadku prognoza macierzy wariancji-kowariancji wykorzystuje wszystkie dostępne obserwacje, z tym że ostatnie obserwacje mają najwyższe wagi. Możemy jedynie obliczyć, ile ostatnich obserwacji ma w sumie określoną wagę w prognozie. Zgodnie z [34] zależność ta wygląda następująco

$$K = \frac{\ln(1 - \Upsilon)}{\ln \lambda} \quad (133)$$

gdzie Υ oznacza sumę wag. Przykładowo, dla $\lambda = 0.9$, 22 ostatnie obserwacje mają łączną wagę 90% ($\Upsilon = 0.9$). Jak można zauważyć, liczba efektywnie uwzględnianych dni zależy liniowo od czynnika $1/\ln \lambda$.

Dla potrzeb symulacji przyjąłem, że λ powinna zawierać się w przedziale 0.905 do 0.995. Chcąc ten przedział parametru lambda podzielić liniowo względem liczby dni, musiałem podzielić go liniowo względem czynnika $1/\ln \lambda$. Ponieważ $1/\ln 0.905 = -10$ i $1/\ln 0.995 = -200$, przyjąłem krok -10. Dodatkowo, chcąc lepiej sprawdzić właściwości $\lambda = 0.94$ (przyjętej w systemie *RiskMetricsTM*), podzieliłem pierwszy przedział na pół. Użytkany szereg lambda wygląda następująco: 0.905, 0.936, 0.951, 0.967, 0.975, 0.98, 0.984, ... 0.9945, 0.9948, 0.995. Jak widać, w przestrzeni lambda, odstęp między poszczególnymi testowanymi parametrami maleją w sposób wykładniczy.

Metodę RM można bez problemów porównać z wynikami metod HS i VC dla stałego punktu startu. Niestety, takie porównanie jest trudne dla zmiennego punktu startu, gdyż (jak już wspominałem) w metodzie RM niemożliwe jest jednoznaczne określenie dla danego parametru λ efektywnej długości okna obserwacji. Przeprowadziłem jednak symulację również dla zmiennego punktu startu, chcąc porównać wyniki z wynikami metody RM dla stałego punktu startu. Przyjąłem przy tym efektywną długość okna dla łącznej wagi obserwacji 95% ($\Upsilon = 0.95$). Szereg długości okien przedstawiał się następująco: 30, 45, 60, 90, 120, dni. W rezultacie sprawdziłem dla metody RM 42 kombinacje parametrów.

Obliczenia prowadziłem dla poziomów istotności 0.95 i 0.99. Tak więc w sumie sprawdziłem 484 kombinacji metody, parametrów i punktów startu. Oznaczało to konieczność obliczenia kilkuset tysięcy dziennych VaR.

Kolejnym, ważnym zagadnieniem jest ustalenie kryteriów jakości stosowanej metody pomiaru wartości narażonej na ryzyko, dających podstawę do określenia różnic między poszczególnymi podejściami. Z samej definicji VaR wynika, że naszym celem jest określenie p -kwantyla P&L dystrybuanty, czyli podstawę oceny powinna stanowić **nieobciążoność VaR**. Tak więc w ramach symulacji testowałem, czy empiryczny odsetek naruszeń VaR w sposób statystycznie istotny nie odbiega od założonego poziomu ufności p . Zastosowałem test oparty na ilorazie wiarygodności i test oparty na rozkładzie normalnym.

Istotną cechą dobrej metody kalkulacji VaR powinien być **brak autokorelacji przekroczeń VaR**. W związku z tym dokonałem estymacji współczynników autokorelacji i cząstkowej autokorelacji dla 48 opóźnień oraz obliczyłem wartości statystyki typu *portmoneau* Ljunga-Boxa (sprawdzającej istotność autokorelacji) wraz z poziomem prawdopodobieństwa hipotezy zerowej (czyli braku autokorelacji).

Sprawdziłem również, na ile rozkład ekstremalnych zwrotów z portfela jest zbliżony do rozkładu normalnego. W tym celu obliczyłem standaryzowaną, przeciętną wartość przekroczenia VaR, podobnie jak w [34]. Ponadto dla każdej z symulacji obliczono szereg statystyk opisowych: średni VaR, odchylenie standardowe VaR, maksymalny i minimalny VaR, oszacowany, przeciętny błąd estymacji VaR.

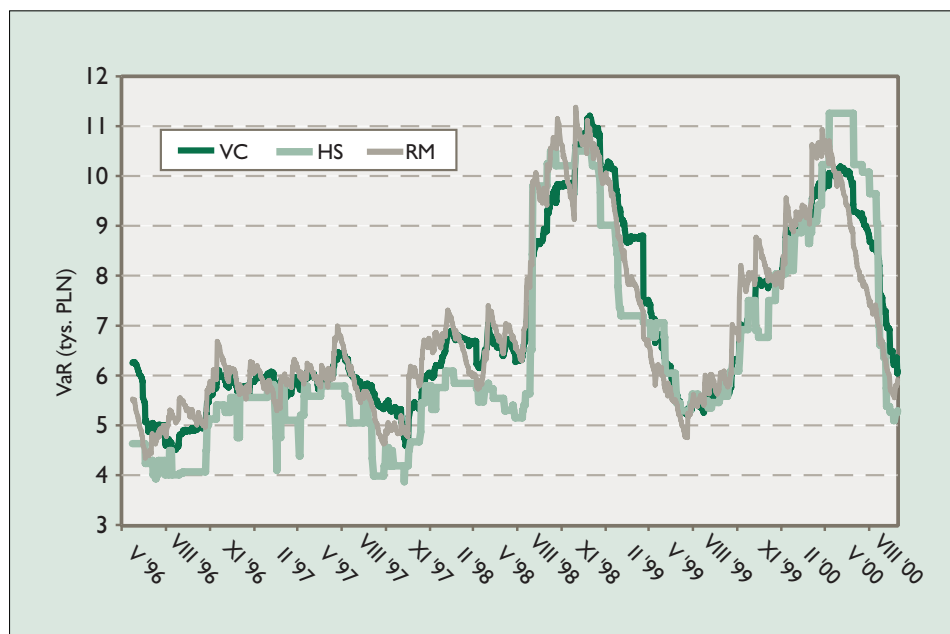
W ostatnim teście postanowiłem sprawdzić, na ile restrykcyjny, w przypadku wybranego portfela, jest przyjęty przez Komitet Bazylejski współczynnik bezpieczeństwa limitu kapitałowego (tzw. mnożnik bazylejski, pot. rozdz. 5). Tak więc dla każdej symulacji wyznaczyłem maksymalny stosunek prognozowanego, jednodniowego VaR przeskalowanego współczynnikiem $\sqrt{10}$ do zrealizowanej, skumulowanej strat w ciągu 10 kolejnych dni roboczych.

11.3. Wyniki symulacji. Wnioski

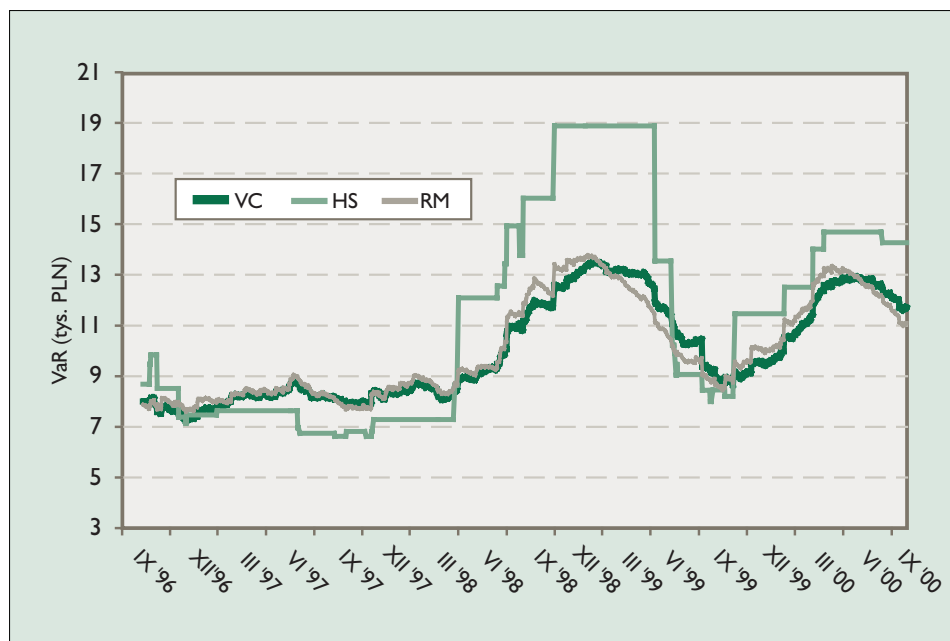
Przyjrzyjmy się na początek charakterystyce trzech rozpatrywanych metod dla porównywalnych okresów obserwacji. Na podstawie rys. 17 oraz rys. 18 można sformułować kilka spostrzeżeń:

1. Metoda HS cechuje się skokowymi zmianami wartości („schodkami”), co szczególnie widoczne jest dla $p=0.99$. Metody parametryczne zmieniają się w bardziej płynny sposób. Związane jest to z faktem, że na wartość VaR-HS wpływają jedynie obserwacje z lewego ogona dystrybuanty zwrotów, które z definicji występują niezbyt często. Mimo to metoda HS nie reaguje w sposób wyraźnie wolniejszy na zmiany wariancji szeregu zwrotów.

Rys. 17. Porównanie VaR dla trzech metod przy poziomie ufności 0.95 i oknie obserwacji n=100



Rys. 18. Porównanie VaR dla trzech metod przy poziomie ufności 0.99 i oknie obserwacji n=200

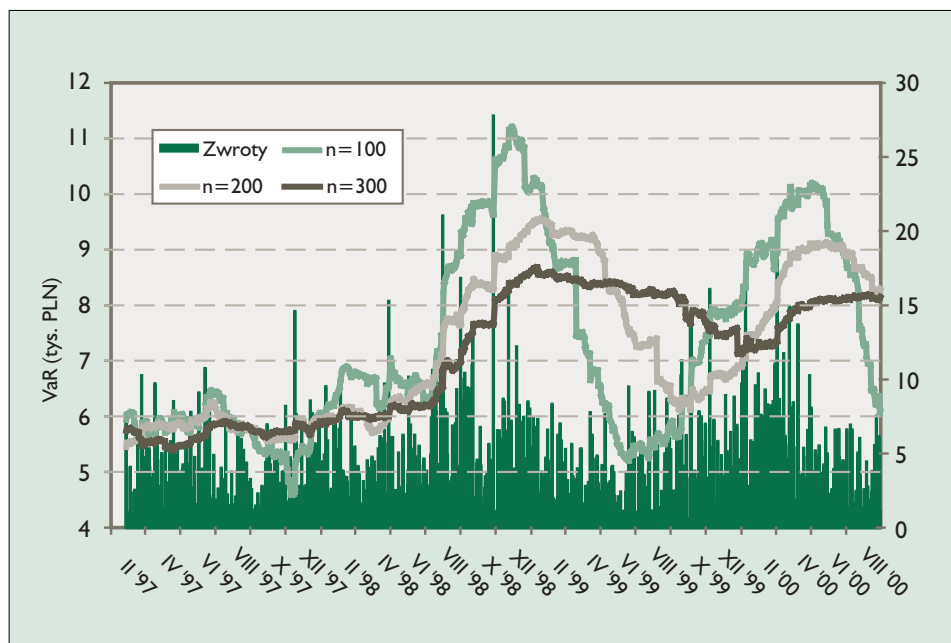


- Metoda RM wydaje się najbardziej dynamicznie reagować na zmiany wariacji zwrotów, aczkolwiek z powodów podanych w poprzednim rozdziale, niemożliwe jest zapewnienie pełnej porównywalności metod HS/VC i RM pod względem efektywnego okna obserwacji.

3. Warto zauważyć, że dla $p=0.95$ metoda HS pozostaje przez większość próby poniżej VaR otrzymanego przy pomocy metod VC i RM. Odwrotnie jest natomiast dla $p=0.99$. Świadczyć to może o przeszacowywaniu ryzyka przez metody parametryczne dla $p=0.95$ i niedoszacowaniu dla $p=0.99$.

Generalnie nie można zaobserwować znaczących różnic pomiędzy metodami dla poziomu istotności 0.95. Przy poziomie istotności 0.99 wyraźnie odmienną charakterystykę posiada metoda historycznej symulacji.

Rys. 19. Zwroty bezwzględne z portfela i VaR dla metody VC i różnej długości okna ($p=0.95$)



W kolejnym kroku porównałem graficznie właściwości VaR dla różnych okresów obserwacji i metod. Dla wszystkich metod można wyciągnąć zbliżone wnioski. Po pierwsze, wydłużanie okresu prowadzi do zmniejszenia, a skracanie do zwiększenia zmienności VaR. Po drugie, jak ilustruje to rys. 19, dla długich okien (lub wysokich λ) VaR z opóźnieniem reaguje na zmiany wariancji szeregu zwrotów. Wskutek tego możemy zaobserwować sytuacje, kiedy:

- wariancja zwrotów maleje, a VaR rośnie lub pozostaje bez zmian
- wariancja zwrotów rośnie, a VaR spada

Przyjrzyjmy się teraz wynikom opisanym w poprzednim rozdziale testów dla przeprowadzonych metodą symulacji szeregów VaR. Jak już wspomniałem, symulacje przeprowadzono dla trzech metod (VC, HS, RM), dwóch poziomów ufności (0.95 i 0.99) oraz zmiennej długości okna obserwacji, stosując podejście stałego i zmiennego startu.

1. **Nieobciążoność.** Dla poziomu ufności $p=0.95$ obie metody parametryczne poprawnie szacowały ryzyko, tzn. odsetek przekroczeń VaR nie odbiegał istotnie statystycznie od

5%. Dla tego samego poziomu ufności metoda HS systematycznie niedoszacowywała ryzyko, tzn. odsetek przekroczeń VaR-HS był istotnie wyższy od 5%. Co więcej, odsetek ten rósł w miarę wydłużania się okna obserwacji.

Dla poziomu ufności $p=0.99$ wszystkie metody prowadziły do zaniżonych estymatorów VaR. Najlepszą metodą okazała się historyczna symulacja, dla której w przypadku krótkich okien (100-120 obserwacji) oraz długich (470-500 obserwacji) odsetek naruszeń VaR nie różnił się w statystycznie istotny sposób od założonego poziomu p , aczkolwiek go przekraczał³⁸. Przy metodzie VC można było zaobserwować wzrost odsetka przekroczeń w miarę wydłużania się długości próby, nie był on jednak tak wyraźny, jak w przypadku $p=0.95$ i metody HS.

2. **Autokorelacja VaR.** Dla $p=0.95$ test oparty na statystyce Ljunga-Boxa pozwalał na odrzucenie hipotezy o istnieniu autokorelacji przekroczeń VaR jedynie dla metody RM z parametrem $\lambda = 0.905$. Analogiczne wnioski można wysnuć na podstawie obliczonych współczynników autokorelacji, które (z tym jednym wyjątkiem) okazały się istotne statystycznie. Można było zaobserwować wzrost autokorelacji w miarę wydłużania się okna obserwacji (wzrostu parametru λ). Obserwowana istotna statystycznie autokorelacja przekroczeń VaR może stanowić rezultat skupiania się zmienności (ang. *volatility clustering*).

Inaczej przedstawiała się sytuacja dla $p=0.99$. W tym wypadku, dla krótszych okien obserwacji w wypadku metod VC i HS oraz dla metody RM, można odrzucić hipotezę o istnieniu korelacji pomiędzy naruszeniami VaR. Oczywiście, wyniki dla $p=0.99$ należy traktować z dużą dozą ostrożności, gdyż testy opierały się na 10-20 obserwowanych przekroczeniach. Jednak generalnie najmniejszą autokorelacją przekroczeń cechowała się metoda RM.

3. **Normalność skrajnych zwrotów.** Analiza skrajnych zwrotów dała dość zaskakujące rezultaty. Generalnie, średnia wartość zwrotów ponad VaR była znacznie wyższa niż wynikałoby to z założenia log-normalnych zwrotów. Nieoczekiwanie wyjątkiem okazała się metoda HS dla $p=0.95$. Może mieć to związek z faktem, że metoda HS dla $p=0.95$ zaniżała systematycznie VaR (pot. wyżej), przez co zwroty przekraczające VaR miały rozkład bardziej zbliżony do normalnego (jako mniej skrajne).
4. **Statystyki opisowe.** Wszystkie metody wykazywały zbliżoną charakterystykę. W miarę wzrostu długości okna spadało odchylenie (zmienność) estymowanego VaR oraz jego przeciętna wartość. O ile pierwsza zależność jest zgodna z intuicją, o tyle trudno znaleźć teoretyczne uzasadnienie dla spadku średniego VaR w miarę wzrostu długości okna. Jak wspomniano, badania Hendri [29], wskazywały na odwrotną zależność. Wydaje się, że istnienia określonej zależności jest determinowane charakterystyką szeregu. W rozpatrywanym przypadku mieliśmy do czynienia ze wzrostem zmienności zwrotów z portfela pod koniec próby. Estymatory VaR oparte na dłuższych oknach obserwacji z opóźnieniem reagują na zmiany wariancji szeregu zwrotów. Wskutek tego w większym stopniu uwzględniały one niższą zmienność z początku próby, nie oddając zarazem w pełni jej wzrostu pod koniec rozpatrywanego okresu. Prawdopodobnie odwrotna sytuacja miała miejsce we wspomnianych badaniach Hendri.

³⁸ Należy jednak zauważyć, że w przypadku okien rzędu 100-200 obserwacji, VaR-HS był praktycznie równy maksymalnej dotychczasowej obserwacji.

5. **Mnożnik bazylejski.** Dla żadnej z metod mnożnik nie osiągnął wartości 3. Najwyższą wartość mnożnika (2.08) otrzymano dla metody HS i okna 470 obserwacji. Generalnie mnożnik rósł wraz z wydłużaniem się okna obserwacji. Podważa to do pewnego stopnia sens wymogu uwzględnienia minimum 250 obserwacji przy kalkulacji VaR. Innymi słowy, wydłużanie okna obserwacji nie musi prowadzić do uzyskania bardziej konserwatywnych (wyższych) estymatorów VaR.
6. Na koniec porównałem powyższe wyniki z wynikami otrzymanymi dla metody zmiennego startu. Symulacje przeprowadzone w tym układzie pozwalały zweryfikować powyższe rezultaty na rozszerzonej próbie, jak również zbadać właściwości estymatorów VaR dla dłuższych od 500 okien obserwacji. Podstawowe różnice w stosunku do metody stałego startu przy identycznym oknie obserwacji, ale dłuższym okresie symulacji, to:
 - a) niższy przeciętny VaR
 - b) wyższe zróżnicowanie (współczynnik zmienności) VaR
 - c) niższy odsetek przekroczeń
 - d) niższa autokorelacja przekroczeń w przypadku $p = 0.95$.

Punkty a i c można wyjaśnić faktem niższej zmienności zwrotów w początkowym okresie. Punkt d z kolei świadczyć może, że początkowe obserwacje charakteryzowały się nie tylko niższą zmiennością, ale też brakiem (lub mniejszym natężeniem występowania) zjawiska skupiania się zmienności. Punkt b wynika pośrednio z niestacjonarności otrzymanego szeregu VaR (pot. 16). Niestacjonarność szeregu powoduje m.in. zafalszowanie obliczonych na poziomach współczynników zmienności. Po dokonaniu obliczeń na przyrostach (dziennych zmianach) VaR, uzyskałem niższą zmienność VaR przy podejściu zmiennego niż stałego startu, co stanowi konsekwencję mniejszej zmienności wariacji zwrotów (a zatem i VaR) w pierwszej części próby.

Podsumowanie. Wnioski końcowe

Koncepcja wartości zagrożonej stanowi ostatni (jak na razie) etap ewolucji ilościowych narzędzi oceny i kontroli ryzyka rynkowego. VaR predestynowany jest do pełnienia centralnej roli w zintegrowanym w skali przedsiębiorstwa systemie zarządzania ryzykiem - rynkowym, kredytowym, organizacyjnym etc. Po pierwsze, koncepcja VaR może zostać przeniesiona na płaszczyznę ryzyka kredytowego i organizacyjnego, co zapewnia daleko idącą spójność pomiaru różnego typu ryzyk. Po drugie, VaR umożliwia ciągłe (codzienne, cogodzinne etc.) monitorowanie ryzyka rynkowego instytucji. Po trzecie, VaR zapewnia największy poziom elastyczności, pozwalając (jeśli istnieje taka potrzeba) na ocenę ryzyka związanego z opcjami i uwzględnienie rozkładu zwrotów alternatywnego do rozkładu normalnego. Rola podstawowego narzędzia nie oznacza bynajmniej, że powinno być to narzędzie jedyne.

Wydaje się, że najlepszym zastosowaniem dla VaR jest bieżący pomiar ryzyka związanego z „typową” zmiennością rynku. „Typowa” zmienność cen instrumentów finansowych odpowiedzialna jest za nieuniknione wahania wyniku finansowego banku (przedsiębiorstwa), jednak bardzo rzadko doprowadza do jego upadłości (niewypłacalności). Wspomniane we wstępie „katastrofy” finansowe to wynik nietypowych, ekstremalnych warunków rynkowych, połączonych z reguły z brakiem szczelności wewnętrznego systemu kontroli ekspozycji na czynniki ryzyka rynkowego. Moim zdaniem, odporność banku na ekstremalne warunki rynkowe lepiej można ocenić za pomocą metod *stress testing* czy *Worst Case Scenario* (analizy najgorszego przypadku), opisanych w rozdziale 10. Wynika to przede wszystkim z trudności, jakie sprawia kwantyfikacja ekstremalnych ryzyk przez metody ilościowe, takie jak VaR, czy odchylenie standardowe zwrotów, w oparciu o ograniczone szeregi czasowe.

Tym niemniej nie oznacza to, że VaR nie może zostać wykorzystany jako miara skrajnych warunków rynkowych. Taką funkcję pełni *de facto* wartość zagrożona w zaleceniach nadzoru bankowego, opisanych w rozdziale 5. Wysokość przyjętego wymogu kapitałowego, tj. $3 \cdot \sqrt{10} \cdot VaR(p=0.99; t=1 \text{ dzień})$, czyli ponad 22 razy dzienne odchylenie zwrotów³⁹, wskazuje jednoznacznie, że wymagana rezerwa kapitałowa ma zabezpieczać bank również na wypadek nader niesprzyjających warunków rynkowych. Zastosowanie VaR jako wyznacznika wymaganego kapitału rezerwowego niewątpliwie zapewnia większą elastyczność normom nadzorczym. Niestety, rozwiązanie takie niesie ze sobą również poważne wątpliwości teoretyczne, gdyż jak wspomniałem, wartość zagrożona lepiej sprawdza się jako górna granica normalnych strat rynkowych. Warto się np. zastanowić, czy ekstremalne zwroty są poprzedzane okresami zwiększonej zmienności rynku. Jeśli nie, to obniżanie (tak jak jest to obecnie) wymagań kapitałowych przy spokojnym rynku pozbawione jest większego sensu. Wiele dyskusji wzbudza również wielkość mnożnika bazylejskiego, dla której nie sposób znaleźć uzasadnienia teoretycznego.

³⁹ Przy założeniu normalności zwrotów.

Dla użytkownika VaR, którym może być np. *risk manager* w banku inwestycyjnym, wartość zagrożona to narzędzie codziennej pracy. Z drugiej strony VaR stanowi interesujące zagadnienie statystyczne i obliczeniowe. Zalety i wady VaR z tego punktu widzenia należy zasadniczo rozpatrywać w odniesieniu do historycznie wcześniejszej miary ryzyka, a więc odchylenia standardowego zwrotów z portfela. Odchylenie standardowe (czyli zmienność, wariancja) stanowi podstawę wielu współczesnych teorii aktywów finansowych, m.in. teorii portfela rynkowego Markowitza czy modelu CAPM. Warto podkreślić podstawowe różnice i podobieństwa między tymi miarami ryzyka inwestycyjnego. Generalnie, wartość zagrożona może być potencjalnie lepszą miarą ryzyka w 3 wypadkach:

- inny niż normalny rozkład zwrotów
- nieliniowa zależność pomiędzy czynnikami ryzyka
- portfel zawierający instrumenty o nieliniowej funkcji wypłaty

Natomiast zarówno odchylenie standardowe, jak i VaR, pozwalają na porównanie ryzyka między różnymi portfelami, są wyrażone w dolarach i potrafią sobie (do pewnego stopnia) radzić z kwestią heteroskedastyczności szeregów zwrotów, względnie zjawiskiem skupiania się zmienności. W obu przypadkach można dokonać dekompozycji na poszczególne klasy instrumentów i pojedyncze pozycje, bądź utworzyć wskaźnik skorygowanego o ryzyko zwrotu z inwestycji (*Risk Adjusted Performance Measure*). Tak więc przekonywanie inwestora, który posiada dobrze zdywersyfikowany portfel inwestycyjny, bez instrumentów o nieliniowej funkcji wypłaty, że VaR jest lepszy od zmienności, jest pozbawione podstaw. W takim wypadku wybór między tymi miarami ryzyka jest kwestią arbitralną.

Jedną z podstawowych kwestii dla ilościowych miar ryzyka, zarówno dla zmienności, jak i wartości zagrożonej, jest podejście do zagadnienia heteroskedastyczności szeregów czasowych zwrotów. Aczkolwiek zdarzają się zapewne wyjątki, to jednak większość cen instrumentów finansowych wykazuje wyraźne wahania poziomu zmienności i współzależności, czyli właśnie heteroskedastyczność. Wahania te mogą się różnić pod względem amplitudy, a przede wszystkim pod względem okresu trwania. Możliwe są zarówno trwałe zmiany poziomu zmienności (jak np. przy uwalnianiu kursów walutowych), jak i kilkudniowe, gwałtowne wzrosty wariancji.

Należy podkreślić, że wszystkie omawiane techniki estymacji VaR, a dokładniej ich implementacje, zakładają heteroskedastyczność zwrotów. Wszystkie bowiem ograniczają okno obserwacji, natomiast przy założeniu homoskedastyczności, najlepszy estymator VaR wykorzystywałby całą dostępną informację i długość próby. Długość okna obserwacji i sposób ważenia historycznych danych stanowi zatem istotny czynnik warunkujący jakość finalnego modelu kontroli ryzyka. Zbyt krótki okres wykorzystywany do estymacji⁴⁰ powoduje nadmierną zmienność (losowość) samej miary ryzyka, która podlega wahaniom nie tylko przy rzeczywistym wzroście zmienności rynku, ale również w okresach, kiedy zmienność instrumentu nie ulega większym zmianom. Innymi słowy wzrasta wariancja estymatora ryzyka, czyli spada jego

⁴⁰ Lub zbyt wysoka waga przypisywana ostatnim obserwacjom.

efektywność. Szczególnie widoczne jest to przy miarach ryzyka opartych na obserwacjach pochodzących z ogona P&L dystrybuanty, jak np. VaR (0.99). Przy zbyt długim oknie obserwacji, miara ryzyka z opóźnieniem reaguje na zmiany sytuacji na rynku, co oznacza, że wzrasta jej obciążenie. Wybór okresu stosowanego do estymacji wymaga zatem ciągłego balansowania między efektywnością a obciążeniem miary ryzyka.

Jak już wspominałem, wybór pomiędzy zmiennością a VaR, jako miarami ryzyka, w przypadku prostej metody wariancji-kowariancji jest kwestią preferencji końcowego użytkownika. Jednak pojawienie się i upowszechnienie opcji stało się ważkim argumentem za implementacją VaR, jako metody kontroli ryzyka rynkowego. W przypadku opcji zmienność przestaje być dobrą miarą ryzyka portfela, gdyż nawet przy normalnym rozkładzie zwrotów z czynników ryzyka, zwrot z portfela będzie mieć rozkład inny niż normalny. Tak więc przy ocenie wad i zalet poszczególnych metod kalkulacji wartości zagrożonej, podejście do wyceny opcji stanowi istotne kryterium. Z teoretycznego punktu widzenia, zdecydowaną przewagę mają metody symulacyjne, czyli technika Monte Carlo i historyczna symulacja. W tych metodach można płynnie regulować uwzględniany stopień nieliniowości - od aproksymacji metodą delta do pełnej wyceny opcji. W przypadku metod analitycznych możliwe jest jedynie ograniczone uwzględnianie charakterystyki opcji, poprzez odpowiednią korektę VaR (pot. rozdz.7.3). Z praktycznego punktu widzenia jednak, różnica ta nie musi oznaczać znacznej rozbieżności uzyskiwanych rezultatów.

Istotnym argumentem przemawiającym na korzyść VaR i motywującym powstanie tej koncepcji jest występowanie w wielu wypadkach różnic pomiędzy empirycznymi rozkładami zwrotów z instrumentów finansowych, a rozkładem normalnym. W innym ujęciu, gaussowski proces błędzenia przypadkowego nie stanowi właściwego modelu dla cen wielu aktywów finansowych i to nie ze względu na ich heteroskedastyczność, ale warunkowy rozkład przyrostów charakteryzujący się ekscysem kurtozy i skośnością. W tym momencie, macierz wariancji-kowariancji nie oddaje w pełni ryzyka związanego z portfelem inwestycyjnym. Uwzględnianie przez model VaR alternatywnych rozkładów zwrotów to następny, ważny element jego oceny. Istnieje ogromna liczba możliwych specyfikacji alternatywnych rozkładów zwrotów, z których jedynie kilka (model wartości ekstremalnych, model *jump-diffusion*, rozkład GED, różne odmiany metody HS) zostało przedstawionych w niniejszej pracy. Jest to jeden z poważnych problemów związanych z odejściem od tradycyjnego założenia o normalności log-zwrotów. Trudno jest bowiem dokonać wyboru jednoznacznie najlepszej metody, zwłaszcza, że w przypadku VaR ocena modelu odbywa się na ograniczonej liczbie obserwacji (naruszeń VaR), co ogranicza efektywność metod ilościowych.

Kolejnym problemem może się wydawać znalezienie odpowiednich miar współzależności przy rozpatrywaniu rozkładu zwrotów spoza rodziny rozkładów eliptycznych. Teoretyczne podstawy modelowania nieliniowości w związkach między instrumentami zostały opisane w rozdziale 4.3. Tematyka ta stanowi niewątpliwie interesujące pola do dalszych badań, tym niemniej praktycznym sposobem uniknięcia komplikacji związanych z wielowymiarowym

charakterem zagadnienia jest rozpatrywanie całego portfela jako pojedynczego instrumentu, przez co sprowadzamy problem do jednego wymiaru. Z drugiej strony, warto zwrócić uwagę, że takie rozwiązanie jest niemożliwe w przypadku systemu w rodzaju *Risk Metrics*, który musi zapewniać użytkownikom elastyczność w tworzeniu portfeli i ocenie ich ryzyka.

Zarówno wycena instrumentów o nieliniowej funkcji wypłaty, jak i modelowanie z zastosowaniem alternatywnych rozkładów zwrotów związane jest z jednym z podstawowych wątków tej pracy tj. zastosowaniem metod numerycznych w modelowaniu finansowym (pot. np. rozdz. 6.3, rozdz. 7.6). Jedynie gwałtowny rozwój metod symulacyjnych pozwolił na pełne wykorzystanie możliwości VaR. Budowa odpowiednich systemów informatycznych i zastosowanie nowoczesnych algorytmów obliczeniowych umożliwiły bieżącą kontrolę ryzyka przeprowadzanych transakcji i, co ważniejsze, jego ocenę w kontekście całego portfela banku.

Na koniec chciałbym zwrócić uwagę, że Value at Risk stanowi nie tylko ostatni krok w rozwoju narzędzi analizy i kontroli ryzyka rynkowego. Jest to również obfite źródło tematów badawczych i czynnik rozwoju dla znaczącej gałęzi usług finansowych, dostawców systemów zarządzania ryzykiem i firm dostarczających usług w tym zakresie. To z kolei w naturalny sposób prowadzi do pewnego zniekształcania oceny rzeczywistej wartości tego narzędzia oraz pomijania jego wad i ograniczeń. Warto zatem pamiętać, że stosowanie Value at Risk nie uwalnia inwestora od zgodnej ze „zdrowym rozsądkiem” oceny decyzji inwestycyjnych, czy też stosowania komplementarnych miar ryzyka. W ramach powyższej pracy starałem się wiernie przedstawić mocne i słabe strony ilościowych metod kwantyfikacji ryzyka, jak też możliwości przewyższania ich ograniczeń. I mam nadzieję, że moje starania zakończyły się choć częściowym sukcesem...

Bibliografia

1. RiskMetrics Monitor, 2(2), JP Morgan, 1996, <http://www.riskmetrics.com/>
2. RiskMetrics Monitor, 1(1), JP Morgan, 1996, <http://www.riskmetrics.com/>
3. P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath: *Coherent Measures of Risk* 1998, Working Paper.
4. Bangia, F.X. Diebold, T. Schuermann, J.D. Stroughair: *Modeling Liquidity Risk, With Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management*. Financial Institutions Center, The Wharton School, University of Pennsylvania, 1998, Working Paper.
5. *Amendment of the Capital Accord to Incorporate Market Risk*. Bank for International Settlements, styczeń 1996, WWW page, <http://www.bis.org>
6. *Supervisory framework for the use of „backtesting” in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements*. Bank for International Settlements, styczeń 1996, <http://www.bis.org>
7. J. Berkowitz: *Evaluating the Forecasts of Risk Models*. Federal Reserve Board, Washington, 1998, Working Paper.
8. J. Boudoukh, M. Richardson, M. Whitelaw: *The Best of Both Worlds*. Risk, 11(5): 64-67, 1998.
9. J. Cardenas, E. Fruchard, J.-F. Picon, C. Reyes, K. Walters, W. Yang: *Monte Carlo within a day*. Risk, 12(2): 55-59, 1999.
10. P.F. Christoffersen, F.X. Diebold: *How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management?* Financial Institutions Center, The Wharton School, University of Pennsylvania, 1997, Working Paper.
11. P.F. Christoffersen, F.X. Diebold, T. Schuermann: *Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management*. Financial Institutions Center, The Wharton School, University of Pennsylvania, 1998, Working Paper.
12. A.L.M. Dekkers, L. Haan: *On the Estimation of the Extreme-Value Index and Large Quantile Estimation*. The Annals of Statistics, 17:1795--1832, 1989.
13. T. Dielman, C. Lowry, R. Pfaffenberger: *A Comparison of Quantile Estimators*. Communications in statistics: Simulation, 23:355--371, 1994.
14. Cz. Domański, K. Pruska, W. Wagner: *Wnioskowanie statystyczne przy nieklasycznych założeniach*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1998.
15. F.C. Drost, T.E. Nijman: *Temporal Aggregation of GARCH Processes*. Econometrica, 61: 909--927, 1993.
16. E. Eberlein, U. Keller: *Hyperbolic distributions in finance*. Bernoulli, 1, 281--299, 1995.
17. E. Eberlein, U. Keller, K. Prause: *New Insights Into Smile, Mispricing and Value at Risk: The Hyperbolic Model*. Universität Freiburg, 1997, Discussion Paper: FDM.
18. P. Embrechts, A. McNeil, D. Straumann: *Pitfalls and alternatives*. Risk, 12(5):69-71, 1999.
19. P. Embrechts, S. Resnick, G. Samorodnitsky: *Living on the Edge*. Cornell University, 1997, Discussion Paper: ETH Zurich.
20. P. Embrechts, S.I. Resnick, G. Samorodnitsky: *Extreme Value Theory as a Risk Management Tool*. Working Paper.

21. A.F. Engle, S. Manganelli: *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*. University of California, San Diego, 1999, Working Paper.
22. M. Falk: *Asymptotic Normality of the Kernel Quantile Estimator*. *The Annals of Statistics*, 13:428-433, 1985.
23. M. Falk: *Extreme Quantile Estimation in sigma-neighborhoods of Generalized Pareto Distributions*. *Statistics and Probability Letters*, 20:9--21, 1994.
24. J. Frye: *Monte Carlo by day*. *Risk*, 11(11):66-71, 1998.
25. A.L.J. Geyer, S. Pichler: *Aggregationsprobleme im Rahmen des Value-at-Risk Konzeptes*. Wien, 1998, Working Paper.
26. F. Gupta, S. Kartinen: *Bound to rebalance*. *Risk*, 13(6):71--74, 2000.
27. J. Hamilton: *A quasi-Bayesian approach to estimating parameters for mixtures of normal distributions*. *Journal of Business and Economic Statistics*, 9(1):27--39, 1991.
28. F.E. Harrel, C.E. Davis: *A New Distribution-Free Quantile Estimator*. *Biometrika*, 69:635--640, 1982
29. D. Hendricks: *Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data*. FRBNY Economic Policy Review, (4), Federal Reserve Bank of New York, New York, 1996.
30. G.A. Holton: *Volatility & Horizon*. *Financial Analyst Journal*, listopad - grudzień 1992.
31. J. Hosking, G. Bonti, D. Siegel: *Beyond the lognormal*. *Risk*, 13(5):59-62, 2000.
32. P. Jorion: *Value at Risk*. Irwin, Chicago, 1997.
33. P. Jorion: *Value at Risk*. McGraw-Hill, Chicago, wyd. 2, 2000.
34. *RiskMetrics - Technical Document*. JP Morgan, New York, wyd. 4, 1996, <http://www.riskmetrics.com/>
35. R. Koenker, G. Bassett: *Regression quantiles*. *Econometrica*, 46:33-50, 1978.
36. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen: *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer, New York - Berlin - Heidelberg, 1983.
37. F. Lindskog: *Modelling Dependence with Copulas*. ETH, Zurich, lipiec 2000.
38. F.M. Longin: *From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach*. *Journal of Banking and Finance*, 24(11):1097-1130, 2000.
39. A.J. McNeil: *Extreme Value Theory for Risk Managers*. ETH Zentrum, Zurich, 1999, Working Paper.
40. A.J. McNeil: *Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory*. ETH Zentrum, Zurich, 1998, Working Paper.
41. R.G. Miller: *The Jackknife - A Review*. *Biometrika*, 61:1-15, 1974.
42. J.J.A. Moors, M.H. Schuld, A.C.A. Mathijssen: *A New Method For Assessing Judgemental Distributions*. Tilburg University, Working Paper.
43. *Guidelines on Market Risk : Stress Testing*. Oesterreische Nationalbank : Financial Market Analysis and Surveillance Division, 1999, strona WWW: <http://www.oenb.at/>
44. Pacut: *Prawdopodobieństwo. Teoria. Modelowanie probabilistyczne w technice*. WNT, Warszawa, 1985.
45. R. S. Parrish: *Comparison of Quantile Estimators in Normal Sampling*, *Biometrics*, 46:247-257, 1990.
46. Pawłowski: *Statystyka matematyczna*. PWN, Warszawa, 1980.

47. E.E. Peters: *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Wiley & Sons, New York, 1994.
48. J. Pickands: *Statistical Interference Using Extreme Order Statistics*. The Annals of Statistics, 3:119-131, 1975.
49. S. Rees: *VaR for fund managers*. Risk, 13(6):67-70, 2000.
50. R.D. Reiss: *Approximate Distributions of Order Statistics*. Springer, New York - Berlin - Heidelberg, 1989.
51. T. Ridder: *Basics of Statistical VaR-Estimation*. sierpień 1997, <http://www.tudresden.de/wwwqvs/VaR/VaR.html>
52. S. Venkataraman: *Value at Risk for a Mixture of Normal Distributions: The Use of Quasi-Bayesian Estimation Techniques*. Federal Reserve Bank of Chicago, New York, 1997, Working Paper.
53. Weron, R. Weron: *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa, 1999.

Ostatnie publikacje Narodowego Banku Polskiego z serii „Materiały i Studia”

Zeszyt Nr	Data	Tytuł	Autor
136	01/02	Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych	Arkadiusz Napiórkowski
137	01/02	Zarządzanie ryzykiem w project finance	Michał Kowalczyk
138	02/02	Mikroekonomiczne koszty inflacji	Wojciech Pachó
139	02/02	Elektroniczne usługi finansowe – charakterystyka rynku, wyzwania i inicjatywy regulacyjne (stan na koniec 2001 r.)	Małgorzata Szczeń Sebastian Jakubiec
140	03/02	Japonia – walka o odzyskanie silnej pozycji gospodarczej i finansowej	Henryk Bilski
141	03/02	Systemy bankowe w Azji Południowo-Wschodniej	Anna Szoftun
142	03/02	Hipoteza neutralności pieniądza	Michał Brzoza-Brzezina Bohdan Kłós Adam Kot Tomasz Łyziak
143	05/02	Koncentracja działalności sektora bankowego w Polsce w latach 1994-2000	Krzysztof Jackowicz Oskar Kowalewski
144	05/02	Rynek kontraktów swap w Polsce	Ewa Leszczyńska
145	06/02	Przyczyny i mechanizmy kryzysów walutowych ze szczególnym uwzględnieniem znaczenia międzynarodowych przepływów kapitału	Hanna Żywiecka
146	07/02	Powiernik w banku hipotecznym	Michał Olszak