

# MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 159

---

Empiryczna weryfikacja teorii  
oczekiwań terminowej struktury  
stóp procentowych w Polsce

---

Urszula Ziarko-Siwiek, Marcin Kamiński

Warszawa, czerwiec 2003 r.

---

Projekt graficzny:

Oliwka s.c.

Skład i druk:

Drukarnia NBP

Wydął:

Narodowy Bank Polski  
Departament Komunikacji Społecznej  
00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21  
tel. (22) 653 23 35, fax (22) 653 13 21

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2003

Materiały i Studia rozprowadzane są bezpłatnie.

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: <http://www.nbp.pl>

---

---

## Spis treści

---

Spis tabel i wykresów .....	4
Streszczenie .....	5
1. Wprowadzenie .....	6
2. Teoria oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych .....	7
3. Estymacja zerokuponowej krzywej dochodowości .....	11
3.1. Krzywa YTM .....	11
3.2. Zerokuponowa krzywa dochodowości .....	12
3.2.1. Funkcja dyskontująca .....	12
3.2.2. Stopy procentowe spot .....	13
3.2.3. Stopy procentowe forward .....	13
3.3. Sposób budowy krzywej dochodowości metodą prostych wielomianów .....	14
4. Metody użyte do zbadania działania teorii oczekiwań .....	19
4.1. Prosta regresja .....	20
4.2. Modelowanie VAR .....	20
4.3. Model z mechanizmem korekty błędów .....	21
5. Badania i wyniki .....	24
5.1. Prosta regresja .....	24
5.2. Modelowania VAR .....	24
5.3. Model z mechanizmem korekty błędów .....	27
6. Podsumowanie .....	30

---

 Spis tabel i wykresów
 

---

Tabela 1. Analiza regresji MNK średniej zmiany stopy krótkoterminowej względem spreadu („1 miesiąc-1 rok”) . . . . .	24
Tabela 2. Wyniki VAR pełna próba . . . . .	25
Tabela 3a. Test sprawdzający czy reszty modelu VAR dla „1 miesiąc – 5 lat” są białym szumem . . . . .	26
Tabela 3b. Test sprawdzający czy reszty modelu VAR dla „1 rok – 5 lat” są białym szumem . . . . .	27
Tabela 3c. Test sprawdzający czy reszty modelu VAR dla „1 miesiąc – 1 rok” są białym szumem . . . . .	27
Tabela 4. Analiza stacjonarności stóp procentowych . . . . .	28
Tabela 5. Współczynniki modelu z mechanizmem korekty błędów bez restrykcji oraz wyniki testu ilorazu wiarygodności . . . . .	28
Tabela 6. Istotność ocen parametrów szybkości dostosowania . . . . .	29
Wykres 1. Stopy spot miesięczne i roczne oraz ich spread . . . . .	17
Wykres 2. Stopy spot miesięczne i pięcioletnie oraz ich spread . . . . .	18
Wykres 3. Stopy spot roczne i pięcioletnie oraz ich spread . . . . .	18
Wykres 4. Spread rzeczywisty oraz spread teoretyczny w modelu „1 miesiąc – 1 rok” . . . . .	25
Wykres 5. Spread rzeczywisty oraz spread teoretyczny w modelu „1 miesiąc – 5 lat” z dwoma opóźnieniami . . . . .	25
Wykres 6. Spread rzeczywisty oraz spread teoretyczny w modelu „1 rok – 5 lat” . . . . .	26

---

## Empiryczna weryfikacja teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych w Polsce

### Streszczenie

Urszula Ziarko-Siwek<sup>\*</sup>, Marcin Kamiński<sup>\*\*</sup>

---

Celem artykułu jest zbadanie czy na rynku polskim stopy procentowe zachowują się zgodnie z założeniami teorii oczekiwań oraz czy *spread* pomiędzy stopą długoterminową a stopą krótkoterminową pozwala odczytywać informacje co do kształtowania się stóp procentowych w przyszłości. Autorzy przedstawili w pracy podstawowe informacje o teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych wraz z wybranymi rezultatami badań, które przeprowadzane były na rynkach zagranicznych, a dotyczących teorii oczekiwań i możliwości jej wykorzystania do prognozowania stóp procentowych. W celu zbudowania krzywej dochodowości, która umożliwi wyliczenie stóp *spot* niezbędnych do obliczenia rzeczywistego *spreadu* pomiędzy stopą krótko- i długoterminową, wyestymowana została postać analityczna funkcji dyskontowej za pomocą wielomianu. Do szacowania zerokuponowych krzywych dochodowości użyto obligacji skarbowych, które notowane były, w analizowanym okresie (14.09.1999 – 22.11.2002), na Giełdzie Papierów Wartościowych.

Do badania teorii oczekiwań i jej zdolności do prognozowania kierunków zmian przyszłych stóp procentowych wykorzystano trzy metody, które były także używane w podobnych badaniach na rynkach zagranicznych. Wśród nich są: prosta regresja liniowa, model wektorowej autoregresji oraz model z korektą błędów. Każda z tych trzech metod została użyta do analizy trzech odrębnych modeli, różniących się od siebie założeniami co do określenia, czym jest stopa krótko- i długoterminowa. Każdy model różni się od siebie *spreadem*: model „1 miesiąc – 1 rok”, model „1 miesiąc – 5 lat”, model „1 rok – 5 lat”.

Autorzy w swoim badaniu nie dowiedli, iż w oparciu o analizę *spreadu* można wyciągnąć wnioski co do zachowania się krótkoterminowych stóp procentowych zgodnie z założeniami teorii oczekiwań.

**Słowa kluczowe:** terminowa struktura stóp procentowych, teoria oczekiwań, estymacja zerokuponowej krzywej dochodowości w Polsce

Klasyfikacja JEL: E43

---

<sup>\*</sup> Asystent w Katedrze Teorii Pieniądza i Polityki Pieniężnej Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

<sup>\*\*</sup> Doktorant w Katedrze Ekonometrii Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

## 1

## Wprowadzenie

**Czasowa (terminowa) struktura stóp procentowych** odgrywa znaczącą rolę w funkcjonowaniu nowoczesnych finansów oraz w kształtowaniu polityki monetarnej. Wiele miejsca zostało poświęcone w literaturze sporowi dotyczącemu zdolności teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych do wyjaśnienia zmian w krzywej dochodowości. Ponieważ terminowa struktura stóp procentowych dostarcza informacji o rynkowych oczekiwaniach dotyczących przyszłego poziomu stóp procentowych ważne jest zrozumienie słabych i mocnych stron teorii oczekiwań. Szereg empirycznych badań skupiało się na możliwości wykorzystania właściwości terminowej struktury stóp procentowych do prognozowania przyszłych stóp procentowych. Często, jeśli chodzi o badania prowadzone na rynku amerykańskim (a takich było stosunkowo dużo), powtarzającym się wnioskiem wypływającym z badań jest to, iż teoretyczne modele terminowej struktury nie wyjaśniają zmian stóp procentowych. Jakkolwiek pojawiają się w ostatnich latach badania, które dowodzą, iż teoria oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych, która mówi, iż stopy długoterminowe są sumą średniej z oczekiwanych przyszłych stóp krótkoterminowych oraz premii czasowej, w coraz większym stopniu pozwala stawiać prognozy stóp procentowych poza granicami Stanów Zjednoczonych.

Celem artykułu jest zbadanie czy na rynku polskim działa teoria oczekiwań, i czy *spread* pomiędzy stopą długoterminową a stopą krótkoterminową pozwala odczytać informacje co do kształtowania się stóp procentowych w przyszłości. Innymi słowy, celem artykułu jest odpowiedź na pytanie, czy w oparciu o analizę *spreadu* można wyciągnąć wnioski co do zachowania się krótkoterminowych stóp procentowych. Celem pośrednim artykułu jest wyliczenie nieobserwowanych na rynku stóp *spot*.

Artykuł obejmuje cztery zagadnienia. Pierwsze z nich dotyczy podstawowych informacji o teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych oraz wybranych rezultatów badań, które przeprowadzane były na rynkach zagranicznych, a dotyczących teorii oczekiwań i możliwości jej wykorzystania do prognozowania stóp procentowych. Drugie zawiera informacje o metodzie wykorzystanej do budowania krzywej dochodowości, która umożliwia wyliczenie stóp *spot* niezbędnych do obliczenia rzeczywistego *spreadu* pomiędzy stopą krótko- i długoterminową. Kolejna część artykułu przedstawia metody, które mogą być użyte do badania teorii oczekiwań: prostą regresję, model wektorowej autoregresji oraz model z mechanizmem korekty błędów. Na końcu przedstawione są uzyskane wyniki.

## 2

## Teoria oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych

Terminowa struktura stóp procentowych jest funkcją opisującą zależność stóp zwrotu od długości okresu pozostającego do terminu wykupu. W praktyce pojęcie terminowej struktury stóp procentowych i krzywej dochodowości używane jest zamiennie. Krzywa dochodowości (krzywa stóp procentowych, *yield curve*) jest to graficzne przedstawienie zależności pomiędzy stopą zwrotu z instrumentu o tej samej jakości kredytowej, ale różnych terminach do wykupu. Jest to instrument służący do analizy wysokości i zmian stóp procentowych na rynku finansowym. Przebieg i przesunięcie danej krzywej dochodowości informuje o kierunku i wielkości zmian stóp procentowych na rynku<sup>1</sup>. Krzywa dochodowości konstruowana jest dla jednego momentu w czasie i dla jednorodnych pod względem jakości kredytowej instrumentów finansowych.

Większość badań dotyczących terminowej struktury stóp procentowych skupia się na teorii oczekiwań, która przedstawia relację pomiędzy stopą długoterminową a aktualną i przyszłą oczekiwaną stopą krótkoterminową. Czysta wersja teorii oczekiwań mówi, że długoterminowa stopa procentowa równa jest średniej z obecnej oraz przyszłej oczekiwanej krótkoterminowej stopy procentowej plus premia czasowa, która jest równa zero. Natomiast zgodnie z obciążoną teorią oczekiwań, długoterminowa stopa procentowa równa jest średniej z obecnej oraz przyszłej oczekiwanej krótkoterminowej stopy procentowej plus premia czasowa, która jest stała<sup>2</sup>. Oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w  $n$ -letnią obligację powinna być równa stopie zwrotu, która jest oczekiwana z sukcesywnych inwestycji w jednoroczne obligacje przez  $n$  lat plus premia.

$$R_t^n = \left(\frac{1}{n}\right)E_t(r_t + r_{t+1} + r_{t+2} + \dots + r_{t+n-1}) + \theta(n) \quad (1.1)$$

$$R_t^n = \frac{1}{n} \left[ r_t + \sum_{i=1}^{n-1} E_t r_{t+i} \right] + \theta(n) \quad (1.2)$$

$R_t^n$  –  $n$  – okresowa długoterminowa stopa procentowa,

$r_t$  – krótkoterminowa stopa procentowa,

$E_t$  – operator racjonalnych oczekiwań warunkowany informacjami posiadanymi w okresie  $t$ ,

$\theta(n)$  – premia czasowa.

Teorię oczekiwań można także wyrazić w kategoriach relacji pomiędzy stopą  $R_t^n$  oraz stopą  $R_t^m$ :

$$R_t^n = \frac{1}{k} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} E_t R_{t+im}^m \right] + \theta(n, m) \quad (1.3)$$

gdzie:  $k = \frac{n}{m}$ ,  $i$  jest liczbą całkowitą,

<sup>1</sup> F.J. Fabozzi, G. Fong, *Zarządzanie portfelem inwestycji finansowych przynoszących stały dochód*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000, s. 24.

<sup>2</sup> Część autorów zagranicznych w swoich pracach zajmuje się także badaniem zmienności premii czasowej oraz wpływem jej wielkości na poziom przyszłych stóp procentowych. Autorzy niniejszego artykułu zakładają, że premia czasowa jest stała. Badaniem zmienności premii czasowej zamierzają zająć się w dalszej pracy.

$R_t^m$  –  $m$  – okresowa stopa procentowa,

$\theta(n, m)$  – premia czasowa w okresie  $n - m$ .

Powyższe zależności wskazują, że rosnąca krzywa stóp procentowych będzie pozwalać przewidywać, że krótkoterminowe stopy procentowe będą rosły, co w konsekwencji przeniesie się na wzrost stóp długoterminowych, i na odwrót. Malejąca krzywa dochodowości będzie sugerowała, iż krótkoterminowe stopy procentowe będą spadały, co w konsekwencji przeniesie się na spadek stóp długoterminowych.

Teoria oczekiwań jest teorią, której poświęcono bardzo dużą liczbę badań i publikacji. Stanowi ona także jeden z elementów służących do budowy neoklasycznych modeli makroekonomicznych<sup>3</sup>. W części z nich wykazano, iż na podstawie teorii oczekiwań nie da się prognozować zmian w wysokości stóp krótkoterminowych. Teoria oczekiwań należy do tego typu teorii, które bez względu na uzyskiwane rezultaty ciągle jest przedmiotem badań wielu ekonomistów. Prowadzone badania różniły się od siebie wykorzystywanymi do analizy danymi, okresem badawczym oraz stosowanym modelem. Większość z nich dotyczyła rynku amerykańskiego, choć w ostatnich kilkunastu latach zajmowano się teorią oczekiwań także w innych gospodarkach.

Jedną z metod wykorzystywanych do badania teorii oczekiwań jest szacowanie regresji dotyczącej zmian stopy procentowej i *spreadu*. W jednym z podejść zmienną objaśniającą jest *term spread*, rozumiany jako różnica pomiędzy stopą długoterminową oraz krótkoterminową. Regresja ta przewiduje albo zmiany w stopie krótkoterminowej albo zmiany w stopie długoterminowej. W drugim podejściu, *spreadem* może także być różnica pomiędzy stopą *forward*<sup>4</sup> oraz stopą *spot*<sup>5</sup>. W niniejszej pracy *spread* rozumiany jest zgodnie z pierwszą definicją.

Drugie podejście do badania teorii oczekiwań, opisywane w literaturze światowej, używa modelu wektorowej autoregresji (VAR). Model VAR składa się z regresji każdej zmiennej nieopóźnionej modelu, czyli zmian stopy krótkoterminowej oraz *term spreadu* względem wszystkich zmiennych modelu opóźnionych o pewną liczbę okresów. Następnie porównuje się odchylenia *spreadu* rzeczywistego od *spreadu* teoretycznego.

Metodą, która pojawiła się pod koniec lat osiemdziesiątych, jest analiza kointegracji. Może ona być stosowana jako alternatywne podejście do weryfikacji teorii oczekiwań.

Dane, które są używane do badania teorii oczekiwań, można podzielić na dwa główne rodzaje. Jedne z nich to dane, które są otrzymywane z estymacji terminowej struktury stóp procentowych na przykład metodą McCullocha (1971) lub Chambersa, Carletona i Waldmana (1984), czy też Nelsona i Siegela (1987). Drugi rodzaj danych to rynkowe stopy procentowe notowanych bonów i obligacji skarbowych lub stopy z rynku pieniężnego.

Część prowadzonych badań potwierdziła, że *spread* pomiędzy długo- i krótkoterminową stopą procentową może być pomocny w przewidywaniu właściwego kierunku przyszłych zmian krótkoterminowych stóp procentowych. I tak, wzrost stóp długoterminowych w stosunku do stóp krótkoterminowych, powoduje, że przyszłe stopy krótkoterminowe będą rosły, co jest zgodne z teorią oczekiwań. Wzrost stóp długoterminowych w stosunku do stóp krótkoterminowych następuje w wyniku oczekiwań wyższych stóp krótkoterminowych w przyszłości. Wśród prac, których wnioski pokrywają się z powyższym można wymienić prace: Campbella i Shillera (1987), Famy (1984, 1990), Famy i Bliss (1987), Mishkina (1988, 1990). I tak, E. F. Fama w jednej ze swoich prac z 1984 roku opublikował wyniki badań dotyczące informacji zawartych w stopie *forward*, a odnoszących się do stóp *spot* oraz premii terminowej. Szacując równanie regresji:

$$R_{t+\tau} - R_{t+1} = \alpha + \beta(F\tau - R_{t+1}) + \eta_{t+\tau-1} \quad (1.4)$$

<sup>3</sup> Patrz np. T.J. Sargent, *A classical macroeconomic model for the United States*. W: *The Journal of Political Economy*, 1976, v. 84, s. 207-238.

<sup>4</sup> Stopa *forward* to stopa terminowa, po której dokonywane są przyszłe inwestycje.



badat, czy bieżąca różnica pomiędzy stopą *forward* ( $F_{t,\tau}$ ) na okres  $t + \tau$ , obserwowaną w okresie  $t$  oraz jednomiesięczną stopą *spot* ( $R_{t+1}$ ), obserwowaną w okresie  $t$  ma właściwości do prognozowania przyszłych zmian jednomiesięcznych stóp *spot* ( $R_{t+\tau} - R_{t+1}$ ). Przeprowadzone badania dotyczyły rynku amerykańskich bonów skarbowych w latach 1959 – 1982. Wyniki, które otrzymał sugerują, że jednomiesięczna stopa *forward* obserwowana w okresie  $t$  może być zawsze wykorzystana do prognozowania jednomiesięcznych stóp *spot* miesiąc naprzód. Fama zauważył też, że w okresie 1959 – 1969 stopa *forward* mogła być wykorzystywana do prognozowania stóp *spot* na 5 miesięcy naprzód.

F.S. Mishkin (1988) przeprowadził w odpowiedzi na artykuł E.F. Famy z 1984 roku badania, których celem było sprawdzenie czy terminowa struktura stóp procentowych jest pomocna w prognozowaniu stóp *spot* na kilka miesięcy naprzód. Mishkin udoskonalił podejście Famy i rozszerzył horyzont badawczy. Uzyskane wyniki w zasadzie zgadzały się z wynikami Famy. Terminowa struktura stóp procentowych jest przydatna do prognozowania stóp *spot* na kilka miesięcy w przyszłość.

G. Boero i C. Torricelli (1999) przeprowadzili podobne badania na rynku niemieckim. Uzyskane rezultaty pokazały, że zarówno *spread* pomiędzy stopą długo- i krótkoterminową, jak i *spread* pomiędzy stopami *forward* i *spot* są pomocne w prognozowaniu zmian krótkoterminowych stóp procentowych zgodnie z założeniami teorii oczekiwań.

R. Lange (1999) wykorzystał analizę kointegracji stóp procentowych, modele VAR oraz zwykłą regresję do weryfikacji hipotezy oczekiwań w Kanadzie. W wyniku swych analiz doszedł do wniosku, że *spread* jest w długim okresie nieobciążonym predyktorem zmian krótkoterminowych stóp procentowych.

Wśród wielu badań dotyczących terminowej struktury stóp procentowych, teorii oczekiwań oraz możliwości wykorzystania *spreadu* do prognozowania stóp procentowych są także takie, z których rezultatów wynika, iż *spread* przewiduje niewłaściwy kierunek w zmianach przyszłych długoterminowych stóp procentowych. Są to badania opublikowane przez: Shillera (1979), Shillera, Campbella oraz Schoenholtza (1983), Mankiwa i Summersa (1984), Mankiwa (1986), Hardouvelisa (1994)<sup>6</sup>. A.G. Mankiw oraz J.A. Miron (1985), zwracając szczególną uwagę na krótki odcinek krzywej dochodowości badali, czy istnieje związek pomiędzy *spreadem* długo- i krótkoterminowej stopy procentowej ( $R_t - r_t$ ) a zmianą przyszłej krótkoterminowej stopy procentowej ( $r_{t+1} - r_t$ ):

$$(r_{t+1} - r_t) = \alpha + \beta (R_t - r_t) + v_{t+1} \quad (1.5)$$

Uzyskane wyniki wykazały, iż *spread* nie zawiera żadnych istotnych informacji o zmianach przyszłych krótkoterminowych stopach procentowych, w związku z tym *spread* nie posiada żadnych właściwości prognostycznych dla wysokości stóp procentowych, z wyjątkiem pierwszego z badanych okresów 1890 – 1914.

T. Engsted oraz C. Tanggaard opublikowali w 1995 roku swoje badania dotyczące wykorzystania *spreadu* stóp procentowych do prognozowania zmian przyszłych stóp procentowych na rynku duńskim. Wykorzystali oni do swojego badania miesięczne dane z rynku obligacji. W celu skonstruowania zerokuponowych krzywych dochodowości użyli techniki McCullocha *cubic spline*<sup>7</sup>. Badana próba zawierała dane z 15 lat i dotyczyła okresu 1976 – 1991. Analizowany okres podzielili oni na dwa podokresy: 1976:1 – 1985:7 oraz 1985:8 – 1991:12. Podział ten związany był ze zmianą w duńskiej polityce monetarnej. Do sierpnia 1985 roku polityka pieniężna banku centralnego nakerowana była na regulowanie podaży pieniądza. Natomiast w sierpniu 1985 roku duński bank centralny zmienił swoją politykę i zaczął wpływać na rynkowe krótkoterminowe stopy procentowe z określonym celem zmniejszenia zmienności krótkoterminowej stopy procentowej. Ta zmiana

<sup>5</sup> Stopa *spot* dla danego okresu jest definiowana jako procentowy dochód z obligacji zerokuponowej o określonym terminie do wykupu.

<sup>6</sup> W zależności od analizowanego kraju otrzymał on różne wyniki.

<sup>7</sup> *Cubic spline* jest to najczęściej wykorzystywana w praktyce do konstruowania zerokuponowej krzywej dochodowości odmiana wielomianu sklejanego (*spline function*). Funkcja dyskontująca przybliżana jest przez model segmentowy. Poszczególne segmenty przyjmują postać wielomianów trzeciego stopnia.

w sposobie prowadzenia polityki monetarnej miała, ich zdaniem, istotny wpływ na wyniki badań, które uzyskali. Okazało się, że w pierwszym analizowanym podokresie (1976:1 – 1985:7) *spread* mógł być wykorzystywany do prognozowania przyszłych stóp procentowych zgodnie z teorią oczekiwań. Natomiast, dla okresu późniejszego, w którym to zmieniono politykę pieniężną banku centralnego siła prognostyczna *spreadu* znikła<sup>8</sup>.

G.D. Sutton (2000) korzysta, za Cambellem i Shillerem (1984), z metodologii VAR do zbadania zmian stóp procentowych 10-letnich oraz 3-miesięcznych papierów skarbowych USA. Ponadto wykorzystywał on procedury bayesowskie, by móc traktować dane z różnych okresów z różnymi wagami. W ten sposób dowodzi on, że teoria oczekiwań w o wiele dokładniejszy sposób objaśnia kierunek zachowania się stóp procentowych przed 1979 rokiem, aniżeli później. Okres ten to czas, gdy FED wprowadził nowe procedury operacyjne, dotyczące rezerw niepożyczonych, których wielkość FED miał ustalać na podstawie oszacowania wolumenu kredytów dyskontowych udzielanych bankom. Prezes FED-u w tym czasie bardzo interesował się regulacją stóp procentowych w celu zdławienia inflacji w gospodarce. Zmieniając procedury operacyjne chciano uzyskać swobodę w zakresie manipulowania wysokością stóp procentowych<sup>9</sup>. Po raz kolejny okazuje się więc, że rodzaj polityki prowadzonej przez banki centralne wpływa na to, czy hipoteza oczekiwań sprawdza się, czy nie.

<sup>8</sup> T. Engsted, C. Tanggaard, *The predictive power of yield spreads for future interest rates: evidence from the Danish term structure*. W: *Scandinavian Journal of Economics* 97(1), 1995, s. 145-159.

<sup>9</sup> F. S. Mishkin, *Ekonomika pieniądza, bankowości i rynków finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 609-611.

## 3

## Estymacja zerokuponowej krzywej dochodowości

Krzywa dochodowości konstruowana jest dla jednego momentu w czasie i dla jednorodnej grupy papierów wartościowych. Tworząc krzywą dochodowości należy uwzględnić kilka warunków, które powinny spełniać instrumenty używane do konstruowania krzywej dochodowości. Papiery wartościowe używane do konstruowania krzywej powinny być instrumentami:

- tego samego emitenta,
- o tym samym ryzyku,
- o różnych terminach wykupu.

Ważne jest także, aby rynek wtórny tych instrumentów był rynkiem dobrze rozwiniętym i płynnym. Na polskim rynku kapitałowym istnieje jedna kategoria dłużnych papierów wartościowych, która nadaje się do analizy terminowej struktury stóp procentowych. Tym segmentem jest wtórny rynek obligacji skarbowych. Rynek obligacji skarbowych można podzielić na kilka segmentów w zależności od: terminu wykupu, rodzaju oprocentowania oraz rynku notowań.

Do skonstruowania wszystkich krzywych dochodowości zostały wykorzystane notowania z rynku wtórnego obligacji skarbowych. W Polsce w obecnej chwili obrót wtórny obligacjami skarbowymi odbywa się na Giełdzie Papierów Wartościowych, Centralnej Tabeli Ofert oraz na rynku międzybankowym. Ze względu na dostępność danych, do zbudowania krzywych dochodowości użyto danych z rynku giełdowego.

Wszystkie użyte obligacje można podzielić na dwie główne grupy: obligacje zerokuponowe i obligacje kuponowe. Obligacje zerokuponowe są papierami wartościowymi o dwuletnim terminie do wykupu. Druga grupa wykorzystywanych papierów wartościowych to obligacje kuponowe o stałej stopie procentowej. Wśród nich występują instrumenty dwu-, pięcio-, dziesięcio- oraz dwudzieściolatnie.

Ceny obligacji skarbowych, które są wykorzystywane do konstruowania terminowej struktury stóp procentowych i wyznaczania funkcji dyskontującej, są sumą kursów zamknięcia z rynku giełdowego i narosłych odsetek. Terminową strukturę stóp procentowych autorzy konstruują na każdy dzień roboczy, w którym przynajmniej dla ośmiu obligacji skarbowych ustalony został kurs giełdowy. Analizowany jest okres od 14 września 1999 roku do 22 listopada 2002 roku.

### 3.1. Krzywa YTM

Najprostszym sposobem przedstawienia krzywej dochodowości jest wyliczenie stóp zwrotu do wykupu (*yield to maturity*). Jest to stopa, jaką uzyska inwestor, który kupi obligację po cenie  $P$ , przetrzyma ją do terminu wykupu, a uzyskiwane kupony będzie reinwestował przy tej samej stopie dochodu – stopie YTM. Zgodnie z definicją, przepływy związane z obligacją w postaci płatności kuponowych oraz wartości nominalnej zdyskontowane stopą zwrotu do wykupu równe są cenie obligacji.

$$P = \frac{C}{(1+R)} + \frac{C}{(1+R)^2} + \dots + \frac{C}{(1+R)^t} + \frac{N}{(1+R)^t} \quad t \in \langle 1; n \rangle \quad (2.1)$$

gdzie:

$P$  – cena rynkowa (rozumiana jako kurs obligacji plus narosłe odsetki),

$C$  – kupony odsetkowe,

$N$  – wartość nominalna,

$t$  – okres do wykupu,

$R$  – stopa zwrotu do wykupu (YTM).

Przedstawienie zależności YTM dla różnych terminów do wykupu nazywane jest **krzywą YTM**. Używanie krzywej dochodowości konstruowanej na podstawie YTM jest mało skuteczne między innymi z dwóch powodów. Po pierwsze, konstruowanie krzywej dochodowości w oparciu o YTM pomija ryzyko reinwestycji. W praktyce rynkowe stopy procentowe zmieniają się, a przez to reinwestycja przepływów dokonywana jest na podstawie zmieniającej się stopy procentowej. Po drugie, wykorzystywanie krzywej dochodowości zbudowanej w oparciu o YTM jest ograniczone wskutek tzw. efektu kuponowego. Polega on na tym, że dwie obligacje o tym samym terminie zapadalności, ale o różnych kuponach odsetkowych, będą posiadały dwie różne ceny, a przez to dwa różne YTM.

### 3.2. Zerokuponowa krzywa dochodowości

Powyzszych wad pozbawione jest podejście zakładające, że każdą obligację kuponową można przedstawić jako zbiór obligacji zerokuponowych. Z obligacją zerokuponową związany jest tylko jeden przepływ finansowy w momencie wykupu obligacji. Każdą obligację kuponową można podzielić na tyle obligacji zerokuponowych, ile jest przepływów związanych z daną obligacją kuponową.

W związku z powyższymi uwagami czasowa struktura stóp procentowych w praktyce nie powinna być określana za pomocą stopy zwrotu w terminie do wykupu, ale za pomocą: funkcji dyskontującej, stóp typu *spot* lub stóp typu *forward*.

#### 3.2.1. Funkcja dyskontująca

Funkcja dyskontująca  $\delta(t)$  służy do określenia bieżącej wartości pojedynczej płatności dokonywanej w przyszłości oraz przedstawia zależność współczynnika dyskontującego od terminu do wykupu. Można ją przedstawić za pomocą stóp *spot* ( $S(t)$ ):

$$\delta(t) = \frac{1}{(1 + S(t))^t} \quad (2.2)$$

oraz stóp *forward* ( $f(t)$ ):

$$\delta(t) = \frac{1}{(1 + f(t_1))(1 + f(t_2)) \dots (1 + f(t_t))} \quad (2.3)$$

Funkcja dyskontująca jest bardzo użyteczna do szacowania terminowej struktury stóp procentowych, ponieważ wykorzystuje ceny obligacji. Oznacza to, że ceny rynkowe obligacji mogą być wyrażone w kategoriach funkcji dyskontującej.

$$P = \delta(t_1) \times C + \delta(t_2) \times C + \dots + \delta(t_n) \times (C + N) \quad (2.4)$$

$$P = C \sum_{i=1}^n \delta(t_i) + \delta(t_n) N \quad (2.5)$$

Mając wyznaczoną funkcję dyskontującą można wyznaczyć następnie stopę *spot* oraz stopę *forward*.

### 3.2.2. Stopy procentowe spot

**Stopa procentowa spot** –  $S$  (natychmiastowa stopa procentowa, kasowa stopa procentowa) jest to stopa zwrotu w terminie do wykupu z obligacji, która przynosi inwestorowi dochód tylko w postaci jednego strumienia gotówkowego, czyli z obligacji zerokuponowej lub dyskontowej. W związku z tym, stopa *spot* dla danego okresu jest definiowana jako procentowy dochód ze sprzedawanej z dyskontem zerokuponowej obligacji o tym samym okresie pozostającym do terminu wykupu. Stopa *spot* jest czasami nazywana zerokuponową rentownością, ponieważ jest ona reprezentowana przez YTM zerokuponowej (dyskontowej) obligacji. Obraz graficzny zależności stóp *spot* od okresu do wykupu określa się mianem krzywej stóp natychmiastowych (krzywej stóp *spot*)<sup>10</sup>.

Stopy *spot* nie są bezpośrednio obserwowane, ponieważ na rynku finansowym występuje niewiele zerokuponowych obligacji. Na rynku polskim jedynymi obligacjami zerokuponowymi są obligacje dwuletnie, które emitowane są od roku 1999. Przykładem zerokuponowego papieru wartościowego występującego na rynku polskim są także bony skarbowe, ale jest to papier wartościowy, którego termin wykupu nie przekracza jednego roku. Stopy *spot* muszą być zatem oszacowane na podstawie stóp zwrotu z kuponowych papierów wartościowych, które są dostępne na rynku. Każda obligacja kuponowa traktowana jest jako układ obligacji zerokuponowych sprzedawanych z dyskontem, odpowiadających poszczególnym płatnościom kuponowym oraz wykupowi. Zbiór natychmiastowych stóp procentowych  $S_{0;n}$  (gdzie  $n$  reprezentuje dowolne terminy do wykupu) jest to czasowa struktura stóp procentowych, inaczej nazywana w literaturze zerokuponową krzywą dochodowości<sup>11</sup>.

Korzystając z wzoru na wartość obligacji, którą potraktujemy jako zbiór obligacji zerokuponowych, można wyznaczyć stopę *spot*:

$$P = \frac{C}{(1+S_{0;1})} + \frac{C}{(1+S_{0;2})^2} + \dots + \frac{C+N}{(1+S_{0;n})^n}$$

$$P = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+S_{0;t})^t} + \frac{C+N}{(1+S_{0;n})^n}$$

$$\frac{1}{(1+S_{0;n})^n} = \frac{P - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+S_{0;t})^t}}{C+N}$$

$$S_{0;n} = \left( \frac{C+N}{P - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C}{(1+S_{0;t})^t}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (2.6)$$

gdzie:

$S_{0;n}$  – stopa *spot* zerokuponowej obligacji  $n$  – letniej.

### 3.2.3. Stopy procentowe forward

Stopy *forward* są to jednookresowe<sup>12</sup> stopy, przy których dokonywane są przyszłe inwestycje. Stopa terminowa jest to stopa procentowa, w przypadku której data podjęcia zobowiązania oraz data udzielenia pożyczki są różne. Jeżeli podejmie się zobowiązania udzielenia pożyczki 1-roczonej z momentem jej przekazania odroczonym za rok, to stopa oprocentowania tej pożyczki jest stopą *forward*. Za pomocą stóp *forward* można opisać wpływ bieżących stóp *spot* na stopy pro-

<sup>10</sup> F.J. Fabozzi, *Rynki obligacji. Analiza i strategia*, WIG-PRESS, Warszawa 2000, s. 108.

<sup>11</sup> N. Anderson, F. Breedon, M. Deacon, A. Derry, G. Murphy, *Estimating and interpreting the yield curve*, John Wiley & Sons 1996, s. 12.

<sup>12</sup> Jednookresowy rozumiany jest jako przyjęty w danym momencie okres, np. miesiąc, trzy miesiące czy też więcej.

centowe w przyszłości. Stopy *forward* wynikają z aktualnej struktury terminowej stóp procentowych. Na podstawie wyliczonych natychmiastowych stóp procentowych można wyznaczyć implikowane terminowe stopy procentowe.

$$(1 + S_{0;n+m})^{n+m} = (1 + S_{0;n})^n (1 + f_{n;m})^m \quad (2.7)$$

gdzie:

$S_{0;n+m}$  – stopa natychmiastowa zerokuponowej obligacji o terminie wykupu  $n+m$ ,

$S_{0;n}$  – stopa natychmiastowa zerokuponowej obligacji  $n$ -letniej,

$f_{n;m}$  – stopa *forward* dla obligacji  $m$ -letniej za  $n$  lat.

Z powyższego wzoru można wyznaczyć terminową stopę zwrotu.

$$f_{n;m} = \sqrt[m]{\frac{(1 + S_{0;n+m})^{n+m}}{(1 + S_{0;n})^n}} - 1 \quad (2.8)$$

Stopa *forward* dla pierwszego okresu jest równa stopie *spot*. W związku z tym, stopę *spot* można przedstawić jako iloczyn czynników zależnych od stóp *forward*, zaczynając od okresu pierwszego, dla którego jest określona stopa *spot*:

$$(1 + S_{0;n+m})^{n+m} = (1 + f_{0;n})^n (1 + f_{n;m})^m \quad (2.9)$$

Czyli stopę *forward* można przedstawić jako funkcję stóp *spot*, a stopę *spot* można przedstawić jako funkcję stóp *forward*. Do opisu struktury terminowej stóp procentowych można wykorzystać zarówno stopy *spot*, jak i stopy *forward*. To, którą stopą zainteresowany jest inwestor, zależy od jego potrzeb.

### 3.3. Sposób budowy krzywej dochodowości metodą prostych wielomianów

Celem estymacji terminowej struktury stóp procentowych jest dopasowanie do danych empirycznych krzywej *spot* lub innej funkcji opisującej terminową strukturę stóp procentowych w taki sposób, aby dopasowanie było możliwie dobre i funkcja była dostatecznie gładka<sup>13</sup>. Prostą metodą niestatystyczną wykorzystywaną do szacowania terminowej struktury stóp procentowych jest metoda sekwencyjna, tzw. *bootstrapping*. Jest to metoda łatwa w użyciu, lecz nie zawsze może być ona wykorzystywana kiedy dostępne na rynku są głównie papiery wartościowe o niecałkowitych okresach do wykupu. Wśród innych metod szacowania krzywej dochodowości można wyróżnić metody statystyczne. Jedną z nich została zastosowana w niniejszym artykule i opisana jest poniżej.

Poszczególne przepływy związane z daną obligacją zdyskontowane współczynnikiem dyskontującym równe są cenie transakcyjnej obligacji. Wyznaczenie funkcji dyskontujących umożliwiłoby skonstruowanie terminowej struktury stóp procentowych, a następnie obliczenie stóp *spot*.

$$P = C \sum_{t=1}^n \delta(t) + \delta N$$

Jednym ze sposobów konstruowania terminowej struktury stóp procentowych jest wykorzystanie podejścia J. H. McCullocha, czyli koncepcji funkcji dyskontującej, która przedstawiona jest jako suma  $k$  oszacowanych funkcji bazowych  $f_j(t)$  plus jeden, gdzie  $j=1, \dots, k$ <sup>14</sup>. Funkcja dyskontująca przedstawiająca współczynnik dyskontujący dla różnych terminów do wykupu  $t$  określona jest przez:

<sup>13</sup> F.J. Fabozzi, G. Fong, *Zarządzanie portfelem ...op.cit.*, s. 64.

<sup>14</sup> J.H. McCulloch, *Measuring the term structure of interest rates*. W: *Journal of Business*, XLIV, 1971, s. 19.

$$\delta(t) = 1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(t) \quad (2.10)$$

$a_j$  – parametr  $j$ -tej funkcji bazowej,

$f_j(t)$  –  $j$ -ta funkcja bazowa.

Znając funkcję dyskontującą w łatwy sposób można wyznaczyć zerokuponową krzywą dochodowości, poprzez wykorzystanie zależności między funkcją dyskontującą i stopą *spot*.

$$\delta(t) = \frac{1}{(1+S(t))^t} \Rightarrow S(t) = \delta(t)^{-1/t} - 1 \quad (2.11)$$

To podejście do wyznaczenia funkcji dyskontującej stosowane jest w przypadkach, gdy płatności związane z obligacjami nie są regularne, tzn. przykłady dla różnych obligacji odbywają się w różnych terminach<sup>15</sup>.

W celu wyznaczenia funkcji dyskontującej konieczne jest oszacowanie parametrów  $a_j$ . Aby wyznaczyć funkcję dyskontującą oraz stopy *spot* potrzebne są następujące dane: ceny poszczególnych obligacji z rynku wtórnego wraz z narosłymi odsetkami oraz wartości i terminy kolejnych płatności związanych z daną obligacją:

$p_i$  – cena obligacji; gdzie  $i=1, \dots, n$ ;  $n$  – liczba obligacji,

$a_i$  – narosłe odsetki  $i$ -tej obligacji,

$c_{il}$  – wartość przepływów pozostałych do zapłaty związanych z  $i$ -tą obligacją;  $l=1, \dots, m_i$   
 $l$  – numer przepływu;  $m_i$  – liczba przepływów,

$T(c_{il})$  – wyrażony w latach; okres jaki upłynie od dziś do poszczególnych przepływów.

Cena obligacji rozumiana jako cena zamknięcia plus narosłe odsetki równa jest sumie iloczynów poszczególnych  $l$ -tych płatności związanych z  $i$ -tą obligacją oraz funkcji dyskontującej w dniu płatności  $t(c_{il})$ .

$$p_i + a_i = \sum_{l=1}^{m_i} \delta(t(c_{il})) c_{il} \quad (2.12)$$

Podstawiając do powyższego wzoru wzór (2.10), wyznaczając wartość funkcji dyskontującej, oraz przekształcając go, otrzymuje się:

$$p_i + a_i = \sum_{l=1}^{m_i} \left[ 1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(t(c_{il})) \right] c_{il} = \sum_{l=1}^{m_i} c_{il} + \sum_{l=1}^{m_i} \sum_{j=1}^k a_j f_j(t(c_{il})) c_{il}$$

$$p_i + a_i - \sum_{l=1}^{m_i} c_{il} = \sum_{j=1}^k a_j \sum_{l=1}^{m_i} f_j(t(c_{il})) c_{il} \quad (2.13)$$

Zakładając, że:

$$y_i = p_i + a_i - \sum_{l=1}^{m_i} c_{il} \quad (2.14)$$

<sup>15</sup> Carleton oraz Cooper w 1976 roku przedstawili prostszy sposób wyznaczania funkcji dyskontującej, który może być wykorzystywany tylko i wyłącznie w przypadku, gdy w danym kraju płatności kuponowe i zwrot wartości nominalnej następują w przypadku wszystkich obligacji w konkretnych, ściśle określonych dniach, np. 4 razy w roku.

oraz

$$x_{ij} = \sum_{l=1}^{m_i} f_j(t(c_{il}))c_{il} \quad (2.15)$$

równanie (2.13) przyjmuje następującą postać:

$$y_i = \sum_{j=1}^k a_j x_{ij} \quad (2.16)$$

Ponieważ zarówno  $y_i$ , jak i  $x_{ij}$  są obserwowane, metodą najmniejszych kwadratów można oszacować parametry  $a_j$ . Zmienną objaśnianą  $y_i$  w tym modelu, jest różnica ceny transakcyjnej danej obligacji oraz sumy wszystkich płatności związanych z tą obligacją. Zmienną objaśniającą jest natomiast wartość obecna wszystkich przepływów pieniężnych z  $i$ -tą obligacją.

Bardzo ważne przy konstruowaniu terminowej struktury stóp procentowych jest odpowiedni wybór funkcji bazowej oraz liczby  $k$ , tak aby jakość dopasowania funkcji dyskontującej była jak najlepsza.

Jednym z najprostszych podejść zaproponowanym przez McCullocha jest przyjęcie za funkcję bazową  $f_j(t)$  wielomianu  $f_j(t) = t^j$ , gdzie  $j = 1, \dots, k$ . W przypadku dopasowania prostego wielomianu jego jakość uzależniona jest od rozłożenia w czasie przepływów związanych z obligacją. W zależności od koncentracji obserwacji, dopasowanie funkcji dyskontującej będzie lepsze lub gorsze. Jeżeli dane są skoncentrowane głównie w krótkim końcu to dopasowanie będzie lepsze w tej części i na odwrót. W związku z tym jeżeli termin do wykupu większości wykorzystywanych obligacji do estymacji krzywej dochodowości jest krótki, to dopasowanie będzie gorsze dla stóp długoterminowych. Problem ten można rozwiązać poprzez zwiększanie liczby  $k$ , czyli zwiększanie stopnia wielomianu. Zwiększanie stopnia wielomianu powoduje jednak zmniejszenie stabilności oszacowanych parametrów<sup>16</sup>. Autorzy przyjęli za J.H. McCullochem sposób wyliczania liczby  $k$  według następującego wzoru<sup>17</sup>:

$$k(n) = \sqrt{n} \quad (2.17)$$

Uzasadnienie wykorzystywania wielomianowych funkcji aproksymacyjnych wynika z twierdzenia Weierstrassa<sup>18</sup>. Twierdzenie to głosi, że dowolna funkcja ciągła i różniczkowalna może zostać przybliżona na określonym przedziale za pomocą wielomianu z dowolną precyzją. Wśród zalet takiego podejścia można wyróżnić następujące:

- wielomian dobrze się dopasowuje, gdy koncentracja obserwacji jest duża,
- do niniejszego badania niepotrzebna jest cała krzywa dochodowości, tylko wybrane stopy,
- metoda ta jest prosta obliczeniowo i przydatna, gdy trzeba wyestymować bardzo dużo krzywych dochodowości na podstawie dość skąpych danych,
- ograniczona liczba danych uniemożliwia wykorzystanie bardziej skomplikowanych, wieloparametrycznych procedur.

<sup>16</sup> W celu wyznaczenia stóp *spot* i rozwiązania powyższych problemów wykorzystuje się częściej technikę splinów wielomianowych – podejście zaproponowane przez J.H. McCullocha. Istotą tego podejścia jest podzielenie całego okresu na segmenty tak, aby w każdym z tych segmentów funkcją bazową był wielomian o stosunkowo niskim stopniu oraz, aby estymowana zerokuponowa krzywa dochodowości była różniczkowalna w punktach, w których łączą się poszczególne segmenty, nazywanych *knot points*. Główną zaletą stosowania splinów jest elastyczne dopasowywanie się funkcji do danych w poszczególnych odcinkach krzywej dochodowości. Za: A. Csajbók, *Zero-coupon yield curve estimation from a central bank perspective*, NBH Working Paper, May 1999, s. 17. Z tym podejściem związany jest jeden problem, mianowicie ważne jest, aby odpowiednio określić liczbę  $d$ , czyli liczbę *knot points*. Jeśli  $d$  jest za niskie, wystąpi problem z dopasowaniem funkcji dyskontującej. Natomiast jeśli  $d$  będzie za wysokie, to funkcja dyskontująca może dopasowywać się do nietypowych obserwacji, i nie będzie gładka. Prostim rozwiązaniem wyznaczenia liczby  $d$  proponowanym przez McCullocha i stosowanym często w praktyce jest określenia  $d$  jako funkcji  $n$ , gdzie  $n$  to liczba obligacji użytych do konstruowania spotowej krzywej dochodowości (liczba obserwacji).

<sup>17</sup> J.H. McCulloch, *Measuring the term ...op.cit.*, s. 31.

<sup>18</sup> Patrz np. W. Rudin, *Wstęp do analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000, s. 136.



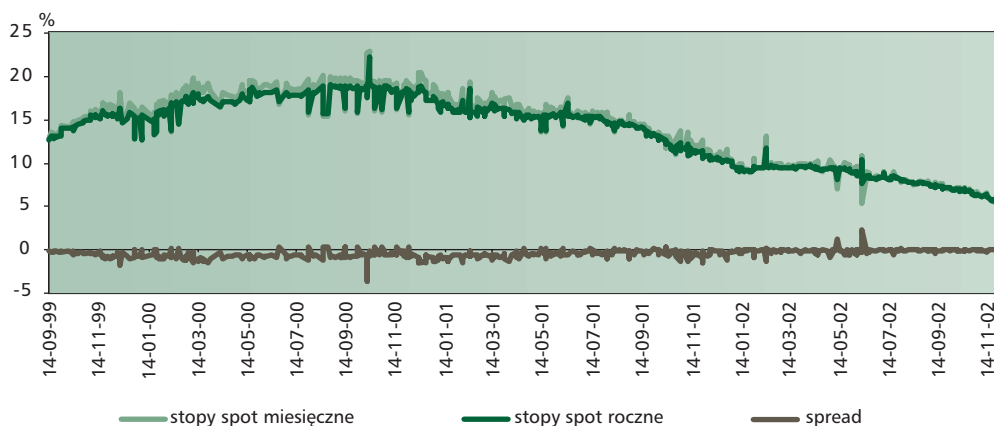
Wymienić należy także wady tej metody:

- krzywa natychmiastowych stóp *forward* ma często przebieg niezgodny z teorią ekonomiczną. Wydaje się, że w miarę wzrostu terminu do wykupu oczekiwania odnośnie przyszłych stóp procentowych powinny stabilizować się na określonym poziomie. Okazuje się natomiast, że wyżej wymieniona krzywa obliczona na podstawie wyestymowanej funkcji dyskontującej dąży po prawej stronie do plus lub minus nieskończoności,
- istnieje niebezpieczeństwo związane z wykorzystaniem zbyt wielu wielomianów. Wprawdzie uzyskuje się w ten sposób o wiele lepsze dopasowanie krzywej do poszczególnych obserwacji, jednak oszacowana funkcja dyskontowa zachowuje się w bardzo niepożądany sposób poza zakresem obserwacji.

Używając podejścia McCullocha – metody prostych wielomianów stopnia  $k$ , autorzy zbudowali 627 zerokuponowych krzywych dochodowości. *Spotowe* krzywe dochodowości posłużyły do wyznaczenia miesięcznych, rocznych oraz pięcioletnich stóp *spot*. Wartości poszczególnych stóp *spot* niezbędne są do przeprowadzenia dalszych badań, którym poświęcony jest niniejszy artykuł. Zostały one wykorzystane między innymi do wyznaczenia *spreadu* pomiędzy stopą krótko- i długoterminową. Poniżej zamieszczone są wykresy prezentujące zestawienie stóp krótko- i długoterminowych oraz *spreadów* między nimi. Dalsze badania przeprowadzane są z wykorzystaniem następujących *spreadów*:

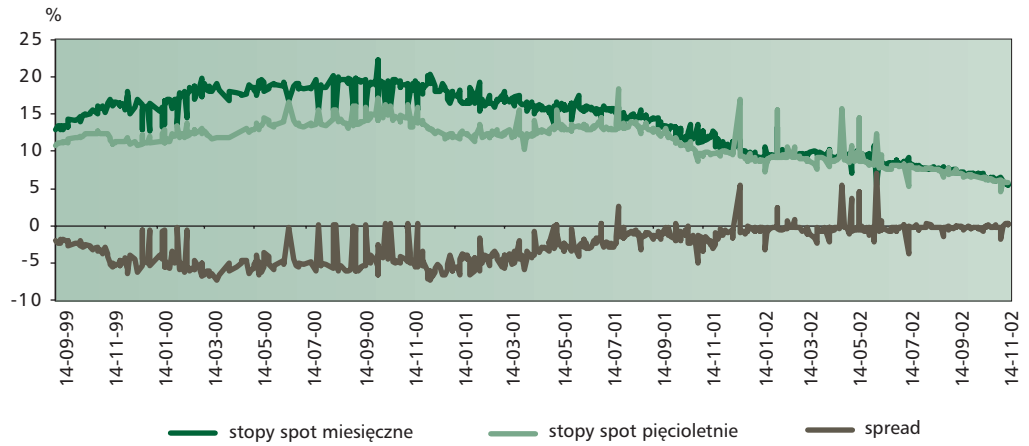
- stopa krótkoterminowa miesięczna i stopa długoterminowa roczna,
- stopa krótkoterminowa miesięczna i stopa długoterminowa pięcioletnia,
- stopa krótkoterminowa roczna i stopa długoterminowa pięcioletnia.

**Wykres 1. Stopy *spot* miesięczne i roczne oraz ich *spread***



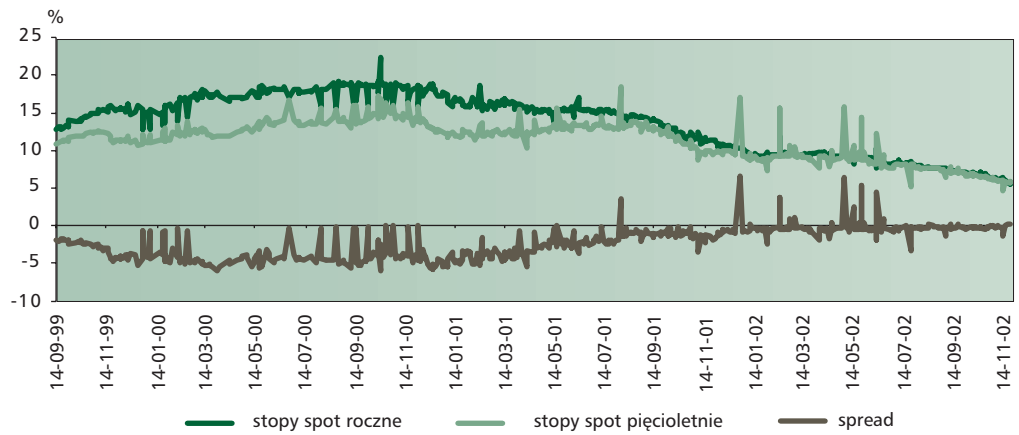
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 2. Stopy spot miesięczne i pięcioletnie oraz ich spread



Źródło: opracowanie własne

Wykres 3. Stopy spot roczne i pięcioletnie oraz ich spread



Źródło: opracowanie własne

## 4

## Metody użyte do zbadania działania teorii oczekiwań

Model wartości obecnej (*present value model*) może znaleźć zastosowanie zarówno do wyceny obligacji, jak i akcji. Zgodnie z teorią oczekiwań stopy *forward* są nieobciążonymi ocenami przyszłych stóp krótkookresowych, w związku z czym obecna stopa długookresowa jest średnią ważoną z przyszłych stóp krótkookresowych. Liniowy model wartości obecnej zgodny z hipotezą oczekiwań ma postać:

$$R_t^e = \theta + \sum_{j=0}^{n-1} w_j E_t r_{t+j} \quad (3.1)$$

$R_t^e$  – oczekiwana stopa zwrotu z papieru długoterminowego, wynikająca z hipotezy oczekiwań,

$r_t$  – stopa zwrotu z papieru krótkoterminowego (dalej zakładamy, że jednookresowego),

$\theta$  – stała premia czasowa ( $\theta \geq 0$ ).

We wzorze (3.1)  $E_t$  oznacza warunkową wartość oczekiwaną przy zasobie informacji dostępnym w okresie  $t$ . Ten zbiór, oznaczany przez  $\mathbf{H}_t$  składa się ze wszelkich publicznie dostępnych informacji. Należą do niego m.in. zmienne  $S_t$ ,  $\Delta r_t$ , a także ich opóźnienia. Z kolei,  $\theta$  oznacza dochód nadwyżkowy z papieru długoterminowego ponad dochód z papierów krótkoterminowych. Ponadto przyjmijmy założenie, że  $\{w_j\}_0^{n-1}$  jest strukturą opóźnień.

$$w_j = q^j \frac{(1-q)}{(1-q^n)}, \text{ gdzie } q = \frac{1}{1+\bar{R}} \quad (3.2)$$

Występujący we wzorze (3.2) symbol  $\bar{R}$  oznacza YTM obligacji długookresowej.

$$S_t^e = R_t^e - r_t \quad (3.3)$$

Wówczas wzór (3.1), za pomocą serii prostych przekształceń, można zapisać w postaci:

$$S_t^e = \theta + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j E_t \Delta r_{t+j} \quad (3.4)$$

gdzie:

$S_t^e$  – oczekiwany *spread* w okresie  $t$ , nazywany także *spreadem* teoretycznym.

We wzorze (3.4)

$$\omega_j = \sum_{l=j}^{n-1} w_l$$

zaś

$$\Delta r_t = r_t - r_{t-1}.$$

Z tego wzoru wynika, że *spread* teoretyczny stanowi ważoną średnią zmian stóp krótkookresowych w przyszłości.

Jeśli hipoteza oczekiwań prawidłowo opisuje kształtowanie się stóp procentowych na rynku, to  $S_t = S_t^e$ . W związku z tym ze wzoru (3.4) można wywnioskować, że dodatni *spread* sugeruje, że w przyszłości stopy krótkookresowe wzrosną.

Według innego sformułowania modelu:

$$\frac{1}{n-1} S_t = E_t R_{t+1}^{n-1} - R_t \quad (3.5)$$

gdzie:

$S_t$  – rzeczywisty *spread*, rozumiany jako różnica pomiędzy dochodowością papieru długoterminowego a krótkoterminowego w okresie  $t$ ,

$R_t$  – stopa zwrotu z papieru długoterminowego.

Tutaj  $n$  oznacza liczbę okresów, na jakie wyemitowany jest papier długookresowy, natomiast  $R_{t+1}^{n-1}$  oznacza stopę zwrotu w następnym okresie z tego samego papieru, dla którego znamy  $R_t$ . Wzór (3.5) oznacza, że jeśli *spread* jest dodatni, to oczekiwany jest wzrost stopy zwrotu z papieru długookresowego.

Do badania prawdziwości teorii oczekiwań i zdolności prognostycznych *spreadu* między stopą długo- i krótkoterminową wykorzystano trzy metody. Należą do nich: szacowanie regresji liniowej, model wektorowej autoregresji oraz model z mechanizmem korekty błędów.

#### 4.1. Prosta regresja

Dla celów analizy regresji oszacowano następujące równanie:

$$\sum_{i=1}^{n/m-1} (1 - im/n) \Delta r_{t+i} = \alpha + \beta S_t + \varepsilon_t \quad (3.6)$$

w którym  $\Delta r_{t+i} = r_{t+i} - r_{t+i-1}$ , a  $n/m$  jest liczbą całkowitą. Z równania (3.6) wynika, że średnia ważona zmian stóp krótkookresowych w przyszłości pozostaje pod wpływem różnicy pomiędzy bieżącą stopą długo- i krótkookresową. Jeśli hipoteza oczekiwań trafnie objaśnia zmiany stóp na rynku, to ocena parametru  $\beta$  powinna nieistotnie różnić się od jedności, co można sprawdzić np. testem t-Studenta. Aby uniknąć problemów związanych z niespełnieniem założeń dotyczących składnika losowego (składniki losowe w kolejnych obserwacjach są od siebie zależne ze względu na częstotliwość danych wyższą aniżeli długość  $m$ ), odchylenia standardowe ocen parametrów oszacowane zostały z poprawką Neweya-Westa<sup>19</sup>.

#### 4.2. Modelowanie VAR

Jedną z wielu metod weryfikacji teorii oczekiwań jest porównanie *spreadu* teoretycznego ze *spreadem* rzeczywistym. *Spread* teoretyczny zostaje wyliczony z modelu VAR na podstawie wielookresowych prognoz zmian stóp krótkookresowych zgodnie ze wzorem (3.4). Przez prognozy wielookresowe w okresie  $t$  autorzy rozumieją tu prognozy, które są stawiane na podstawie takiego zasobu informacji, jaki jest dostępny w tymże okresie. Następnie obliczony zostaje współczynnik korelacji pomiędzy *spreadami* rzeczywistym i teoretycznym. Jeśli jest on bliski jedności sugeruje to, że hipoteza oczekiwań sprawdza się w praktyce. Wyliczony zostaje także iloraz odchyłeń standardowych *spreadów* teoretycznego i rzeczywistego. Ten współczynnik będzie równy jedności jeśli hipoteza oczekiwań jest prawdziwa. Kolejną wartością jest współczynnik kierunkowy regresji liniowej *spreadu* teoretycznego względem *spreadu* empirycznego. W istocie jest to iloczyn dwóch poprzednich statystyk. Ostatnim sprawdzianem hipotezy oczekiwań będzie odchylenie standardowe składnika losowego w tej regresji.

<sup>19</sup> W.K. Newey, K.D. West, *A Simple, Positive Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*. W: *Econometrica* 1987, vol. 55, s. 703-708.

Model VAR jest oszacowany dla wektora  $x_t = [\Delta\tilde{r}_t, \tilde{S}_t]'$ , gdzie  $\tilde{y}_t = y_t - \bar{y}$  ( $\bar{y}$  jest to średnia arytmetyczna). Można go zapisać w postaci:

$$x_t = \begin{bmatrix} a(L) & b(L) \\ d(L) & c(L) \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

gdzie  $i(L)$  ( $i=a, b, c, d$ ) oznacza wielomian opóźnień (*lag polynomial*) stopnia  $p$ . Model VAR można też zapisać krócej w postaci korzystającej z tzw. macierzy towarzyszącej (*companion matrix*)  $A$ . Należy zdefiniować wektor  $z_t$ , który zawiera  $\Delta\tilde{r}_t$  wraz z  $p-1$  opóźnieniami oraz  $\tilde{S}_t$  z  $p-1$  opóźnieniami. Wtedy model VAR ma postać  $z_t = A z_{t-1} + \varepsilon_t$ , co dla większej jasności należy zapisać:

$$\begin{bmatrix} \Delta\tilde{r}_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta\tilde{r}_{t-p+1} \\ \tilde{S}_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{S}_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & a_p & b_1 & \cdot & \cdot & b_p \\ 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ c_1 & \cdot & \cdot & c_p & d_1 & \cdot & \cdot & d_p \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{r}_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta\tilde{r}_{t-p} \\ \tilde{S}_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{S}_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Posiadając oszacowanie macierzy  $A$  można postawić prognozę zmiennej  $\Delta\tilde{r}_{t+i}$  dla dowolnego  $i$ . Mianowicie  $E_t(\Delta\tilde{r}_{t+i} | H_t) = h'A^i z_t$ . Wektor  $h$  jest pierwszą kolumną macierzy jednostkowej stopnia  $2p$ . Z kolei *spread* teoretyczny może zostać wyliczony ze wzoru (3.9):

$$S_t^e = h'A[I - (1/n)(I - A^n)(I - A)^{-1}](I - A)^{-1}z_t \quad (3.9)$$

Pewnym problemem jest wybór rzędu opóźnień. W bieżących badaniach przyjmowane zostaną *a priori* rzędy równe 2 lub 3 okresy zapadalności papieru krótkookresowego (w jednym przypadku przyjęto rząd opóźnień równy jednemu okresowi zapadalności ze względu na małą liczbę obserwacji), a wybór dokonywany będzie na podstawie oceny modelu za pomocą kryterium Schwarza<sup>20</sup>.

Następujące po oszacowaniu modelu sprawdzenie czy reszty są białym szumem (*whiteness of residuals*) ma na celu określenie dobroci modelu. Sprawdzenie czy reszty są białym szumem stanowić będzie porównanie wartości autokorelacji i korelacji reszt przy rzędach opóźnień  $h = 1, 2, 3$  z wartością krytyczną równą  $2/\sqrt{T}$ , gdzie  $T$  oznacza liczbę dostępnych obserwacji<sup>21</sup>.

### 4.3. Model z mechanizmem korekty błędów

Jeżeli szeregi czasowe stóp procentowych są w istocie błędzeniem przypadkowym<sup>22</sup>, szereg pierwszych różnic stóp procentowych jest stacjonarny (jest szeregiem  $I(0)$ ). Z równania (3.4) wynika wówczas, że *spread* jest także stacjonarny, a zatem istnieje pewna liniowa kombinacja stopy długo- i krótkookresowej, która jest stacjonarna. Oznacza to, że jeśli hipoteza oczekiwań jest słuszna, to stopy krótko- i długookresowe są skointegrowane, a wektor kointegrujący ma postać  $[1, -1]$ . Aby przeprowadzić analizę kointegracji konieczne jest sprawdzenie, czy zmienne w istocie posiadają pierwiastki jednostkowe.

Badanie stacjonarności stóp procentowych przeprowadzono w oparciu o trzy najpopularniejsze testy: test Augmented Dickey Fuller (ADF), test Phillipsa – Perrona (PP) oraz test Kwiatkowskie-

<sup>20</sup> Kryterium Schwarza służy do wyboru modelu spośród modeli o różnej liczbie parametrów. Wybór dokonywany jest na podstawie porównania logarytmu wiarygodności poszczególnych modeli, skorygowanego o liczbę szacowanych parametrów i liczbę obserwacji. Innym kryterium wykorzystywanym do tego celu jest kryterium Akaike, lecz przy zastosowaniu kryterium Schwarza wybierane są modele z mniejszą liczbą parametrów.

<sup>21</sup> H. Lutkepohl, *Multiple Time Series Analysis*, Springer Verlag 1990, s. 141.

<sup>22</sup> Błędzenie przypadkowe stopy procentowej oznacza, iż dla prognozowania poziomu przyszłej stopy procentowej nieprzydatne są informacje z przeszłości.

go, Phillipsa, Shmidta i Shina (KPSS). Wybrano te wersje testów, w których sprawdzane są hipotezy o stacjonarności (*stationarity*) i o błędzeniu przypadkowym (*random walk*)<sup>23</sup>. Dość często wskazuje się bowiem, że szeregi stóp procentowych są właśnie realizacjami procesów błędzenia przypadkowego bez dryfu.

Analiza kointegracji pozwala na wykrywanie zależności długoterminowych pomiędzy zmiennymi, które są niestacjonarne i posiadają pierwiastki jednostkowe. W takich przypadkach zwykła regresja może prowadzić do błędnych wniosków, co zostało pokazane przez Grangera i Newbolda (1974) oraz Phillipsa (1986).

Z twierdzenia Grangera o reprezentacji wynika, że jeśli zmienne są skointegrowane, to można je przedstawić w postaci modelu z mechanizmem korekty błędów (*vector error correction model*)<sup>24</sup>. Szacowane równanie ma postać:

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= \alpha_1(\beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3) + \sum_{i \in L} \gamma_{11,i} \Delta x_{t-i} + \sum_{i \in L} \gamma_{12,i} \Delta y_{t-i} + \chi_1 + \varepsilon_{1t} \\ \Delta y_t &= \alpha_2(\beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3) + \sum_{i \in L} \gamma_{21,i} \Delta x_{t-i} + \sum_{i \in L} \gamma_{22,i} \Delta y_{t-i} + \chi_2 + \varepsilon_{2t}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Zmiennymi  $x_t$  oraz  $y_t$  są stopy długo- i krótkookresowa, pozostałe oznaczenia są parametrami modelu oraz składnikami losowymi. W szczególności  $\beta_l$  są parametrami w mechanizmie korekty błędów (czyli prawdziwym wektorem kointegrującym), zaś  $\alpha_g$  (gdzie  $g=1, 2$  i jest numerem równania) jest szybkością dostosowania się poziomu danej stopy procentowej do odchylenia się wyrażenia w nawiasie od zera (naruszenia równowagi). Jak wcześniej zauważono, jeśli hipoteza oczekiwań sprawdza się, wektor kointegrujący powinien mieć postać  $[1, -1]$ . Wektor ten to po prostu  $[\beta_1, \beta_2]$  we wzorze (3.10). Model kointegracji to w pewnym sensie rozbudowany model VAR, który dopuszcza dodatkową estymację wektora kointegracyjnego oraz parametrów szybkości dostosowań. Ponadto umożliwia sprawdzenie czy  $\beta_1 R_{t-1} + \beta_2 r_{t-1}$  jest istotnie różne od  $R_{t-1} - r_{t-1}$ , czyli sprawdzenie zbieżności modelowego *spreadu* z rzeczywistym.

Szacowanie parametrów mechanizmu korekty błędów przeprowadzono z wykorzystaniem procedury Johansena. Ideą tej metody jest poszukiwanie maksymalnej korelacji kanonicznej pomiędzy zmiennymi a pierwszymi przyrostami tych zmiennych. Ta maksymalna korelacja kanoniczna odpowiada największej wartości własnej pewnej macierzy, którą tworzą kwadraty i iloczyny reszt z regresji zmiennych oraz pierwszych przyrostów zmiennych względem opóźnionych przyrostów zmiennych. Największej wartości własnej odpowiada natomiast wektor własny, który przyjmuje się jako ocenę wektora kointegrującego. Estymację odpowiednich równań przeprowadza się metodą największej wiarygodności<sup>25</sup>.

Liczbę wektorów kointegrujących w systemie autorzy weryfikują za pomocą testu największej wartości własnej (*maximum eigenvalue test*). Hipotezą zerową jest stwierdzenie, że w modelu występuje jedynie  $r$  wektorów kointegrujących wobec hipotezy alternatywnej mówiącej, że jest ich  $r+1$ . Testowanie rozpoczyna się od  $r = 0$  i ma charakter iteracyjny – postępowanie kończy się z chwilą, gdy niemożliwe jest odrzucenie hipotezy zerowej. Wartościami krytycznymi są wielkości wynikające z wielowymiarowego rozkładu Dickeya – Fullera<sup>26</sup>.

Po oszacowaniu wektora kointegrującego należy zadać sobie pytanie, czy jest on istotnie różny od wektora w postaci sugerowanej przez teorię. Autorzy stawiają wobec tego hipotezę zerową  $H_0$ : wektor kointegrujący ma postać  $[1, -1, c]$ , gdzie  $c$  jest stałą. Hipoteza alternatywna stanowi, że

<sup>23</sup> Patrz np. W. Charemza, D. Deadman, *Nowa ekonometria*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1997, s. 103-112.

<sup>24</sup> A. Banerjee, J. Dolado, J. Galbraith, D.F. Hendry, *Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data*, Oxford University Press, 1993, s. 145-152.

<sup>25</sup> Szczegóły odnośnie metody Johansena można znaleźć w: S. Johansen, *Statistical analysis of cointegration vectors*. W: *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1988 v. 12, s. 231-254.

<sup>26</sup> Wartości te są symulowane. Tablice podane są na przykład w M. Osterwald-Lenum, *A note with quantiles of the asymptotic distribution of the maximum likelihood cointegration rank test statistics*. W: *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 1992, vol 54, s. 461-472. Przypadek opisywany w tym artykule oznaczony jest przez 1\*.

wektor kointegrujący ma odmienną postać od tego w hipotezie zerowej. Hipoteza zerowa sprowadza się więc do stwierdzenia, że *spread* jest stacjonarny, i jest istotną determinantą długookresowych zmian stóp procentowych.

Wyboru pomiędzy hipotezami autorzy dokonują na podstawie testu ilorazu wiarygodności. Mianowicie autorzy szacują zarówno model z restrykcjami, jak i model bez restrykcji oraz zachowują wartość logarytmu wiarygodności. Modelem bez restrykcji jest model kointegracji, natomiast modelem z restrykcjami jest specjalnie na tę okazję oszacowany model VAR, w którym rolę zmiennych endogenicznych pełnią zmiany odpowiednich stóp procentowych, zaś egzogeniczną zmienną jest zmienna obliczona na podstawie restrykcji, czyli *spread* plus stała. Jako stałą przyjęto wyraz wolny z oszacowanego modelu mechanizmu korekty błędów.

Na tej podstawie obliczono statystykę testu:

$$\lambda_{emp} = -2 * (LL_{res} - LL_{nres}) \quad (3.11)$$

gdzie  $LL_{res}$  i  $LL_{nres}$  oznaczają odpowiednio logarytm wiarygodności modelu z restrykcjami oraz modelu bez restrykcji. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka testu ma rozkład  $\chi^2$  z jednym stopniem swobody.

Ponadto autorzy sprawdzają, czy oceny parametru szybkości dostosowań  $\alpha_i$  są ujemne<sup>27</sup> i istotnie różne od zera, gdyż tylko wtedy dodatni *spread* będzie związany ze wzrostami poszczególnych stóp procentowych.

<sup>27</sup> Wymaganie ujemności tej oceny wynika z przyjętej w artykule normalizacji wektora kointegrującego.

## 5 Badania i wyniki

Punktem wyjścia do weryfikacji, czy hipoteza oczekiwań może służyć w Polsce do poprawnego przewidywania zmian stóp procentowych było oszacowanie wartości jednomiesięcznych, jedno- i pięcioletnich zerokuponowych stóp procentowych.

### 5.1. Prosta regresja

Rezultaty oszacowania regresji opisanej równaniem (3.6) przedstawia tabela 1. Wielkość współczynnika kierunkowego wydaje się dalece odbiegać od tej sugerowanej przez teorię. Okazuje się jednak, że ocena ta nie odbiega istotnie od jedności, co potwierdzić można standardowym testem t-Studenta. Niestety jedynie około 7% zmienności średniej ważonej zmian krótkookresowych stóp procentowych może zostać objaśnione za pomocą tego modelu. Oznacza to, że stopy krótkookresowe zachowywały się w badanym okresie w sposób nieprzewidywalny, w szczególności nie do przewidzenia przez teorię taką, jak hipoteza oczekiwań.

**Tabela 1. Analiza regresji MNK średniej zmiany stopy krótkoterminowej względem spreadu („1miesiąc-1 rok”)**

Współczynnik kierunkowy regresji $b$	1,501
Odchylenie standardowe oceny współczynnika $b$	0,328
Odchylenie standardowe oceny obliczone na podstawie macierzy White'a	0,324
Statystyka empiryczna t-Studenta dla $H_0: \beta=1$	1,546
Współczynnik determinacji	0,073

Źródło: opracowanie własne.

### 5.2. Modelowanie VAR

Tabela 2 zawiera wyniki obliczeń statystyk na podstawie modelu VAR. Oszacowane zostały cztery modele, w tym dwa dla danych odnośnie stóp jednomiesięcznej i pięcioletniej. Obliczone współczynniki korelacji pomiędzy *spreadem* teoretycznym a rzeczywistym są bardzo różne od jedności, przy czym najwyższy jest on dla modelu „1 rok – 5 lat”. Dla modelu „1 miesiąc – 5 lat” współczynniki te są ujemne i bardzo niskie. Oznaczałoby to, że *spread* pomiędzy tymi stopami zachowuje się w rzeczywistości przeciwnie do wskazań teorii oczekiwań.

Iloraz odchyłeń standardowych jest w trzech przypadkach dość niski, co wskazuje, że rzeczywiste *spready* są o wiele bardziej chwiejne od teoretycznych. W modelu „1 miesiąc-1 rok” iloraz ten jest bardzo bliski jedności. Jednak jednostkowy wzrost *spreadu* rzeczywistego w tym modelu będzie związany przeciętnie ze wzrostem *spreadu* teoretycznego jedynie o pół jednostki. Podsumowując, wyniki te nie mogą prowadzić do przyjęcia hipotezy oczekiwań dla Polski.



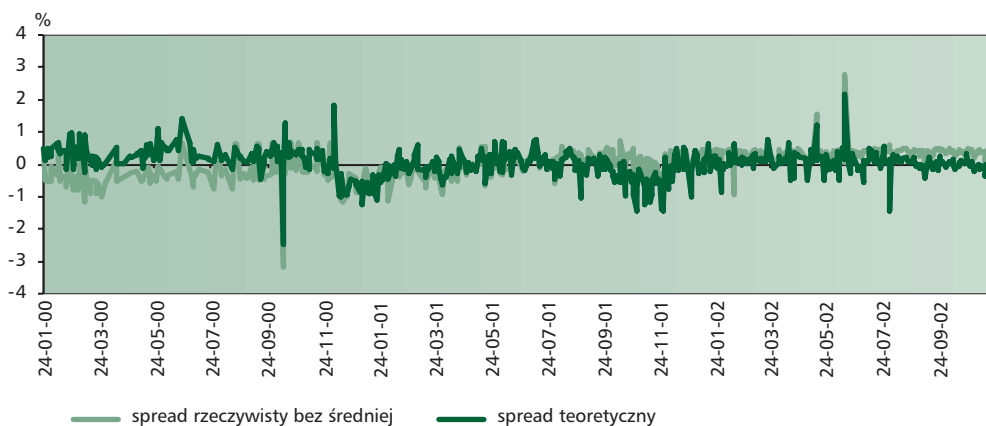
Tabela 2. Wyniki VAR pełna próba

	„1 miesiąc – 1 rok”	„1 rok – 5 lat”	„1 miesiąc – 5 lat”	
Rząd modelu VAR	2	1	2	3
Współczynnik korelacji	0,489	0,538	-0,817	-0,665
Iloraz odchyień standardowych	0,977	0,369	0,416	0,329
Współczynnik kierunkowy regresji	0,478	0,199	-0,340	-0,219
Ocena odchylenia standardowego składnika losowego regresji	0,004	0,001	0,006	0,006

Źródło: opracowanie własne.

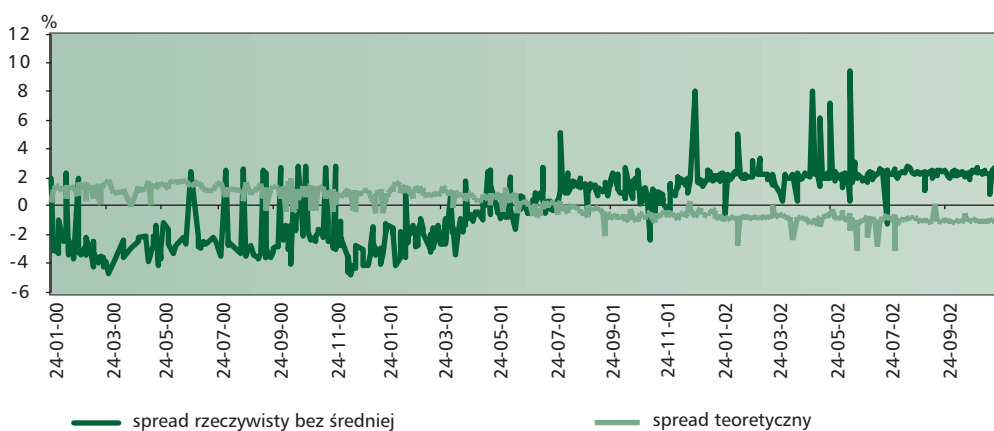
Poniżej zamieszczone są wykresy przedstawiające zestawienie *spreadów* rzeczywistych ze *spreadami* teoretycznymi.

Wykres 4. Spread rzeczywisty oraz spread teoretyczny w modelu „1 miesiąc – 1 rok”



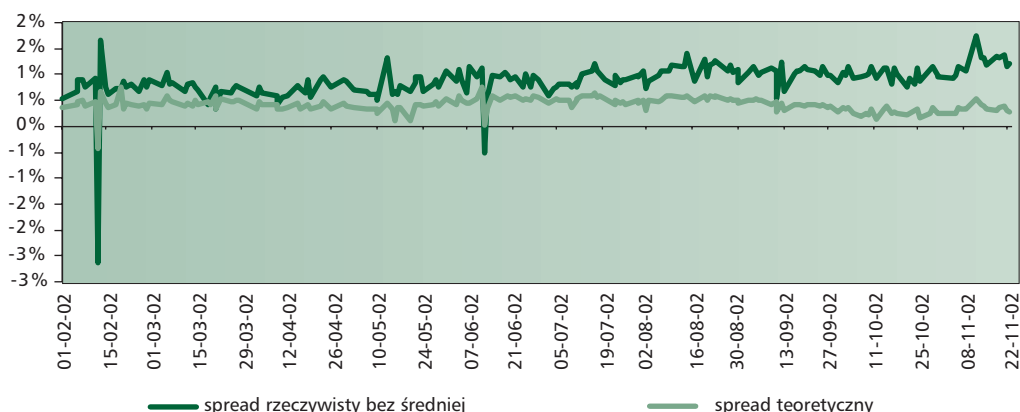
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 5. Spread rzeczywisty oraz spread teoretyczny w modelu „1 miesiąc – 5 lat” z dwoma opóźnieniami



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 6. Spread rzeczywisty oraz spread teoretyczny w modelu „1 rok – 5 lat”



Źródło: opracowanie własne.

W tabelach 3a - 3c autorzy prezentują wyniki testu „dobroci” modeli VAR. W większości przypadków hipoteza zerowa o braku autokorelacji czy korelacji krzyżowej reszt w poszczególnych modelach zostaje odrzucona. Autokorelacja reszt rzędu pierwszego dla modelu „1 miesiąc – 5 lat” równania dla zmiany stopy procentowej (ZMI) jest istotnie różna od zera, jest większa od wartości krytycznej. Oznacza to, że modele VAR nie zostały dobrze wyspecyfikowane. Ujęcie większej liczby opóźnień nie było jednakże możliwe ze względu na ograniczoną liczbę danych.

Powodem, dla którego modele VAR nie przechodzą testu białego szumu może być zbyt mała liczba lat, dla których dostępne są dane. Niewielkie więc pole manewru przy formułowaniu alternatywnych modeli. Problemu tego nie da się usunąć korzystając z danych o wysokiej częstotliwości.

Tabela 3a. Test sprawdzający czy reszty modelu VAR dla „1 miesiąc - 5 lat” są białym szumem

Opóźnienie	Autokorelacje reszt		Korelacje krzyżowe pomiędzy resztami	
	ZMI	SPR	ZMI, $SPR_{t-i}$	ZMI, $SPR_{t+i}$
<b>Model VAR z dwoma opóźnieniami (wartość krytyczna 0,086)</b>				
1	0,300	0,269	-0,094	-0,039
2	0,375	0,328	-0,131	-0,145
3	0,294	0,208	-0,086	-0,012
<b>Model VAR z trzema opóźnieniami (wartość krytyczna 0,089)</b>				
1	0,244	0,237	-0,0261	0,0401
2	0,351	0,309	-0,0824	-0,090
3	0,256	0,178	-0,0315	0,056

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3b. Test sprawdzający czy reszty modelu VAR dla „1 rok - 5 lat” są białym szumem

Opóźnienie	Autokorelacje reszt		Korelacje krzyżowe pomiędzy resztami	
	ZMI	SPR	ZMI, $SPR_{t-i}$	ZMI, $SPR_{t+i}$
<b>Model VAR z jednym opóźnieniami (wartość krytyczna 0,143)</b>				
1	0,825	0,565	-0,589	-0,575
2	0,827	0,606	-0,580	-0,585
3	0,787	0,552	-0,534	-0,565

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3c. Test sprawdzający czy reszty modelu VAR dla „1 miesiąc - 1 rok” są białym szumem

Opóźnienie	Autokorelacje reszt		Korelacje krzyżowe pomiędzy resztami	
	ZMI	SPR	ZMI, $SPR_{t-i}$	ZMI, $SPR_{t+i}$
<b>Model VAR z dwoma opóźnieniami (wartość krytyczna 0,086)</b>				
1	0,322	0,298	-0,082	-0,050
2	0,376	0,289	-0,154	-0,118
3	0,269	0,231	-0,103	-0,025

Źródło: opracowanie własne.

### 5.3. Model z mechanizmem korekty błędów

Analiza stacjonarności stóp procentowych daje dość jednoznaczne wyniki. Test ADF wskazuje na niestacjonarność wszystkich stóp procentowych zarówno przy rzędzie opóźnień  $k=25$ , jak i  $k=3$ , optymalnym z punktu widzenia kryterium Schwarz'a. Wiadomo jednakże, że test ten daje bardzo zniekształcone wyniki w przypadku występowania procesu średniej ruchomej (*moving average*) w składniku losowym.

Test Phillipsa-Perrona wskazuje na niestacjonarność jednomiesięcznej i jednorocznej stopy procentowej niezależnie od przyjętej wartości  $m$  ( $m=25$  lub  $m=1$ ). Jednak stopa pięcioletnia okazuje się być według tego testu stacjonarna (statystyka testu znacząco przekracza wartość krytyczną równą -14,51). Z kolei test KPSS wskazuje na to, że wszystkie stopy procentowe są błędzeniem przypadkowym. Autorzy oparli się dodatkowo na wzrokowej analizie wykresów 1, 2 i 3 i przyjęli, że wszystkie stopy procentowe są niestacjonarne.

Niestacjonarność stóp procentowych pozwala na oszacowanie modelu z mechanizmem korekty błędów. Jak wynika z tabeli 5, we wszystkich trzech możliwych modelach wykryte zostały wektory kointegrujące istotne na 1% poziomie istotności, co potwierdzają wyniki testu największej wartości własnej. Warto zauważyć, że w modelu „1 miesiąc – 1 rok” hipoteza o istnieniu dwóch wektorów kointegrujących zostaje przyjęta na 5% poziomie istotności, co sugeruje, że jedna lub obie stopy procentowe wykorzystane w tym modelu są w istocie stacjonarne. Oceny parametru przy stopie długookresowej są ujemne i mniejsze od minus jeden co oznacza, że dla zmian stóp procentowych w Polsce większe znaczenie ma to, co w przeszłości działo się ze stopami długookresowymi

Tabela 4. Analiza stacjonarności stóp procentowych

Nazwa	ADF I		PP		KPSS	
Stopa jednomiesięczna	25	3	25	1	25	1
	-1,55	-0,86	-9,74	-9,15	2,15**	26,64**
	nie	nie	nie	nie	nie	nie
Stopa jednoroczna	25	3	25	1	25	1
	-1,66	-1,00	-1,75	-3,66	2,14**	26,67**
	nie	nie	nie	nie	nie	nie
Stopa pięcioletnia	25	5	25	1	25	1
	-1,27	-0,87	-58,67**	-31,10**	1,77**	20,76**
	nie	nie	tak	tak	nie	nie

. \*\* Istotne dla  $\alpha=5\%$ ; \* Istotne dla  $\alpha=10\%$ ; nie = niestacjonarność, szereg jest błędziem przypadkowym; tak = stacjonarność

Źródło: opracowanie własne.

aniżeli krótkookresowymi. Szczególnie wysokie są owe oceny w modelach zawierających stopę pięcioletnią.

Test ilorazu wiarygodności pozwala na odrzucenie hipotezy zerowej we wszystkich trzech przypadkach na 1% poziomie istotności – także dla modelu „1 miesiąc – 1 rok”, gdzie wektor kointegrujący pozornie jest bliski wektorowi teoretycznemu. Okazuje się, że w Polsce nie *spread*, ale związek o nieco innej postaci pomiędzy stopami procentowymi determinuje zmiany stóp procentowych. Stopy procentowe nie zmieniają się w sposób określony przez hipotezę oczekiwań.

Tabela 5. Współczynniki modelu z mechanizmem korekty błędów bez restrykcji oraz wyniki testu ilorazu wiarygodności

	„1 miesiąc - 5 lat” <sup>28</sup>	„1 miesiąc - 1 rok” <sup>29</sup>	„1 rok - 5 lat” <sup>30</sup>
Stopa krótkookresowa	1,00	1,00	1,00
Stopa długookresowa	-1,74	-1,06	-1,39
Wyraz wolny	0,06	0,00	0,03
Statystyka testu największej wartości własnej dla $H_0$ : brak wektorów kointegrujących	197,47** <sup>31</sup>	277,99**	163,67**
Statystyka testu ilorazu wiarygodności	115,43	94,05	72,73
Wartość $p$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$

\*\* Wartość krytyczna dla  $\alpha=5\%$ : 15.67; dla  $\alpha=1\%$ : 20.20.

Źródło: opracowanie własne.

<sup>28</sup> Model z dwoma opóźnieniami: pierwsze o 20 okresów, drugie o 40 okresów.

<sup>29</sup> Model z dwoma opóźnieniami: pierwsze o 20 okresów, drugie o 40 okresów.

<sup>30</sup> Model z jednym opóźnieniem o 240 okresów.

<sup>31</sup> Hipoteza zerowa o jednym wektorze jest odrzucona na 5% poziomie istotności na rzecz hipotezy o istnieniu dwóch wektorów kointegrujących.

Zgodnie z tabelą 6, we wszystkich trzech modelach ujemna wartość mechanizmu korekty błędów będzie związana ze wzrostem stóp krótkoterminowych w przypadku, gdy nieprecyzyjnie ujmując, stopa długoterminowa będzie przewyższać stopę krótkoterminową. Dla przykładu jeżeli  $r_t - 1,74R_t + 0,057$  będzie ujemne, to nastąpi wzrost stóp krótkoterminowych zgodnie z wyrażeniem  $-0,153 \cdot (r_t - 1,74R_t + 0,057)$ . Wyniki dla zmian stóp długookresowych nie są tak jednoznaczne. Współczynniki szybkości dostosowań są dodatnie w dwóch z trzech modeli. Oznacza to, że gdy stopa długoterminowa jest wyższa od krótkoterminowej (a precyzyjniej ujmując, gdy np. wyrażenie dla modelu „1 miesiąc – 1 rok”  $r_t - 1,74R_t + 0,057$  będzie ujemne), to stopy długoterminowe będą spadać. Jest to wynik sprzeczny z hipotezą oczekiwań.

**Tabela 6. Istotność ocen parametrów szybkości dostosowania**

	„1 miesiąc – 5 lat”	„1 miesiąc – 1 rok”	„1 rok – 5 lat”
Ocena w równaniu			
dla stopy krótkookresowej	-0,153	-1,688	-0,045
Statystyka t dla $H_0: \alpha=0$	-7,531	-14,849	-2,958
Ocena w równaniu			
dla stopy długookresowej	0,233	- 0,880	0,454
Statystyka t dla $H_0: \alpha=0$	13,035	-10,870	13,291

Źródło: opracowanie własne.

## 6

## Podsumowanie

Autorzy przeprowadzili badanie, którego głównym celem było zbadanie, czy teoria oczekiwań pozwala przewidywać kierunek zmian stóp procentowych na rynku polskim. W okresie 14.09.1999 – 22.11.2002 analizowano, czy obserwując zmiany *spreadu* pomiędzy długoterminową a krótkoterminową stopą procentową można uzyskiwać informacje na temat kształtowania się krótkoterminowych stóp procentowych w przyszłości. W celu wyliczenia *spreadu* rzeczywistego, autorzy wyznaczyli stopy *spot*, które na rynku nie są obserwowane. W tym celu została wykorzystana metoda J. H. McCullocha prostych wielomianów. Do szacowania zerokuponowych krzywych dochodowości użyto obligacji skarbowych, które notowane były, w analizowanym okresie, na Giełdzie Papierów Wartościowych.

Do badania teorii oczekiwań i jej zdolności do prognozowania kierunków zmian przyszłych stóp procentowych wykorzystano trzy metody, które były także używane w podobnych badaniach na rynkach zagranicznych. Wśród nich są: prosta regresja linowa, model wektorowej autoregresji oraz model z korektą błędów. Każda z tych trzech metod została użyta do analizy trzech odrębnych modeli, różniących się od siebie założeniami co do określenia, czym jest stopa krótko- i długoterminowa. Każdy model różni się od siebie *spreadem*: model „1 miesiąc – 1 rok”, model „1 miesiąc – 5 lat”, model „1 rok – 5 lat”.

Autorzy w swoim badaniu nie dowiedli, iż na podstawie analizy *spreadu* można wyciągnąć wnioski co do zachowania się krótkoterminowych stóp procentowych zgodnie z założeniami teorii oczekiwań. Jak pokazały badania na innych rynkach, możliwość wykorzystania założeń teorii oczekiwań do prognozowania kierunków zmian w poziomie stóp procentowych uzależniona jest od rodzaju realizowanej strategii polityki pieniężnej, przyjętego okresu badawczego, płynności i efektywności rynku, wykorzystywanej do analizy metody oraz rodzaju danych, które są używane w badaniach. Ponadto autorzy chcą zwrócić uwagę, iż uzyskane wyniki mogą być obciążone pewnymi błędami, które mogą wynikać z:

- zbyt krótkiego okresu badawczego (badany okres obejmował jedynie około cztery lata),
- rodzaju wykorzystywanych danych i sposobu estymacji zerokuponowej krzywej dochodowości,
- płynności rynku, która warunkuje liczbę danych i ich jakość (autorzy mieli dostęp tylko do danych z Giełdy Papierów Wartościowych, natomiast bardziej płynnym rynkiem jest rynek międzybankowy),
- zdefiniowania stopy krótko- i długookresowej.

## 7

## Bibliografia

- Banerjee A., Dolado J., Galbraith J., Hendry D.F. (1993), *Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data*, Oxford University Press.
- Boero G., Torricelli C. (1999), *The information in the term structure of interest rates: further results for Germany*.
- Campbell J.Y., Shiller R. J. (1987), *Cointegration and tests of present value models*. Journal of Political Economy, 95.
- Chambers D. R., Carleton W. T., Waldman D. W. (1984), *A new approach to estimation of the term structure of interest rates*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19, No. 3.
- Charemza W., Deadman D. (1997), *Nowa ekonometria*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Engsted T., Tanggaard C. (1995), *The predictive power of yield spreads for future interest rates: evidence from the Danish term structure*. Scandinavian Journal of Economics 97(1).
- Fabozzi F. J., Fong G. (2000), *Zarządzanie portfelem inwestycji finansowych przynoszących stały dochód*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Fabozzi F. J. (2000), *Rynki obligacji. Analiza i strategia*, WIG-PRESS, Warszawa.
- Fama E. J. (1984), *The information in the term structure*. Journal of Financial Economics, 13.
- Fama E. J., Bliss R.R. (1987), *The information in long-maturity forward rates*. American Economic Review, 77.
- Fama E. J. (1990), *Term-structure forecasts of interest rates, inflation, and real returns*, Journal of Monetary Economics, 25.
- Granger C., Newbold P. (1974), *Spurious regression in econometrics*. Journal of Econometrics, v. 2.
- Hardouvelis G.A. (1994), *The term structure spread and future changes in long and short rates in the G7 countries*. Journal of Monetary Economics, 33.
- Johansen S. (1988), *Statistical analysis of cointegration vectors*. Journal of Economic Dynamics and Control, v. 12.
- Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the null hypothesis of stationary against the alternative of a unit root*. Journal of Econometrics, v. 54.
- Lange R. (1999), *The expectations hypothesis for the longer end of the term structure: some evidence for Canada*, Bank of Canada, Working Paper 99-20.
- Lutkepohl H. (1990), *Multiple Time Series Analysis*, Springer Verlag.
- Mankiw N. G., Summers L. H. (1984), *Do long-term interest rates overreact to short-term interest rates?* Brookings Papers on Economic Activity, 1.
- Mankiw N. G. (1986), *The term structure of interest rates revisited*, Brookings Papers on Economic Activity, 1.
- McCulloch J. H. (1971), *Measuring the term structure of interest rates*. Journal of Business, XLIV.

- Mishkin F. S. (1988), *The information in the term structure of interest rates: some further results*. Journal of Applied Econometrics, 3, 4.
- Mishkin F. S. (1990), *Yield curve*, NBER Working Papers, No. 3550.
- Mishkin F. S. (2002), *Ekonomika pieniądza, bankowości i rynków finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Nelson C. R., Siegel A. F. (1987), *Parsimonious modeling of yield curves*. Journal of Business, 60, No. 40.
- Newey W.K., West K.D. (1987), *A Simple, Positive Definite, Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*, Econometrica, vol. 55.
- Phillips P.C.B. (1986), *Understanding spurious regression in econometrics*. Journal of Econometrics, v. 33.
- Phillips P.C.B., Perron P. (1988), *Testing for a unit root in a time series regression*. Biometrika, v. 75.
- Rudin W. (2000), *Wstęp do analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Sargent T. J. (1976), *A classical macroeconomic model for the United States*. The Journal of Political Economy, v. 84.
- Schwarz G. (1978), *Estimating the Dimension of a Model*. Annals of Statistics, Vol. 6, No. 2.
- Shiller R. J. (1979), *The volatility of long term interest rates and expectations model of the term structure*. Journal of Political Economy, 87.
- Shiller R. J., Campbell J. Y., Schoenholtz K. L. (1983), *Forward rates and future policy: interpreting the term structure of interest rates*, Brookings Papers on Economic Activity, 1.
- Sutton G. D. (2000), *A defence of the expectations theory as a model of US long-term interest rates*, BIS Working Papers, no. 85.

*Ostatnie publikacje Narodowego Banku Polskiego z serii „Materiały i Studia”*

Zeszyt Nr	Data	Tytuł	Autor
154	01/03	Mały strukturalny model inflacji. Wersja 3.5.6	Bohdan Kłos
155	01/03	Długo- i krótkookresowa składowa Produktu Krajowego Brutto według metody Blancharda i Quaha	Jolanta Zięba
156	03/03	Nadzorcze normy ostrożnościowe według znowelizowanej ustawy Prawo bankowe na tle regulacji Unii Europejskiej (aspekty prawne)	Arkadiusz Kawulski Bernard Smykla
157	04/03	System finansowania zatrudnienia osób niepełnosprawnych w Polsce Wnioski dla efektywności finansów publicznych	Dorota Poznańska
158	07/03	Czym są finanse behawioralne, czyli krótkie wprowadzenie do psychologii rynków finansowych	Piotr Zielonka