STOCHASTYCZNA OPTYMALIZACJA STRATEGII ZARZĄDZANIA SKARBOWYMI INSTRUMENTAMI DŁUŻNYMI

Leszek KLUKOWSKI

Elżbieta KUBA

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono sformułowanie stochastycznego zadania programowania matematycznego, przeznaczonego do optymalizacji zarządzania długiem (emisji obligacji hurtowych) w horyzoncie strategii trzyletniej oraz wyniki empiryczne dla okresu 2002 - 2004. Zmiennymi decyzyjnymi zadania są wartości emisji poszczególnych obligacji, w kolejnych latach. Kryterium optymalizacji stanowią średnioroczne koszty obsługi emitowanego portfela obligacji, podlegające minimalizacji. Wyrażono je dla każdej zmiennej decyzyjnej w postaci iloczynu składanej stopy zwrotu oraz kapitału pozyskiwanego w wyniku sprzedaży obligacji. Stochastyczną postać nadano warunkom ograniczającym określającym potrzeby pożyczkowe budżetu w kolejnych latach. Zastosowano podejście Dantzig'a-Madansky'ego uwzględniające możliwość wystąpienia nadmiaru i niedoboru środków. Warunki ograniczające zadania obejmują wiele cech emitowanego długu, w szczególności mierniki ryzyka. Wyznaczenie numerycznej postaci zadania wymaga predykcji rentowności występujących w funkcji celu. Dokonano jej przy wykorzystaniu dwóch algorytmów klasyfikacji, opartych na: porównaniach parami oraz sieci neuronowej (modelu Kohonena). Zadanie rozwiązano stosując metody przybliżone. Nieliniowe funkcje, będące składnikami funkcji celu i niektórych ograniczeń, aproksymowano wielomianami algebraicznymi, po czym rozwiązano zadanie aproksymowane. Otrzymane wyniki wskazują, że wykorzystanie optymalizacji może przynieść niepomijalne oszczędności w kosztach obsługi długu, będących wydatkami budżetu państwa. Ponadto, zastosowanie optymalizacji przynosi - dzięki możliwości komputeryzacji obliczeń - oszczędności w nakładach pracy i skraca czas niezbędny na uzyskanie wyników. Dostarcza też wielu informacji analitycznych nieosiągalnych przy wykorzystaniu tradycyjnych metod zarządzania - opartych na doświadczeniu i intuicji. Poziom złożoności rozważanego zadania wyklucza uzyskanie rozwiązania optymalnego w sposób tradycyjny. W przypadku wykorzystania metod tradycyjnych nie jest też możliwe określenie *odległości* wyników od rozwiązania optymalnego.

Słowa kluczowe:

• stochastyczna optymalizacja strategii zarządzania długiem publicznym, • zadanie programowania stochastycznego w postaci Dantzig'a-Madansky'ego.

Spis treści

1. Wstęp

W problemach optymalizacyjnych dotyczących zarządzania instrumentami dłużnymi Skarbu Państwa występuje szereg elementów stochastycznych. Najważniejsze z nich to: prognozy stóp procentowych niezbędne dla określenia funkcji celu i niektórych ograniczeń oraz parametry określające potrzeby pożyczkowe budżetu (kapitał). Losowość prognoz stóp procentowych znajduje odzwierciedlenie w prezentowanych wcześniej pracach autorów nt. optymalizacji zarządzania długiem (por. Klukowski L., Kuba E. (2001a)), m.in. w postaci warunków ograniczających formę kwadratową macierzy wariancji i kowariancji (lub semiwariancji i semikowariancji) przyszłych rentowności. Losowość kapitału jest nie mniej ważna, ponieważ wskutek nieliniowości oraz dyskretności rozważanych problemów, zmiany jego poziomu mogą w sposób nieoczekiwany (w szczególności nie wprost proporcjonalny) wpływać na postać rozwiązania. Jest zatem wysoce zasadne zastosowanie odpowiednich technik optymalizacyjnych uwzględniających losowość w tym zakresie, a zwłaszcza metod programowania stochastycznego. Spektrum technik możliwych do wykorzystania jest dość obszerne. Praktyka narzuca jednakże istotne ograniczenia związane z możliwością określenia rozkładów losowych elementów zadań, dopuszczalnym czasem obliczeń, poziomem złożoności matematycznej, itp. Dlatego też jako pierwsze przybliżenie proponuje się wykorzystanie metod prostych, odzwierciedlających najważniejsze cechy optymalizowanych decyzji. Warunki te spełnia zadanie stochastyczne sformułowane przez Dantziga-Madansky'ego (por. np. W. Grabowski (1980), pkt. 19.3.3). W zadaniu tym zakłada się, że parametr występujący w warunku ograniczającym jest wielkością (zmienną) losową o znanym rozkładzie, a odstępstwo od równościowego spełnienia tego ograniczenia, tj. powstanie nadmiaru lub niedoboru, pociąga za sobą określone koszty. Uwzględnienie losowości parametrów zapewnia istotnie wyższy poziom adekwatności do realiów procesu decyzyjnego, a zwłaszcza uwalnia od konieczności podania *dokładnego* poziomu potrzeb pożyczkowych budżetu z wieloletnim wyprzedzeniem. Określenie poziomu tych potrzeb przyjmuje postać probabilistyczną, tj. rozkładów prawdopodobieństwa zadanych na przyjętych zbiorach wartości; zyskuje zatem bardziej ogólną i *elastyczną* formę. Poniżej zostanie sformułowane zadanie stochastyczne wymienionego typu dla strategii trzyletniej; wersję *deterministyczną* tego zadania przedstawiono w pracy Klukowski L., Kuba E. (2002).

Możliwość wystąpienia nadmiaru lub niedoboru kapitału wpływa na postać analityczną zadania i jego rozmiar, ponieważ generuje dodatkowe zmienne decyzyjne, włączane do funkcji celu i warunków ograniczających. Istotnym modyfikacjom ulegają zwłaszcza ograniczenia, ponieważ występują w nich wartości zmiennych losowych, określające potrzeby pożyczkowe budżetu oraz zmienne decyzyjne wyrażające nadmiar lub niedobór. Zwiększa się też liczba ograniczeń - proporcjonalnie do liczebności zbioru wartości rozkładu prawdopodobieństwa określającego kapitał (w przypadku dyskretnej postaci tego rozkładu). Modyfikacje, prowadzące do stochastycznej postaci zadania, zachowują własność wypukłości występujących w nim funkcji nieliniowych (traktując zmienne decyzyjne jako wielkości *ciągłe*). Pozwala to rozwiązać zadanie stochastyczne przy wykorzystaniu identycznych algorytmów, jak zadanie deterministyczne.

Należy dodać, że w warunkach występowania stochastycznych parametrów problemu decyzyjnego, w praktyce stosuje się często - również w zarządzaniu długiem - metody symulacyjne, a nie optymalizacyjne (np. tzw. metodę *cost at risk*). Polegają one na dokonaniu odpowiednio dużej liczby przebiegów symulacyjnych modelu analizowanego zjawiska (który trzeba wcześniej opracować), a następnie wyborze najlepszej decyzji na ich podstawie. Wynik otrzymany przy wykorzystaniu metod symulacyjnych nie gwarantuje rzeczywistej optymalności decyzji. Stosowanie metod symulacyjnych jest zatem zasadne tylko w przypadku, gdy nie ma możliwości sformułowania i rozwiązania problemu optymalizacyjnego. Z tego względu, w zarządzaniu długiem metody symulacyjne nie stanowią alternatywy, a tym bardziej *zamiennika* dla zadań optymalizacyjnych. W praktyce metody symulacyjne są stosowane niejednokrotnie ze względu na mniejsze wymagania odnośnie wiedzy matematycznej oraz oprogramowania komputerowego.

Celem tej pracy jest głównie prezentacja sposobu sformułowania zadania stochastycznego optymalizującego strukturę emisji obligacji hurtowych (rozdz. 2), metod określenia jego parametrów, w tym prognoz rentowności (rozdz. 3) oraz wyników empirycznych – rozwiązania optymalnego (rozdz. 4). Pominięto bony skarbowe, ponieważ ich udział w emisji (w przybliżeniu stały w czasie) jest określony głównie przez potrzeby zarządzania płynnością budżetu państwa, a także obligacje detaliczne, mające uzupełniający charakter. Ograniczenia *deterministyczne*, omówione w pracy Klukowski L., Kuba E. (2002), zawarto jedynie w numerycznej postaci zadania. Ogólny zarys optymalizacyjnego ujęcia zarządzania długiem jest przedmiotem pracy Klukowski L., Kuba E. (2001a).

Jest oczywiste, że przedstawione sformułowanie jest jednym z możliwych wariantów zadania stochastycznego (por. np. W. Grabowski (1980), rozdz. 19). Dokonując wyboru jego postaci kierowano się głównie względami aplikacyjnymi – prostotą matematyczną, *łatwością* określenia parametrów i ich *intuicyjnością* oraz możliwością dokonania obliczeń przy wykorzystaniu powszechnie dostępnego oprogramowania, np. typu Excel.

2. Sformułowanie zadania optymalizacyjnego

Przedstawione poniżej zadanie ma na celu minimalizację średniorocznych kosztów obsługi rozważanych instrumentów dłużnych, w horyzoncie strategii trzyletniej, przy założeniu, że zmienne decyzyjne odpowiadają okresom rocznym, w warunkach losowego poziomu parametrów określających potrzeby pożyczkowe budżetu. Jako miarę rentowności instrumentów dłużnych przyjęto składaną stopę zwrotu (CRR), a koszty obsługi, podlegające minimalizacji, wyrażono w postaci iloczynu rentowności i kapitału (opartego na cenie *brudnej*). Warunki ograniczające zadania mogą obejmować – poza potrzebami pożyczkowymi – wiele parametrów (własności) emitowanego portfela długu, a zwłaszcza mierniki poziomu ryzyka (por. Klukowski L., Kuba E. (2002)).

W celu uproszczenia i skrócenia zapisu, zostanie rozważone zadanie zawierające – obok funkcji celu – jedynie ograniczenia dotyczące kapitału; w numerycznej postaci zadania (w rozdz. 3) uwzględniono ponadto ograniczenia poziomu kosztów obsługi, które zależą od nadmiaru lub niedoboru, jak również ograniczenia uwzględnione w pracy L. Klukowski, E. Kuba (2002). Zadanie wyjściowe – z deterministycznymi warunkami ograniczającymi można zapisać w następujący sposób. Funkcja celu ma postać:

$$\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))\varphi^{(it)}(x_{it}) \to \min\,, \tag{1}$$

przy czym funkcje (rentowności) $\varphi^{(it)}(x_{it})$ można zapisać (w uproszczeniu) następująco:

$$\varphi^{(1t)}(x_{1t}) = \left(\left(M \Big/ \left(M - d^{(1t)}(x_{1t})\right)\right) \prod_{j=3}^{H_{1t}} \left(1 + r_{1j}\right) \right)^{1/\tau_{1t}} - 1,$$

$$\varphi^{(2t)}(x_{2t}) = \left(\left(M * R_2 \sum_{k=1}^{5} \prod_{j=k+1}^{H_{2t}} \left(1 + r_{2j}\right) + M \prod_{j=6}^{H_{1t}} \left(1 + r_{2j}\right) \right) \Big/ \left(\left(M - d^{(1t)}(x_{1t})\right)\right) \right)^{1/\tau_{2t}} - 1,$$

$$\varphi^{(3t)}(x_{3t}) = \left(\left(M * R_3 \sum_{k=1}^{H_{3t}-1} \prod_{j=k+1}^{H_{3t}} \left(1 + r_{3j}\right) + P_{3tH} \right) \Big/ \left(\left(M - d^{(3t)}(x_{3t})\right) \right) \right)^{1/\tau_{3t}} - 1,$$

$$\varphi^{(4t)}(x_{4t}) = \left(\left(M \sum_{k=1}^{H_{4t}-1} \prod_{j=k+1}^{H_{4t}} R_{4,j-1}\left(1 + r_{4j}\right) + P_{4tH} \right) \Big/ \left(M - d^{(4t)}(x_{4t})\right) \right)^{1/\tau_{4t}} - 1\,;$$

warunki ograniczające wyrażają się nierównościami:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i1}(M - d^{(i1)}(x_{i1})) \geq A_1\,, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i2}(M - d^{(i2)}(x_{i2})) \geq A_2, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i3}(M - d^{(i3)}(x_{i3})) - M \cdot x_{1,1} \geq A_3, \tag{4}$$

$$x_{it}^{min} \leq x_{it} \leq x_{it}^{max} \quad (i=1, 2, 3, 4 ; t=1, 2, 3), \tag{5}$$

gdzie:

H – horyzont optymalizacji - osiem lat (licząc od pierwszego roku strategii);

x_{it} (i=1, ...,4) – sprzedaż i-tej obligacji w roku t (t=1, 2, 3) - zmienna decyzyjna (liczba nominałów); uwzględniono obligacje sprzedawane na przetargach w 2001 r., tj. 2-letnią (zerokuponową), 5-letnią (stałoprocentową) oraz dwie 10-letnie: stało- i zmiennoprocentową;

$d^{(it)}(x_{it})$ – średnie dyskonto odpowiadające sprzedaży x_{it} i-tej obligacji w roku t;

$\varphi^{(it)}(x_{it})$ – funkcja określająca rentowność (typu CRR) i-tej obligacji, odpowiadająca sprzedaży x_{it}, w roku t, dla horyzontu optymalizacji H;

τ_{it} – długość okresu między sprzedażą i-tej obligacji w roku t oraz horyzontem optymalizacji H; H_{it} - część całkowita z liczby τ_{it} ;

P_{itH} - (i=3, 4; $1 \leq t \leq 3$) – cena (rynkowa) i-tej obligacji, sprzedanej w roku t, w chwili odpowiadającej horyzontowi optymalizacji H;

A_t – parametr ograniczający od dołu potrzeby pożyczkowe budżetu (kapitał) w roku t – z uwzględnieniem wykupu obligacji sprzedanych w poprzednich latach, ale z pominięciem wykupu instrumentów sprzedanych w latach t=1, 2, 3 (tzn. zmiennych decyzyjnych zadania); są to zatem łączne potrzeby pożyczkowe budżetu wynikające z poziomu deficytu i wykupu długu emitowanego przed okresem obejmującym strategię;

M – nominał jednej obligacji (obecnie 1000 zł);

x_{it}^{min}, x_{it}^{max} (i=1, 2, 3, 4 ; t=1, 2, 3) – ograniczenia zmiennej x_{it} – odpowiednio: dolne i górne.

W celu uproszczenia zapisu pominięto w wyrażeniach określających kapitał, tj.: M-$d^{(it)}(x_{it})$, odsetki wykupywane na przetargu, będące składnikiem *ceny brudnej*, wykorzystanej w empirycznej części pracy (rozdz. 4).

Losowość poziomu kapitału oznacza, że wektor parametrów $\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]^T$ może przyjmować jedną z s wartości (s>1) z prawdopodobieństwami $p_1, ..., p_s$. Oznaczając symbolem $\mathbf{\Lambda}$ (wielowymiarową) zmienną losową wyrażającą ograniczenie poziomu kapitału w kolejnych trzech latach, tzn. przyjmując $\mathbf{\Lambda} = [\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3]^T$, fakt ten można zapisać w postaci:

$$P(\boldsymbol{\Lambda} = [A_{1r}, A_{2r}, A_{3r}]) = p_r \qquad (r=1, \ldots, s), \qquad \sum_{r=1}^{s} p_r = 1, \qquad (6)$$

gdzie:

A_{tr} – r-ty element zbioru wartości zmiennej losowej Λ_t.

Losowość parametru ograniczającego poziom kapitału powoduje, iż wartość funkcji $\sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))$ występującej po lewej stronie każdego z warunków (2) – (4) może być różna od prawej strony, tj. A_{tr} (należy dodać, że w przypadku deterministycznym ograniczenia (2) – (4) są spełnione w rozwiązaniu optymalnym równościowo, ponieważ funkcja celu jest rosnąca ze względu na każdą ze zmiennych). W przypadku, gdy wartość tej funkcji jest mniejsza od prawej strony występuje niedobór środków, jeśli większa – nadmiar. Każda z tych sytuacji może spowodować określone koszty. Niedobór – konieczność zaciągnięcia pożyczek po wyższych kosztach niż indukowane przez rentowności wynikające z przetargów na rozważane obligacje (np. powstanie długu z odsetkami ustawowymi), nadmiar – konieczność dokonania lokat o dochodowości wyższej od wynikającej z emitowanych obligacji. Dla uproszczenia, koszt zarówno niedoboru (rentowność) γ_t, jak i nadmiaru η_t będzie przyjmowany na stałym poziomie w roku t, niezależnym od poziomu i struktury niedoboru lub nadmiaru (użytych instrumentów), przy czym:

$$\gamma_t, \eta_t \geq 0 \qquad (t=1, 2, 3), \qquad (7)$$

$$\gamma_t + \eta_t > 0. \qquad (8)$$

Wielkości niedoboru y_{tr} oraz nadmiaru z_{tr} definiuje się w następujący sposób:

$$y_{tr} = \max\{ A_{tr} + \vartheta M x_{1,1} - \sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it})),\ 0\} \qquad (t=1, 2, 3;\ r=1, ..., s), \qquad (9)$$

$$z_{tr} = \max\{ \sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it})) - A_{tr} - \vartheta M x_{1,1},\ 0\} \qquad (t=1, 2, 3;\ r=1, ..., s), \qquad (10)$$

przy czym: $\vartheta=1$ dla t=3 oraz $\vartheta=0$ dla $t\neq 3$.

Koszt wynikający z niedoboru y_{tr} jest równy iloczynowi $\gamma_t{*}y_{tr}$, a - z nadmiaru z_{tr} – iloczynowi $\eta_t{*}z_{tr}$. Ponieważ każda z wartości y_{tr} lub z_{tr} realizuje się z prawdopodobieństwem p_r, zatem wartość oczekiwana tego kosztu jest równa $\sum_{t=1}^{3} \sum_{r=1}^{s} p_r(\gamma_t y_{tr} + \eta_t z_{tr})$. Wyrażenie to dodaje się w sformułowaniu Dantziga-Madansky'ego do funkcji celu (1).

Zasygnalizowane powyżej uproszczenia dotyczące stałości kosztu nadmiaru oraz niedoboru powodują, że składniki funkcji celu odpowiadające niedoborowi i nadmiarowi mają postać liniową. Ponadto każdej z tych sytuacji (niedoborowi i nadmiarowi) w określonym roku odpowiada jedna zmienna (tj. łącznie dwie), tzn. nie są wyspecyfikowane instrumenty (bony lub obligacje) finansujące niedobór; zmniejsza to liczbę zmiennych decyzyjnych zadania. Wyeliminowanie tych uproszczeń nie stanowi problemu matematycznego, ale zwiększa złożoność zadania.

Możliwość wystąpienia niedoboru lub nadmiaru wpływa również na postać zbioru warunków ograniczających – powoduje konieczność włączenia wyrażeń (y_{tr} - z_{tr}) do odpowiednich nierówności (2) – (4) (r=1, ..., s), określających poziom kapitału oraz zależności (9) – (10) definiujących zmienne decyzyjne (łącznie 2∗3∗s równości). Liczba warunków (2) – (4) wzrasta wskutek tego s-krotnie, przy czym otrzymują one postać równości. Zasadne jest również włączenie kosztu wynikającego z niedoboru y_{tr}, tzn. iloczynów $\gamma_t * y_{tr}$, (lub sum $\gamma_t * y_{tr} + \eta_t * z_{tr}$) do ograniczeń poziomu kosztów obsługi w poszczególnych latach (ich postać podano w pracy L. Klukowski, E. Kuba (2002)). Po dokonaniu wymienionych modyfikacji zadanie (1) – (5) otrzymuje postać:

$$\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))\varphi^{(it)}(x_{it}) + \sum_{t=1}^{3}\sum_{r=1}^{s} p_r(\gamma_t y_{tr} + \eta_t z_{tr}) \to \min \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i1}(M - d^{(i1)}(x_{i1})) + y_{1r} - z_{1r} = A_{1r} \qquad (r=1, ..., s), \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i2}(M - d^{(i2)}(x_{i2})) + y_{2r} - z_{2r} = A_{2r} \qquad (r=1, ..., s), \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i3}(M - d^{(i3)}(x_{i3})) + y_{3r} - z_{3r} - M \cdot x_{1,1} = A_{3r} \qquad (r=1, ..., s), \qquad (14)$$

$$y_{tr} = \max\{\ A_{tr} + \vartheta M x_{1,1} - \sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it})),\ 0\} \qquad (t=1, 2, 3;\ r=1, ..., s), \qquad (15)$$

$$z_{tr} = \max\{\ \sum_{i=1}^{4} x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it})) - A_{tr} - \vartheta M x_{1,1},\ 0\} \qquad (t=1, 2, 3;\ r=1, ..., s), \qquad (16)$$

$$x_{it}^{\min} \le x_{it} \le x_{it}^{\max} \qquad (i=1, 2, 3, 4\ ;\ t=1, 2, 3). \qquad (17)$$

Przy założeniu, że funkcja (1) jest wypukła, własność wypukłości zachowuje również w rozważanym przypadku funkcja (11). W zadaniu stochastycznym przybywa łącznie 12 zmiennych oraz 24 ograniczeń; ponadto warunki dotyczące kapitału mają postać równości. W przypadku *małych* wartości s (rzędu kilku) złożoność zadania stochastycznego nie różni się zatem *drastycznie* od złożoności zadania deterministycznego. W przypadku *dużych* s, wzrasta znacząco rozmiar zadania, co zwiększa znacznie nakład obliczeń i utrudnia rozwiązanie.

Zadanie (11) – (17) wymaga określenia dodatkowych – w stosunku do zadania deterministycznego - parametrów: kosztów niedoboru i nadmiaru oraz rozkładów prawdopodobieństwa określających warianty potrzeb pożyczkowych budżetu. Ocena kosztów niedoboru i nadmiaru nie stanowi zwykle problemu w praktyce, natomiast trafne określenie rozkładów potrzeb pożyczkowych wymaga prac analityczno-prognostycznych. Pozwala jednakże na uzyskanie optymalnego rozwiązania, w warunkach potrzeb pożyczkowych budżetu określonych przez rozkład prawdopodobieństwa, a nie pojedynczą wartość. W chwili uzyskania informacji nt. rzeczywistego poziomu nadmiaru lub niedoboru, np. po zakończeniu każdego roku strategii, można je wykorzystać do optymalizacji działań związanych z uzupełnieniem niedoboru lub wykorzystaniem nadwyżki.

Stochastyczną postać można nadać również innym warunkom ograniczającym, np. warunkom określających koszty obsługi, których wielkość wpływa na potrzeby pożyczkowe. Powoduje to jednakże dalsze zwiększenie złożoności zadania.

3. Określenie parametrów zadania

Omawiane w pracy zadanie ma przede wszystkim na celu zaprezentowanie *korzyści* wynikających z zastosowania optymalizacji stochastycznej do zarządzania długiem, głównie faktu, iż jest ona bliższa realiom procesu decyzyjnego. Dlatego też niektóre jego parametry, wymagające głębszych prac analityczno-prognostycznych, określono w sposób *zgrubny* (starając się zapewnić ich realistyczne własności). W pkt 3.1 scharakteryzowano zwięźle parametry zadania określone w sposób ekspercki. Metodę wyznaczenia prognozy funkcji CRR, opartą na algorytmach sformalizowanych – statystycznym i wykorzystującym sieci neuronowe - przedstawiono w pkt. 3.2. Nie omówiono sposobu wyznaczenia parametrów występujących w zadaniu deterministycznym; problem ten jest jednym z tematów pracy L. Klukowski, E. Kuba (2002).

3.1. Określenie parametrów występujących w warunkach ograniczających zadania stochastycznego

Nowymi elementami zadania stochastycznego – w stosunku do zadania deterministycznego – są: rozkład prawdopodobieństwa charakteryzujący potrzeby pożyczkowe budżetu, tj. zbiór wartości i funkcja prawdopodobieństwa oraz parametry wyceniające koszt niedoboru i nadmiaru.

Określenie rozkładu potrzeb pożyczkowych dla strategii trzyletniej oraz wyceny kosztów niedoboru i nadmiaru może być dokonane głównie na podstawie analiz eksperckich, ze względu na niepowtarzalność sytuacji w tym zakresie, w kolejnych latach. W przypadku sformułowania podobnych zadań dla optymalizacji bieżącej płynności budżetu państwa, wydaje się natomiast realne wykorzystanie również danych historycznych.

Rozkład potrzeb pożyczkowych budżetu został określony w niniejszej pracy na podstawie następujących źródeł:

a) zapisów ustawy budżetowej na rok 2002,
b) programu *Strategia gospodarcza rządu na lata* 2002-2005,
c) danych dotyczących wykupów obligacji w latach 2002-2004 oraz oczekiwanych kosztów obsługi instrumentów dłużnych, sprzedanych przed rokiem 2001.

Koszty niedoboru określono na podstawie maksymalnego poziomu rentowności CRR dla poszczególnych lat, koszty nadmiaru – na podstawie oceny *spreadu* między rentownością pożyczek i depozytów (np. różnicy między rentownością sprzedawanych bonów skarbowych, a oprocentowaniem lokat zawiązywanych jako rezerwy środków budżetowych).

Wartości parametrów określających rozkład potrzeb pożyczkowych budżetu oraz koszty niedoboru i nadmiaru podano w tablicach 1 - 2.

Tablica 1. Rozkład prawdopodobieństwa określający potrzeby pożyczkowe budżetu państwa w latach 2002 – 2004 (w zł).

	r=1	R=2	r=3
Rok 2002	61 719 000 000	63 719 000 000	59 719 000 000
Rok 2003	60 596 000 000	62 696 000 000	58 496 000 000
Rok 2004	56 554 000 000	58 854 000 000	54 254 000 000
Prawdopodobieństwo	0,5	0,3	0,2

Tablica 2. Parametry określające koszty niedoboru i nadmiaru (w %).

	2002	2003	2004
Koszt (rentowność) niedoboru (γ_{tr})	10,11	10,04	9,52
Koszt nadmiaru η_t	1,01	1,00	0,95

3.2. Określenie prognoz rentowności (funkcji CRR)

Metody predykcji funkcji CRR (symbol $\varphi^{(it)}(x_{it})$ w zależności (11)), stosowane we wcześniejszych pracach (por. L. Klukowski, E. Kuba (2001a, 2002)), opierały się na założeniu stabilności: poziomu stóp procentowych, popytu na instrumenty dłużne oraz podaży tych instrumentów w okresie obejmującym dane historyczne i horyzont strategii. Może ono nie być spełnione w okresie, którego dotyczy niniejsza praca, tj. w roku 2001 (dane historyczne) oraz w latach 2002 – 2004 (obejmujących strategię trzyletnią). Dlatego też konieczne jest *uodpornienie* metod predykcji na nie spełnienie w/w założeń.

Dokonanie predykcji funkcji CRR jest problemem o znacznym stopniu złożoności, ponieważ przedmiotem prognozy jest empiryczna funkcja nieliniowa (indukowana przez oferty składane przez inwestorów na przetargach), a nie pojedyncza wartość. Można dokonać tej predykcji na wiele sposobów; poniżej proponuje się metodę opartą na dwóch założeniach:

- postacie analityczne (kształty) funkcji CRR dla i-tej obligacji (symbol $\varphi^{(it)}(x_{it})$ we wzorze (11)), wynikające z przetargów, mają ustaloną liczbę wariantów. Można je zidentyfikować dokonując klasyfikacji określonego zbioru danych historycznych (np. przetargów z jednego roku), tzn. podziału tego zbioru na K_i jednorodnych podzbiorów ($K_i \geq 1$);
- postać prognozowanej funkcji CRR dla i-tej obligacji można wyrazić jako iloczyn jej przeciętnej wartości $\overline{CRR}_{it}$ w roku t (którego dotyczy prognoza) oraz pewnej funkcji wagowej (wzorca) $f_i(x_{it})$, będącej wypadkową jej zidentyfikowanych wariantów (kształtów); funkcja $f_i(x_{it})$ stanowi zatem iloraz wartości funkcji CRR oraz przeciętnej $\overline{CRR}_{it}$ (tzn. $f_i(x_{it}) = \varphi^{(it)}(x_{it})/\overline{CRR}_{it}$).

Założenia te pozwalają określić prognozę funkcji CRR dla każdej obligacji, w ustalonym roku t (t=1, 2, 3), w następujący sposób: • dokonać predykcji przeciętnej wartości $\overline{CRR}_{it}$ (i=1, ..., 4) w roku t, • wyznaczyć wzorce $f_i(\cdot)$, • określić iloczyn wartości przeciętnej i wzorca dla każdej obligacji. Problemem o podstawowym znaczeniu w tym postępowaniu jest wyznaczenie wzorców $f_i(\cdot)$. Proponuje się tego dokonać na podstawie wyników klasyfikacji funkcji CRR, obliczonych na podstawie przyjętego zbioru wcześniejszych przetargów. Klasyfikacja pozwala zidentyfikować (wyodrębnić) funkcje o tym samym kształcie, w szczególności stwierdzić czy wszystkie funkcje ze zbioru są jednorodne (mają ten sam kształt). W przypadku odpowiedzi twierdzącej należy określić ten kształt, traktując posiadany zbiór funkcji jako realizacje wzorca $f_i(\cdot)$, np. przez uśrednienie posiadanych realizacji. Jeśli natomiast liczba wzorców K_i jest większa niż jeden, tzn. istnieją różne wzorce

$f_{ik}(\cdot)$ (k=1, ...,K_i), konieczne jest dodatkowo określenie wzorca *zagregowanego* $f_i(\cdot)$, będącego ich wypadkową.

Liczba metod i algorytmów, które można wykorzystać w celu klasyfikacji kształtów funkcji jest znaczna. W niniejszej pracy wykorzystano dwie metody - statystyczną oraz opartą na koncepcji sieci neuronowych. Metodę statystyczną stanowił algorytm klasyfikacji oparty na porównaniach parami, które mogą zawierać błędy losowe (por. Klukowski L. (1990)). Do porównań parami wykorzystano trzy testy statystyczne; weryfikowano: poziom współczynnika korelacji dla poszczególnych par funkcji CRR z rozważanego zbioru, wartość ich współczynnika regresji liniowej oraz jednorodność rozkładów. Warunkiem stosowalności tego algorytmu jest, aby każde prawdopodobieństwo błędnego wyniku porównania (błędu I i II rodzaju w teście) było mniejsze niż 0,5.

Klasyfikację z wykorzystaniem sieci neuronowych przeprowadzono za pomocą tzw. sieci Kohonena (por. Osowski S. (1996)), przy wykorzystaniu programu Neural Connection® 2.2 SPSS. Klasyfikowane zbiory, będące zbiorami uczącymi dla sieci (ang. *training set*), zawierały niewielką liczbę elementów - równą liczbie przetargów w roku 2001 (metodę tę zastosowano do obligacji dwu- i pięcioletnich, sprzedawanych na comiesięcznych przetargach). W celu zwiększenia zbiorów uczących dokonano wielokrotnego losowania elementów ze zbioru przetargów z równymi prawdopodobieństwami wyboru; wygenerowano w ten sposób zbiory o liczebności 250 elementów każdy. Doświadczenia empiryczne wskazują, że powiększenie zbioru uczącego oraz losowe uporządkowanie jego elementów wpływa korzystnie na *jakość* klasyfikacji. Wyniki klasyfikacji za pomocą sieci można też przekształcić do postaci porównań parami i włączyć do algorytmu statystycznego, jakkolwiek nie gwarantują one spełnienia warunku stosowalności w/w algorytmu (odnośnie prawdopodobieństwa bezbłędności wyników porównania).

W celu dokonania klasyfikacji za pomocą algorytmu opartego na porównaniach parami należy:

(i) określić zbiór P_i przetargów zawierających klasyfikowane funkcje CRR. Jest on traktowany jako zbiór zawierający realizacje wzorców $f_{ik}(\cdot)$ funkcji CRR dla i-tej obligacji (i=1, ..., 4; k=1, ..., K_i), K_i – liczba wzorców i-tej obligacji (np. zbiór P_i może zawierać funkcje uzyskane na podstawie wyników przetargów z określonego roku lub kilku lat);

(ii) zweryfikować jednorodność każdej pary funkcji CRR ze zbioru P_i za pomocą testów statystycznych: zgodności rozkładów, regresji, korelacji, itp. (lub innych procedur);

(iii) zastosować algorytm przedstawiony w pracy Klukowskiego (1990), wyznaczający jednorodne podzbiory zbioru P_i (minimalizuje on pewną funkcję wyników porównań). Funkcje CRR zawarte w każdym z jednorodnych podzbiorów stanowią podstawę dla określenia wzorców $f_{ik}(\cdot)$ (i=1, ..., 4; k=1, …, K_i), a następnie, wzorca wypadkowego $f_i(\cdot)$. Sposób określenia wzorca wypadkowego omówiono w pkt. 4^0 poniżej.

Kolejne punkty schematu (i) – (iii) zrealizowano w następujący sposób.

1^0. Określono postać funkcji CRR dla każdej z obligacji (przy wykorzystaniu prognoz rentowności), na podstawie wszystkich przetargów z roku 2001. Dla każdego przetargu obliczono wartości tej funkcji w 500 równoodległych punktach (węzłach), przy czym maksymalny argument odpowiadał poziomowi popytu. Wartości te transformowano na dwa sposoby:

a) podzielono każdą z nich przez wartość przeciętną - *medianę* funkcji dla danego przetargu (dokładniej - mediana oznacza wartość $\varphi^{(it)}(x_{it}^{(p)}/2)$, $x_{it}^{(p)}$ – argument odpowiadający łącznemu popytowi zgłoszonemu na przetargu). Wartości funkcji CRR wyrażają się wówczas przez iloczyn mediany i funkcji transformowanej (wzorca). Wartości funkcji transformowanej zawarte są w otoczeniu liczby jeden. Jako miarę wartości przeciętnej wykorzystano medianę (a nie np. średnią), ponieważ jest ona odporna na nietypowe obserwacje - w tym przypadku nietypowe oferty na przetargu (większość przetargów zawiera pewną liczbę *krańcowych* ofert o b. niskich oraz wysokich rentownościach);
b) obliczono dla funkcji CRR, z każdego przetargu, wyrażenie stanowiące różnicę maksymalnej wartości funkcji oraz wartości w każdym z węzłów, podzieloną przez rozstęp (różnicę pomiędzy wartością maksymalną i minimalną); przekształcenie takie transformuje oryginalne wartości funkcji CRR do przedziału [0, 1] (jest to niezbędne dla zastosowania testów zgodności (rozkładów prawdopodobieństwa), opartych na dystrybuantach).

2^0. Zastosowano trzy testy jednorodności funkcji CRR dla poszczególnych par przetargów, dla każdej obligacji:

a) test weryfikujący hipotezę, iż współczynnik korelacji liniowej r_{pq} dla funkcji CRR_p oraz CRR_q (transformowanych wg mediany), odpowiadających p-temu oraz q-temu przetargowi w danym roku ($p \neq q$), przekracza określoną liczbę ρ bliską jedności (przyjmowano ją z przedziału [0.99, 1)). Wysoka wartość współczynnika korelacji wskazuje na *podobieństwo* kształtów funkcji (jedna z nich jest w przybliżeniu liniową funkcją drugiej). Hipoteza zerowa w teście miała postać $H_0 : r_{pq} = \rho$, przy alternatywie $H_1 : r_{pq} > \rho$; odrzucenie hipotezy zerowej traktowano jako jednorodność porównywanych funkcji;

b) test weryfikujący hipotezę, iż współczynnik kątowy regresji $CRR_p = \beta_{pq}+\gamma_{pq}CRR_q$ (funkcji CRR_p i CRR_q transformowanych wg mediany), wyznaczonej metodą najmniejszych kwadratów, zawiera się w przedziale $[\gamma_{min}; \gamma_{max}]$, będącym *otoczeniem* jedności, przy czym przyjmowano $\gamma_{min} =1-\varepsilon$; $\gamma_{max} =1+\varepsilon$, ε - rzędu 0,1 (dokładniej stosowano dwukrotnie jednostronny test t-Studenta, tj. dla hipotezy H_o: $\gamma_{pq}=1-\varepsilon$ przy alternatywie H_1: $\gamma_{pq}<1-\varepsilon$ oraz dla hipotezy H_o: $\gamma_{pq}=1+\varepsilon$ przy alternatywie H_1: $\gamma_{pq}>1+\varepsilon$). Przyjmowano jednorodność porównywanych funkcji w przypadku braku podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, dla obu alternatyw. Zawieranie się współczynnika kątowego w otoczeniu jedności oznacza, że dynamika (pochodna) obu funkcji jest zbliżona;

c) test weryfikujący jednorodność rozkładów dwóch zmiennych losowych – wykorzystano test Kołmogorowa – Smirnowa (por. Domański (1990) rozdz. 3) dla dwóch dystrybuant, opierając się na transformacji funkcji CRR do przedziału [0, 1]. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o identyczności rozkładów (tzn, H_0: $CRR_p=CRR_q$, przy alternatywie H_1: $CRR_p \neq CRR_q$) traktowano jako jednorodność porównywanych funkcji.

W przypadku różnych wyników poszczególnych testów stosowano zasadę większości (celowość takiego postępowania uzasadniono w pracy Klukowski L. 1994 (pkt. 5.2)).

3^0. Do wyników z pkt. 2^0 stosowano algorytm klasyfikacji oparty na wynikach testów. Dla każdego podzbioru, otrzymanego w wyniku klasyfikacji, zawierającego więcej niż jeden element obliczano średnią arytmetyczną należących do niego funkcji transformowanych wg mediany (w każdym z 500 węzłów), otrzymując w wyniku funkcje $f_{ik}(\cdot)$ $(1 \le k \le K_i)$.

4^0. Funkcje $f_{ik}(\cdot)$ wykorzystano jako podstawę dla wyznaczenia funkcji wypadkowej $f_i(\cdot)$. W przypadku, gdy $K_i=1$ (oznacza to jednorodność wszystkich klasyfikowanych funkcji CRR), funkcję wypadkową $f_i(\cdot)$ uzyskuje się w pkt. 3^0 powyżej. W przypadku, gdy liczba K_i jest większa niż jeden, problem wyboru funkcji wzorca staje się bardziej złożony. Można go rozwiązać na wiele sposobów, w szczególności przez:

- wybór jednego z istniejących wzorców - reprezentatywnego (lub dominującego) dla klasyfikowanych podzbiorów;
- określenie wzorca *wypadkowego* $f_i(\cdot)$ (i=1, … ,4) jako średniej ważonej z $f_{ik}(\cdot)$. Wagami mogą być np. częstości występowania k-tego wariantu $f_{ik}(\cdot)$ ($1 \le k \le K_i$) w rozważanym zbiorze (lub w ciągu roku), z ewentualnym pominięciem wariantów nietypowych (*outliers*), lub też wielkości stanowiące funkcje wielu różnorodnych czynników. Zastosowanie wag zależnych od wielu czynników pozwala odzwierciedlić nie tylko różnice w liczebności poszczególnych podzbiorów jednorodnych, ale również wpływ innych determinant, np. poziomu sprzedaży na przetargach, którym odpowiadają poszczególne warianty. Funkcje $f_i(\cdot)$ wyrażają się wówczas zależnościami: $f_i(\cdot) = \sum_{k=1}^{K_i} q_{ik} f_{ik}(\cdot)$, a składniki funkcji celu $x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))\varphi^{(it)}(x_{it})$ można zapisać w postaci:

$$x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))\varphi^{(it)}(x_{it}) = x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))\overline{CRR}_{it} f_i(x_{it}) = x_{it}(M - d^{(it)}(x_{it}))\overline{CRR}_{it} \sum_{k=1}^{K_i} q_{ik} f_{ik}(x_{it}) \tag{18}$$

gdzie:

q_{ik} - waga k-tego wariantu (uwzględniająca wzięte pod uwagę czynniki), przy czym

$\sum_{k=1}^{K_i} q_{ik} = 1$,

$d^{(it)}(x_{it})$ - średnie dyskonto odpowiadające wartości x_{it}, tj. sprzedaży i-tej obligacji w roku t; w przypadku obliczenia wartości funkcji $\varphi^{(it)}(x_{it})$ w 500 węzłach, argument ma postać $x_{it} = m(x_{it}^{(p)}/500)$, m=1, ..., 500;

(znaczenie pozostałych symboli – jak poprzednio).

Realizacja przedstawionego powyżej schematu wyznaczenia prognoz funkcji CRR dla poszczególnych obligacji, w kolejnych latach strategii, przebiega wg następujących punktów:

1) określić prognozę mediany $\overline{CRR}_{it}$ (i=1, ..., 4; t=1, 2, 3) funkcji CRR dla i-tej obligacji, w kolejnych latach strategii;

2) określić maksymalną wartość argumentu $x_{it}^{(p)}$ (oczekiwany poziom popytu) funkcji CRR dla i-tej obligacji w roku t. Wartość tę można wyznaczyć na podstawie relacji popytu do podaży w poprzednich okresach (np. w okresie, z którego pochodzą elementy

zbioru P_i) lub na podstawie oceny *potencjału rynku*. Następnie określić wartości funkcji $\varphi^{(it)}(x_{it})$, dla $x_{it} = m(x_{it}^{(p)}/500)$ (m=1, ..., 500), z zależności: $\varphi^{(it)}(x_{it}) = \overline{CRR}_{it} f_i(x_{it})$ (przypomnijmy, że wartość funkcji $f_i(\cdot)$ obliczono dla 500 węzłów).

W celu wyznaczenia dyskonta $d^{(it)}(x_{it})$ zastosowano sposób omówiony w pracy: L. Klukowski, E. Kuba (2001a), w rozdz. IV. Punkt wyjścia stanowi prognozowana postać funkcji CRR, określona dla okresu życia każdej z obligacji; będzie ona oznaczana symbolem $\varphi_z^{(it)}(x_{it})$ (i=1, 2, 3, 4; t=1, 2, 3). Różnica pomiędzy funkcjami $\varphi^{(it)}(x_{it})$ oraz $\varphi_z^{(it)}(x_{it})$ polega na długości okresu inwestycji w formułach określających składaną stopę zwrotu (podanych po wzorze (1)); w przypadku funkcji $\varphi^{(it)}(x_{it})$ jest on wyznaczony przez horyzont optymalizacji H, w przypadku funkcji $\varphi_z^{(it)}(x_{it})$ - przez okres życia obligacji (różny dla każdej z nich). Obliczono wartości tych funkcji w 500 węzłach, po czym wyliczono na tej podstawie kapitał $M\text{-}d^{(it)}(x_{it})$ z zależności:

$$M - d^{(it)}(x_{it}) = \Big(\sum_{\tau=1}^{n_i-1} S_{it\tau} \prod_{j=\tau+1}^{n_i} (1 + r_{jt}) + M + S_{itn_i}\Big) / (\varphi_z^{(it)}(x_{it}) + 1)^{n_i},$$

gdzie:

n_i – długość okresu życia (liczba lat) i-tej obligacji;

$S_{it\tau}$ - przepływ finansowy (odsetki) wynikający z i-tej obligacji w okresie (roku) τ, sprzedanej w roku t.

Ponieważ M (nominał) obligacji jest stałą (1000 zł), z powyższej zależności można wyznaczyć funkcję określającą dyskonto $d^{(it)}(x_{it})$.

Należy zaznaczyć, że w przypadku K_i>1, rozwiązania optymalne rozważanego zadania, odpowiadające różnym sposobom określenia wzorca wypadkowego $f_i(\cdot)$, mogą być nieidentyczne. Dokonując wyboru sposobu można się kierować różnymi kryteriami, np. dążnością do maksymalizacji precyzji wyniku, lub minimalizacji nakładu obliczeń albo uzależnić rodzaj kryterium od postaci klasyfikacji. Zauważmy, że rozwiązanie problemu (11) - (17) dotyczy zadania zagregowanego w skali rocznej, natomiast rzeczywista sprzedaż dokonuje się na poszczególnych przetargach. Rozwiązanie zadania zagregowanego jest zatem przybliżeniem rzeczywistego problemu. W ogólnym przypadku, najbardziej precyzyjnym przybliżeniem problemu rzeczywistego jest zastosowanie wyrażeń (18), z wagami odzwierciedlającymi wszystkie czynniki determinujące kształt funkcji CRR. Postępowanie takie charakteryzuje się zwykle największą złożonością i pracochłonnością, ponieważ wymaga określenia wag q_{ik} oraz uśrednienia wszystkich wziętych pod uwagę wzorców. W przypadku, gdy postać wag zależy głównie od liczebności podzbiorów uzyskanych w trakcie klasyfikacji, niewiele gorszą dokładnością powinno się charakteryzować rozwiązanie odpowiadające średniej ważonej, z wagami równymi częstościom występowania. Jeśli istnieje wariant dominujący (obejmujący znaczną część sprzedaży, np. ponad 90%) lub *typowy* (*zbliżony* do pozostałych), to akceptowalną dokładność może zapewnić wybór wzorca reprezentanta (postępowanie takie wymaga najmniejszego nakładu pracy). Występowanie *nietypowych* przetargów, odpowiadających wyjątkowym warunkom na rynku finansowym (np. związanych z wysokim poziomem ryzyka), czyni zasadnym ich pominięcie w trakcie określania wzorca wypadkowego.

Sposób postępowania scharakteryzowany w pkt 1^0 - 3^0 zawiera elementy arbitralne oraz przybliżone, jednakże zapewnia nieporównywalnie wyższy poziom obiektywności w stosunku do metod heurystycznych, intuicyjnych, itp. Jest również *bogatszy informacyjnie*, ponieważ generuje wiedzę nt. wielu własności elementów procesu decyzyjnego, a zwłaszcza postaci funkcji CRR oraz ich różnorodności. W szczególności, możliwe jest określenie własności składowych funkcji celu, odpowiadających poszczególnym obligacjom, wynikających z postaci ich pochodnych (postać pierwszej i drugiej pochodnej podano w pracy L. Klukowski *Optymalizacja zarządzania instrumentami dłużnymi Skarbu Państwa*). Ponadto, wyniki klasyfikacji funkcji CRR z poszczególnych przetargów można wykorzystać do sformułowania zadań optymalizacyjnych dla struktury sprzedaży dla ciągu kolejnych przetargów, w *podokresach* strategii trzyletniej, np. w ciągu jednego roku budżetowego. Umożliwia to uzyskanie zadań stanowiących *pomost* pomiędzy relatywnie prostymi zadaniami dla poszczególnych przetargów (przedstawionymi w rozdz. III i IV pracy Klukowski L., E. Kuba (2001a)) oraz złożonymi zadaniami dla strategii trzyletniej. Należy zaznaczyć, że w przypadku istnienia wielu wzorców (K_i>1) funkcji CRR dla poszczególnych obligacji, zachodzi dodatkowo potrzeba *prognozowania* wzorca dla każdego przetargu, co jest odrębnym problemem. Znajomość kształtów funkcji CRR, charakteryzujących *zbiorowe* zachowania inwestorów, może być również wykorzystana w innych modelach decyzyjnych, np. bardziej złożonych modelach gier.

Zaproponowana metoda prognozowania funkcji CRR jest relatywnie prosta w stosunku do *trudności* problemu; może być ona modyfikowana i doskonalona w różny sposób lub też zastąpiona innymi algorytmami predykcji.

Należy dodać, że klasyfikacja przy użyciu algorytmu wykorzystującego porównania parami, otrzymane na podstawie testów, jest bardziej złożona - niż przy użyciu algorytmów opartych na sieciach neuronowych. Stwarza jednak możliwość – przez odpowiedni dobór testów – do bardziej precyzyjnego, wszechstronnego i ukierunkowanego zdefiniowania jednorodności klasyfikowanych funkcji. W rozważanym przypadku, oba algorytmy, tj. porównania parami oraz sieci Kohonena, prowadziły do zbliżonych wyników. Postacie prognoz funkcji CRR dla poszczególnych obligacji na rok 2002, określone na podstawie przetargów z roku 2001, przedstawiono graficznie na rys. 1. Wyniki klasyfikacji funkcji CRR dla obligacji pięcioletniej, z kolejnych przetargów w roku 2001, zilustrowano na rys. 2.

4. Wyniki empiryczne

Powyższe zadanie sformułowano i rozwiązano dla okresu 2002 – 2004. Uwzględniono w nim hurtowe instrumenty dłużne emitowane w 2001 r. Numeryczną postać funkcji celu oraz funkcji określającej kapitał poszczególnych obligacji, wyznaczono (aproksymowano wielomianami) analogicznie jak w pracy L. Klukowski, E. Kuba (2002). Parametry aproksymacji, dla roku 2002, podano w tablicy 3.

Numeryczną postać zadania można wyrazić w następujący sposób:

- aproksymowana postać funkcji celu

$$\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{m_{it}} a_{it\ell}\, x_{it}^{\ell} + \sum_{t=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} p_r(\gamma_t y_{tr} + \eta_t z_{tr}) \to \min ,$$

gdzie:

x_{it}^{ℓ} - zmienna x_{it} w ℓ-tej potędze,

$a_{it\ell}$ - współczynnik wielomianu aproksymacyjnego dla zmiennej x_{it} w ℓ-tej potędze (uzyskany metodą najmniejszych kwadratów) – wartości podano w tablicy 3;

m_{it} – stopień wielomianu aproksymacyjnego dla zmiennej x_{it} (w większości z przedziału 10 – 11 dla poszczególnych zmiennych);

- warunki ograniczające:

– zakresy zmiennych

$x_{it}^{min} \le x_{it} \le x_{it}^{max}$ (i =1, ..., 4; t= 1, ..., 3),

wartości x_{it}^{min} oraz x_{it}^{max} (w tys.) w tabeli poniżej;

	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{42}	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{43}
x_{it}^{min}	20000	30000	5000	1100	20000	30000	5000	1100	20000	30000	5000	1100
x_{it}^{max}	35000	50000	12000	2000	35000	50000	12000	2000	35000	50000	12000	2000

– poziom potrzeb pożyczkowych budżetu (kapitał) w kolejnych latach, dla poszczególnych realizacji niedoboru y_{tr} i nadmiaru z_{tr} (t=1, 2, 3; r=1, 2, 3):

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell} x_{i,1}^{\ell} + y_{1,1} - z_{1,1} = 61\ 719\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell} x_{i,1}^{\ell} + y_{1,2} - z_{1,2} = 63\ 719\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell} x_{i,1}^{\ell} + y_{1,3} - z_{1,3} = 59\ 719\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell} + y_{2,1} - z_{2,1} = 60\ 596\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell} + y_{2,2} - z_{2,2} = 62\ 696\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell} + y_{2,3} - z_{2,3} = 58\ 496\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell} + y_{3,1} - z_{3,1} - Mx_{1,1} = 56\ 554\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell} + y_{3,2} - z_{3,2} - Mx_{1,1} = 58\ 854\ 000\ 000,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell} + y_{3,3} - z_{3,3} - Mx_{1,1} = 54\ 254\ 000\ 000;$$

($b_{it\ell}$ – współczynniki wielomianu aproksymacyjnego – analogiczne jak $a_{it\ell}$, n_{it} – stopień wielomianu dla zmiennej x_{it}, równy 1 lub z przedziału 9 – 11 dla poszczególnych zmiennych);

– poziom kosztów obsługi długu w latach 2003 – 2006 wynikający z emisji w latach 2002 - 2004:

$$85\,x_{2,1}+65\,x_{3,1}+112{,}5\,x_{4,1}+0{,}5(0{,}1004\,y_{2,1}+0{,}01\,z_{2,1})+0{,}3(0{,}1004\,y_{2,2}+0{,}01\,z_{2,2})+$$
$$+0{,}2(0{,}1004\,y_{2,3}+0{,}01\,z_{2,3}) \le 21\ 000\ 000\ 000,$$

$$1000\,x_{1,1}-\sum_{\ell=0}^{1} b_{1,1,\ell}\,x_{1,1}^{\ell}+85\,x_{2,1}+60\,x_{3,1}+104{,}1\,x_{4,1}+85\,x_{2,2}+60\,x_{3,2}+104{,}1\,x_{4,2}+$$

$$+ 0,5(0,0952\, y_{3,1} + 0,0095\, z_{3,1}) + 0,3(0,0952\, y_{3,2} + 0,0095\, z_{3,2}) +$$

$$+ 0,2(0,0952\, y_{3,3} + 0,0095\, z_{3,3}) \leq 27\,000\,000\,000,$$

$$1000\, x_{1,2} - \sum_{\ell=0}^{1} b_{1,2,\ell}\, x_{1,2}^{\ell} + 85\, x_{2,1} + 60\, x_{3,1} + 98,3\, x_{4,1} + 85\, x_{4,2} + 60\, x_{3,2} + 98,3\, x_{4,2} +$$

$$+85\, x_{2,3} + 60\, x_{3,3} + 98,3\, x_{4,3} \leq 31\,000\,000\,000,$$

$$1000\, x_{1,3} - \sum_{\ell=0}^{1} b_{1,3,\ell}\, x_{1,3}^{\ell} + 85\, x_{2,1} + 60\, x_{3,1} + 91,6\, x_{4,1} + 85\, x_{2,2} + 60\, x_{3,2} + 91,6\, x_{4,2} +$$

$$+85\, x_{2,3} + 60\, x_{3,3} + 91,6\, x_{4,3} \leq 31\,000\,000\,000,$$

– udział obligacji stałoprocentowych w łącznej emisji obligacji w każdym roku:

$$0,75 \leq \sum_{i=1}^{3} x_{it} / \sum_{i=1}^{4} x_{it} \leq 0,985, \qquad (t=1, 2, 3),$$

– udział obligacji zmiennoprocentowych w łącznej emisji obligacji w każdym roku:

$$0,015 \leq x_{4t} / \sum_{i=1}^{4} x_{it} \leq 0,250, \qquad (t=1, 2, 3),$$

– średni okres zapadalności obligacji emitowanych w każdym roku:

$$3,5 \leq (2\, x_{1,t} + 5\, x_{2,t} + 10(x_{3,t} + x_{4,t})) / \sum_{i=1}^{4} x_{it} \leq 5,4\,, \qquad (t=1, 2, 3),$$

– średnia duracja obligacji stałoprocentowych emitowanych w każdym roku (przyjęto stałą wartość duracji dla każdej obligacji w kolejnych latach):

$$3,0 \leq (2\, x_{1,t} + 4,2\, x_{2,t} + 7,5\, x_{3,t}) / \sum_{i=1}^{3} x_{it} \leq 4,3\,, \qquad (t=1, 2, 3),$$

– wartość formy kwadratowej macierzy semiwariancji i semikowariancji (por. L. Klukowski, E. Kuba (2001a)) w każdym roku (założono identyczność macierzy w każdym roku):

$$[z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}, z_{4t}]\, \mathbf{Q}\, [z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}, z_{4t}]^{T} \leq 0,005 \qquad (t=1, 2, 3)$$

(symbol $[\cdot]^{T}$ oznacza transpozycję wektora, iloczyn jest formą kwadratową),

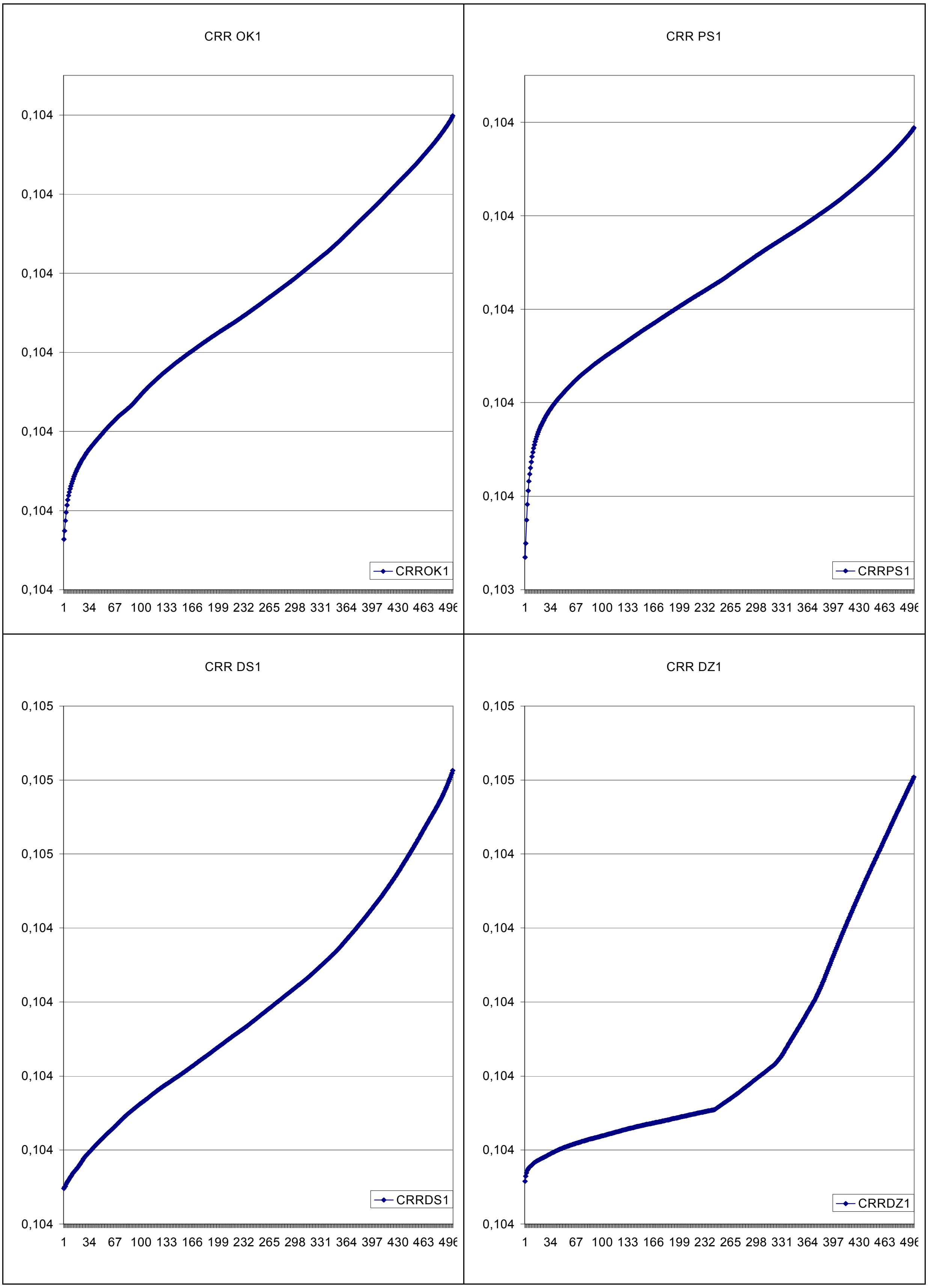
- poziom niedoboru lub nadmiaru:

$$y_{1,1} = \max\left\{ 61719000000 - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell}\, x_{i,1}^{\ell},\ 0 \right\},$$

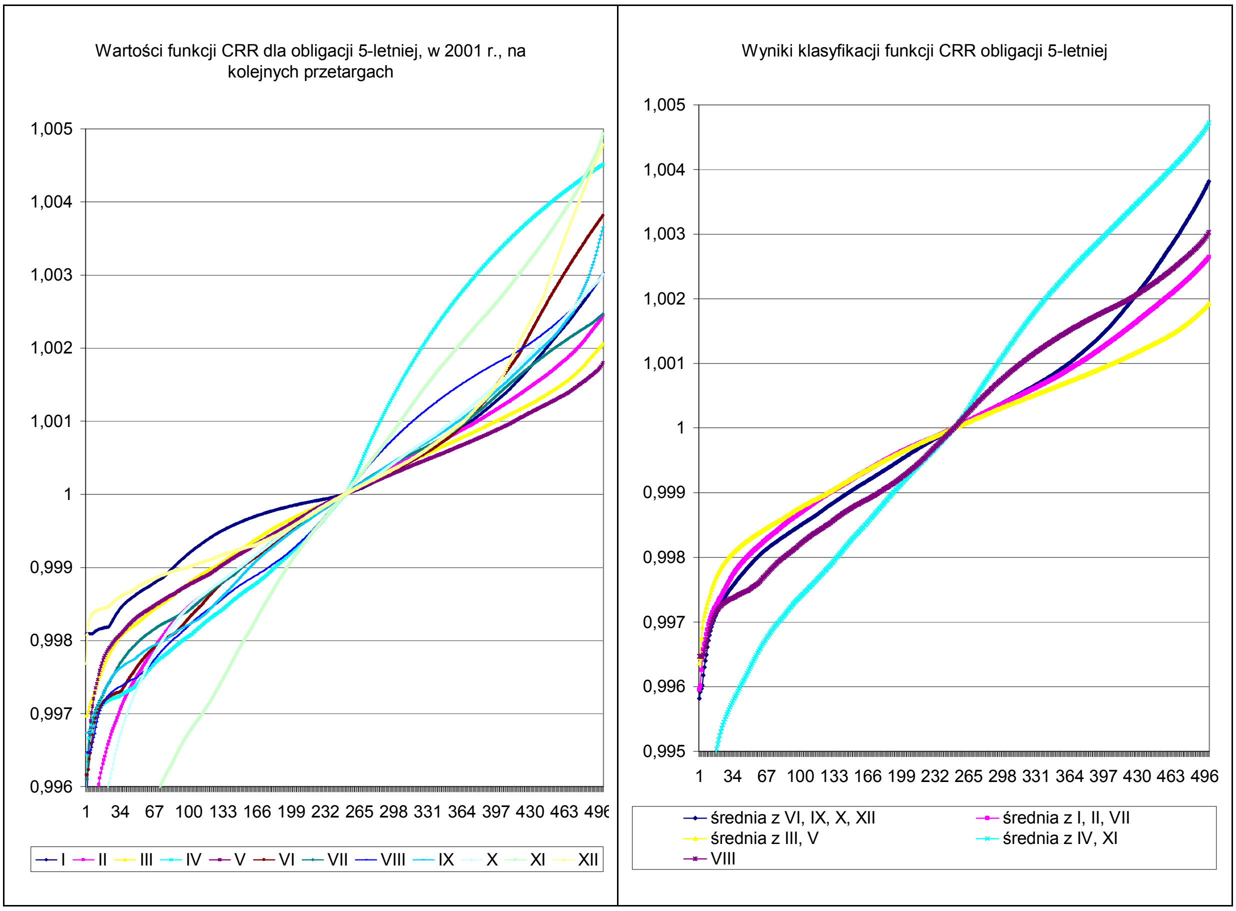
$$z_{1,1} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell}\, x_{i,1}^{\ell} - 61719000000,\ 0 \right\},$$

$$y_{1,2} = \max\left\{ 63719000000 - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell}\, x_{i,1}^{\ell},\ 0 \right\},$$

Rys.1. Prognozy funkcji CRR dla poszczególnych obligacji na rok 2002, określone na podstawie przetargów z roku 2001 (OK1 – obligacja 2-letnia, PS1 – 5-letnia, DS1 – 10-letnia stałoprocentowa, DZ1 – 10-letnia zmiennoprocentowa).



Rys. 2. Wyniki klasyfikacji funkcji CRR dla obligacji pięcioletniej z kolejnych przetargów (z roku 2001).



$$z_{1,2} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell} x_{i,1}^{\ell} - 63\,719\,000\,000,\ 0 \right\},$$

$$y_{1,3} = \max\left\{ 59\,719\,000\,000 - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell} x_{i,1}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{1,3} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i1}} b_{i,1,\ell} x_{i,1}^{\ell} - 59\,719\,000\,000,\ 0 \right\},$$

$$y_{2,1} = \max\left\{ 60\,596\,000\,000 - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{2,1} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell} - 60\,596\,000\,000,\ 0 \right\},$$

$$y_{2,2} = \max\left\{ 62\,696\,000\,000 - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{2,2} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell} - 62\,696\,000\,000,\ 0 \right\},$$

$$y_{2,3} = \max\left\{ 58\,496\,000\,000 - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{2,3} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i2}} b_{i,2,\ell} x_{i,2}^{\ell} - 58\,496\,000\,000,\ 0 \right\},$$

$$y_{3,1} = \max\left\{ 56\,554\,000\,000 + M x_{1,1} - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{3,1} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell} - 56\,554\,000\,000 - M x_{1,1},\ 0 \right\},$$

$$y_{3,2} = \max\left\{ 58\,854\,000\,000 + M x_{1,1} - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{3,2} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell} - 58\,854\,000\,000 - M x_{1,1},\ 0 \right\},$$

$$y_{3,3} = \max\left\{ 54\,254\,000\,000 + M x_{1,1} - \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,\ell} x_{i,3}^{\ell},\ 0 \right\},$$

$$z_{3,3} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=0}^{n_{i3}} b_{i,3,1} x_{i,3}^{\ell} - 54\,254\,000\,000 - M x_{1,1},\ 0 \right\}$$

Rozwiązanie optymalne zadania stochastycznego uzyskano przy wykorzystaniu procedury *solver* z pakietu Excel. Wartość funkcji celu, odpowiadająca rozwiązaniu podanemu w tablicach 4 (zmienne decyzyjne określające sprzedaż obligacji) oraz 5 (wartości niedoboru/nadmiaru), wyniosła 20 816 919 563 zł. Koszty obsługi długu w poszczególnych latach 2003-2006 ukształtowały się – odpowiednio - na poziomie (w mld zł): 15,70; 19,28; 23,38; 30,35; 30,38. Wielkości charakteryzujące pozostałe ograniczenia podano w tablicy 6.

W trakcie obliczeń uzyskano wiele rozwiązań suboptymalnych o wartościach funkcji celu zbliżonych do rozwiązania optymalnego (różnice względne poniżej 0,01%), natomiast istotnie różniących się strukturą. Różnice te wpływały znacząco na poziom szeregu własności rozwiązania (emitowanego długu). Świadczy to o istnieniu wielu rozwiązań generujących zbliżone koszty obsługi, a różniących się wartościami miar poziomu ryzyka, rozkładem zapadalności, itp. Nie jest to zaskakujące, ponieważ w przypadku dyskretnych problemów optymalizacyjnych minimum funkcji celu może odpowiadać wielu (nieidentycznym) rozwiązaniom. Rozważane zadanie stanowi natomiast aproksymację zadania dyskretnego.

Tablica 3. Parametry aproksymacji wielomianowych składników funkcji celu, dla obligacji hurtowych, w roku 2002.

Współczynnik przy zmiennej w potędze	Współczynnik dla obligacji			
	OK (x_{11})	PS (x_{21})	DS (x_{31})	DZ (x_{41})
0 (stała)	1 474,20	-6 023,09	692,43	-273 959,70
1	79,20	91,52	77,88	100,46
2	1,17	2,01E-08	2,69E-08	×
3	-2,06E-15	-2,89E-15	-5,81E-15	×
4	2,31E-22	2,69E-22	1,57E-21	×
5	-1,53E-29	-1,51E-29	-3,43E-28	×
6	6,32E-37	5,31E-37	5,19E-35	×
7	-1,67E-44	-1,16E-44	-4,93E-42	×
8	2,85E-52	1,54E-52	2,77E-49	×
9	-3,01E-60	-1,13E-60	-8,39E-57	×
10	1,79E-68	3,53E-69	1,05E-64	×
11	-4,61E-77	×	×	×

Zapis xEy oznacza liczbę x pomnożoną przez 10 do potęgi y,
× - parametr równy zeru (tzn. nie uwzględniony w aproksymacji).

Tablica 4. Optymalne rozwiązanie zadania stochastycznego dla trzyletniej strategii zarządzania długiem.

Rodzaj instrumentu (zmienna decyzyjna)	Wartości bezwzględne zmiennych decyzyjnych w roku (liczba nominałów):			Wartości względne zmiennych decyzyjnych (w %) w roku:		
	2002	2003	2004	2002	2003	2004
Obligacja 2-letnia (x_{1t})	20 000 000	35 000 000	35 000 000	27,1	46,4	38,3
Obligacja 5-letnia (x_{2t})	45 820 439	31 327 934	43 957 293	62,2	41,5	48,0
Oblig. 10-letnia stałoprocentowa (x_{3t})	6 769 539	8 029 849	10 519 893	9,2	10,6	11,5
Oblig. 10-letnia zmiennoprocentowa (x_{4t})	1 105 431	1 139 156	2 000 000	1,5	1,5	2,2

Tablica 5. Wartości niedoboru i nadmiaru w rozwiązaniu optymalnym (w mln zł).

Prawdopodobieństwo Realizacji	Rok 2002		Rok 2003		Rok 2004	
	Niedobór	Nadmiar	Niedobór	Nadmiar	Niedobór	Nadmiar
0,5	0,0	0,0	0,0	2 100,0	0,0	2 300,0
0,3	2 000,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,2	0,0	2 000,0	0,0	4 200,0	0,0	4 600,0

Tablica 6. Wartości funkcji występujących w warunkach ograniczających, odpowiadające rozwiązaniu optymalnemu.

	Rok 2002	Rok 2003	Rok 2004
Udział obligacji stałoprocentowych w sprzedaży	0,985	0,985	0,978
Udział obligacji zmiennoprocentowych w sprzedaży	0,015	0,015	0,022
Średni okres zapadalności portfela obligacji	4,72	4,22	4,54
Srednia duracja portfela obligacji	3,90	3,52	3,734
Wartość formy kwadratowej macierzy wariancji i kowariancji	0,0039	0,0047	0,0042

5. Podsumowanie i wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono metodologię optymalizacji (minimalizacji) kosztów obsługi długu trzyletniej strategii zarządzania długiem Skarbu Państwa z uwzględnieniem stochastycznej postaci warunków ograniczających poziom potrzeb pożyczkowych budżetu. Dzięki zastosowaniu optymalizacji stochastycznej, uzyskano rozwiązanie optymalne przy założeniu trzech możliwych wariantów kształtowania się potrzeb pożyczkowych budżetu, o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Metodologię optymalizacji zastosowaną w tej pracy można wykorzystać do innych problemów decyzyjnych, w których występują elementy stochastyczne - nie określone jednoznacznie (*deterministycznie*) w chwili podejmowania decyzji, np. do zarządzania płynnością budżetu państwa. Doświadczenia empiryczne nabyte w trakcie opracowywania i rozwiązywania omówionego zadania wskazują ponadto, że uzyskanie rozwiązań, mimo nieliniowości i znacznej liczby zmiennych, nie napotyka na trudności nie do pokonania, przy wykorzystaniu oprogramowania typu Excel. Pozwala to optymistycznie oceniać szanse rozwiązania zadań o większej złożoności, np. zawierających zmienne losowe również w funkcji celu (por. Grabowski (1980), pkt. 19.4). Stwarza też możliwość rozwiązania problemów uwzględniających wielowariantowość prognoz rentowności, o znanych rozkładach prawdopodobieństwa, bez stosowania technik (teorii gier) wykorzystanych w pracy L. Klukowski, E. Kuba (2002), ale kosztem zwiększenia złożoności zadania - głównie liczby zmiennych decyzyjnych oraz *wymiarowości* rozkładów prawdopodobieństwa. Czyni to zasadnym stwierdzenie, iż kompleksowa optymalizacja zarządzania długiem publicznym jest w pełni realna, przy wysokim poziomie adekwatności modeli optymalizacyjnych do rzeczywistych warunków procesu decyzyjnego, nieporównywalnie wyższym w stosunku do postępowania intuicyjnego.

Zastosowanie metodologii optymalizacyjnej uwypukla też elementy procesu decyzyjnego pomijane w przypadku zarządzania długiem opartego jedynie na intuicji i doświadczeniu. Powoduje również zwiększenie czytelności założeń i wyników, jak też umożliwia kompleksową komputeryzację obliczeń. W konsekwencji zapewnia podniesienie jakości wyników, zmniejszenie nakładu pracy ludzkiej, a równocześnie skrócenie czasu niezbędnego na uzyskanie rozwiązań. Nakład pracy sprowadza się – w ujęciu optymalizacyjnym – głównie do funkcji eksperckich: formułowania celów, ograniczeń, wymogów, postulatów, opracowania oprogramowania komputerowego, itp.

Z punktu widzenia wartości merytorycznej, metody optymalizacyjne *drastycznie przerastają* stosowane obecnie tradycyjne zarządzanie długiem. Mogą też być źródłem niepomijalnych oszczędności wydatków budżetu państwa. Niemożność ich praktycznego wdrożenia, mimo poniesienia nakładów na prace rozwojowe (zakończone sukcesem), jawi się zatem jako sytuacja kuriozalna. Za przyczynę tego stanu rzeczy nie może być uznany poziom złożoności matematycznej, ponieważ wykorzystane metody powstały w drugiej połowie zeszłego wieku i są zawarte w programach studiów wyższych – nie tylko matematycznych czy informatycznych, ale również ekonomicznych, technicznych, i innych.

Literatura.

Domański Cz. (1990) Testy statystyczne. PWE, Warszawa.

Grabowski W. (1980) *Programowanie matematyczne.* PWE, Warszawa.

Klukowski L. (1990) *Algorytm klasyfikacji prób w przypadku nieznanej liczby generujących je zmiennych losowych*. Przegląd Statystyczny R. XXXVII, nr 3.

Klukowski L. (1994) *Some probabilistic properties of the nearest adjoining order method and its extensions*. Annals of Operations Research vol. 51.

Klukowski L. (1998) *Problemy optymalizacji zarządzania zadłużeniem budżetu państwa w Polsce*. Nasze Finanse – nr 26, marzec – kwiecień, Wyd. Biura Prasowego Ministerstwa Finansów.

Klukowski L. (2000) *Sformułowanie zadań optymalizacyjnych dla minimalizacji kosztów obsługi skarbowych instrumentów dłużnych*. Bank i Kredyt nr 3, NBP.

Klukowski L. (w przygotowaniu) *Optymalizacja zarządzania instrumentami dłużnymi Skarbu Państwa*.

Klukowski L., Kuba E. (2001a) *Optymalizacja zarządzania długiem Skarbu Państwa. Minimalizacja kosztów obsługi instrumentów dłużnych emitowanych na rynku krajowym*. NBP Materiały i Studia, zeszyt 119.

Klukowski L., Kuba E. (2001b) *Minimization of public debt servicing costs based on nonlinear mathematical programming approach*. Control and Cybernetics, vol. 30, no 1. IBS PAN.

Klukowski L., Kuba E. (2002) *Optymalizacja zarządzania długiem Skarbu Państwa w horyzoncie trzyletnim*. W: Kacprzyk J., Węglarz J. (red.) *Badania Operacyjne i Systemowe wobec wyzwań XXI wieku. Modelowanie i optymalizacja, metody i zastosowania.* Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa. Referat wygłoszony na VII Konferencji Polskiego Towarzystwa Badań Operacyjnych i Systemowych BOS'2002, zorganizowanej w Warszawie, w dn. 26 – 28.09.2002 r.

Osowski S. (1996) *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*. WNT, Warszawa (wyd. drugie).

SUMMARY

The paper presents stochastic optimisation approach to strategic public debt management with an example of application to Polish case. Stochastic features appear in many components of debt management process, especially forecasts of interest rates and budgetary requirements level. Stochastic character of interest rates forecasts can be taken into account in constraints of risk level, e.g. quadric of variance and covariance matrix. The constraints of budgetary requirements needs another approach. They are of special importance, because their *variation* is typically significant and can influence in *unexpected* way the form of optimal solution. The spectrum of stochastic approaches (tasks) applicable in such case is quite extensive. However, practical matters, e.g. computation time, possibility of estimation of necessary parameters (random variables distributions), etc. impose significant limitations in this area. Therefore, it has been implemented the method, which reflects the basic features of decision making realities. Such criteria satisfies so called Dantzig-Madansky approach. In this approach the parameter (vector) determining the constraint (its right-hand side) is the multivariate random variable with known distribution. The case, when the constraint is not satisfy as equality indicates surplus or shortage, that implies some costs; the expected value of these costs is incorporated into criterion function. The surplus or shortage are taken into account also in the form of constraints set. Solving of such task is more difficult, than its deterministic version, but allows to capture more general case.

The approach was applied to optimisation of three-years debt management strategy in Poland. The numerical form of the task needs prediction some number of quantities, especially the functions expressing profitability of debt instruments (assumed in the form of compound rate of return - CRR) for the strategy period. Prediction of these functions is not a trivial problem. In earlier papers of authors some *aggregated approach* was applied for this purpose (all bids from auctions from a whole year were considered as result of one auction). This approach may be applied only in some circumstances, especially when interest rates are *stable* in estimation period and optimisation horizon (may be not valid currently). Therefore, it requires improvement. This approach is replaced in the paper with the prediction method based on *identification* of typical features (shape) of CRR function. This identification is performed with the use of classification algorithms; two algorithms have been examined – first one based on pairwise comparisons and the second – on artificial neuronal networks. The results of predictions seems satisfactory, but do not exhaust all possible approaches.

The numerical form of the optimisation task has been solved with the use of solver package from Excel worksheet. The task comprise 30 decision variables and more than 50

constraints; discrete form of original task has been replaced with it continuous polynomial approximation. The computation time does not exceed typically one minute (PC computer), however sometimes many starting points had to be used. Apart optimal solution, some number of sub-optimal solutions have been obtained with values of the criterion function close to optimal, but with different values of decision variables. These differences influence significantly some properties of the solutions (debt issued), e.g. risk parameters. It indicates, that there exist some number of solutions which generate similar servicing costs with different maturity distribution, duration, etc. It is not surprising, because discrete problems can have many optimal solutions (the task is continuous approximation of the discrete problem).

Implementation of optimisation approach emphasizes also the components of decision process which are leaved out in debt management based on intuition and experience only. Moreover, it increases *transparency* of assumptions and results and allows complex automation of computations. As a result it provides optimality of results, reduction of labour costs and computations time. Therefore, it seems obvious, that traditional approach based on intuition and experience should become a history.

Treść pracy zawiera poglądy autorów – nie wyraża stanowiska Departamentu Długu Publicznego Ministerstwa Finansów, w którym są zatrudnieni.

Autorzy:
Leszek Klukowski, Elżbieta Kuba
Departament Długu Publicznego Ministerstwa Finansów
Tel. 694 42 20
e-mail: lkl@mofnet.gov.pl , Kuba Elżbieta@mofnet.gov.pl
fax: 827 27 21 .