

MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 191

Szoki w preferencjach czy w technologii?

Próba wyjaśnienia zmienności cen
aktywów finansowych na tle teorii CCAP i RBC

Bogdan Dobrzeniecki

Warszawa, maj 2005 r.

Projekt graficzny:

Oliwka s.c.

Skład i druk:

Drukarnia NBP

Wydął:

Narodowy Bank Polski
Departament Komunikacji Społecznej
00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21
tel. (22) 653 23 35, fax (22) 653 13 21

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2005

Materiały i Studia rozprowadzane są bezpłatnie.

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: <http://www.nbp.pl>

Spis treści

Streszczenie	5
Wstęp	6
1. Wycena aktywów oparta na konsumpcji	7
1.1. Zagadka premii akcyjnej	10
1.1.1. Stochastyczny czynnik dyskontujący	10
1.1.2. Wycena aktywów oparta na konsumpcji z użytecznością potęgową	13
1.1.3. Zagadka stopy zwrotu bez ryzyka	14
1.1.4. Stopa zwrotu z obligacji, zagadka premii akcyjnej i zagadka premii wolnej od ryzyka	15
1.1.5. Separowanie awersji od ryzyka i międzyokresowej substytucji	16
1.2. Dynamika zwrotu z aktywów i konsumpcja	18
1.2.1. Zmiany w warunkowych oczekiwaniach	18
1.2.2. Metoda log-liniowa wyceny aktywów	18
1.2.3. Zagadka zmienności rynku akcji	21
1.2.4. Wpływ na zagadkę premii akcyjnej`	23
1.3. Cykliczne zmiany w cenie ryzyka	25
1.3.1. Formowanie przyzwyczajeń konsumpcyjnych	25
1.3.2. Model z heterogenicznymi agentami	31
1.3.3. Nieracjonalne oczekiwania	33
2. Realny cykl koniunkturalny a ceny aktywów	36
2.1. Ekonomia wymiany	36
2.1.1. Model	36
2.1.2. Preferencje i zwrot z aktywów	39
2.2. Ekonomia z jednym sektorem produkcyjnym	41
2.2.1. Model	41
2.3. Ekonomia z dwoma sektorami produkcyjnymi	42
2.3.1. Ekonomia z dwoma sektorami produkcyjnymi z pełną mobilnością pracy	43
2.3.2. Efekt dźwigni finansowej	44
2.4. Uzupełnienia	46
2.4.1. Współczynnik q -Tobina	46
2.4.2. Dyskusja	48
3. Struktura terminowa stóp procentowych	50
3.1. Dyskretny model terminowej stopy procentowej	50
3.1.1. Stochastyczny czynnik dyskontujący	50

3.1.2. Nachylenie krzywej dochodowości	53
3.2. Krzywa dochodowości i hipoteza oczekiwa	54
3.3. Ekonomia Alvaréza-Jermanna – ceny aktywów	56
3.3.1. Model	56
3.3.2. Ceny aktywów	57
3.3.3. Premia za ryzyko i premia za okres	58
3.4. Krzywa dochodowości i prognozowanie konsumpcji	59
4. Wnioski	61
5. Bibliografia	64

Streszczenie

Ostatnia dekada XX wieku pokazała gwałtowny wzrost indeksów giełdowych i spadek stóp procentowych, a co za tym idzie spadek rentowności obligacji. Pojawiło się naturalne pytanie o źródło tego zjawiska. Czy leży ono po stronie zwiększonego optymizmu konsumentów, czy może po stronie rosnącej wydajności produkcji? Niniejsza monografia jest próbą formalnej odpowiedzi na to pytanie. Rozwiązanie tego problemu jest możliwe poprzez jednolite ujęcie teorii wyceny aktywów opartej o konsumpcję (CCAPT - *Consumption Based Asset Pricing Theory*) wraz z jej rozszerzeniem na dyskretne modele terminowej struktury stopy procentowej oraz teorii realnego cyklu koniunkturalnego (RBCT - *Real Business Cycle Theory*). Jednym z głównych wniosków płynących z pracy jest stwierdzenie, że wysoki poziom cen akcji i niski poziom stóp procentowych może być spowodowany dużym optymizmem konsumentów, zarówno tym racjonalnym, czyli uwzględniającym międzyokresowe ograniczenie budżetowe, jak i tym nieracjonalnym. Natomiast duża zmienność cen akcji i mała zmienność stóp procentowych musi płynąć ze zmian w produktywności kapitału i efektywności pracy.

JEL: C61, E32, G12, G13

Słowa kluczowe: CCAPM, RBC, premia akcyjna, zmienność cen akcji, zmienność cen obligacji, dźwignia finansowa, struktura terminowa stopy procentowej

Wstęp

Celem tej pracy jest jednolite ujęcie problematyki wyceny aktywów finansowych, w tym zagadnienia struktury terminowej stóp procentowych w kontekście modeli CCAPM (*Consumption Based Capital Asset Pricing Model*) oraz RBCM (*Real Business Cycle Model*). Nowoczesne ujęcie makroekonomiczne, operujące aparatem równowagi ogólnej (lub częściowej) poszukuje głównego źródła wahań koniunktury i co za tym idzie wahań cen aktywów finansowych w szokach produkcyjnych (technologicznych). Z drugiej strony teoria finansów skłania się ku badaniu szoków w preferencjach, czyli zmian w funkcji użyteczności, wynikających z subiektywnej oceny niepewności i idących za tym zmianach w międzyokresowej alokacji. Gdzie zatem są szoki? Jak wpływają one na ekonomię realną, czyli przede wszystkim na konsumpcję, która jest czynnikiem łączącym modele CCAPM oraz RBCM? Od czego zależy i jak zmienia się cena aktywów wolnych od ryzyka oraz z ryzykiem? W jaki sposób generowana jest cykliczność cen akcji i stopy wolnej od ryzyka? Jak ten problem zmienia się na tle dyskretnego modelu terminowej stopy procentowej?

1

Wycena aktywów oparta o konsumpcję

1

Zachowanie zagregowanych cen aktywów jest źródłem nieustającej fascynacji ekonomistów, inwestorów i regulatorów. W ostatnich latach ceny aktywów zachowywały się zgodnie ze znajomym wzorcem, wykazując wysoką stopę zwrotów oraz dużą i procykliczną zmienność. Ekonomiści włożyli wiele wysiłku, aby zrozumieć ten wzorec. Jeżeli ceny aktywów są zdeterminowane przez fundamenty teorii ekonomii, to jakie właściwie są te fundamenty i jaki mechanizm funkcjonuje jeżeli chodzi o ruchy cen aktywów finansowych.

Zacznijmy od przedstawienia kilku faktów ekonomicznych dla gospodarki USA, związanych z cenami aktywów ryzykownych i instrumentów pieniężnych oraz konsumpcji. Analizę zaczniemy od klasycznej postaci CCAPM, którą będziemy się starali rozszerzać, aby wyjaśnić możliwie najwięcej zaobserwowanych zjawisk. W tej części rozpatrujemy tylko implikacje dla cen aktywów wynikające z funkcji użyteczności inwestora. Nie będziemy się natomiast zajmować sferą produkcyjną, technologią i pracą.

Przedstawmy kilka faktów ekonomicznych zaobserwowanych w ostatnich latach. Campbell (1998):

1. Średni realny zwrot z cen akcji jest wysoki. Na podstawie danych kwartalnych gospodarki amerykańskiej w okresie od lutego 1947 r. do kwietnia 1996 r. ten wskaźnik wynosi 7,6% rocznie.
2. Średni poziom realnej stopy procentowej jest niski. 3-miesięczne amerykańskie obligacje skarbowe dają zwrot, który jest pozbawiony ryzyka w wartościach nominalnych i zbliżony do realnej stopy procentowej, ponieważ jest niska niepewność co do inflacji w horyzoncie 3 miesięcy. Realny zwrot z takich obligacji wynosił w okresie powojennym tylko 0,8% rocznie.
3. Realny zwrot z akcji jest bardzo zmienny, ze zannualizowanym odchyleniem standardowym rzędu 15,5%, na podstawie danych amerykańskich.
4. Realna stopa procentowa jest znacznie mniej zmienna. Zannualizowane odchylenie standardowe mierzone na amerykańskich obligacjach skarbowych wynosi 1,8%. Znaczna część tej zmienności jest spowodowana krótkoterminowym ryzykiem inflacji. Ponieważ mniej niż połowa wariancji obligacji skarbowych jest prognozowana, to odchylenie standardowe mierzone *ex ante* jest znacznie niższe niż 1,8%.

5. Realny wzrost konsumpcji jest bardzo gładki. Zannualizowane odchylenie standardowe stopy wzrostu konsumpcji artykułów nietrwałych i usług po oczyszczeniu z sezonowości wynosi 1,1%.
6. Wzrost realny dywidend jest bardzo zmienny w krótkim horyzoncie, ponieważ dywidendy nie są oczyszczane z sezonowości. Zannualizowane kwartalne odchylenie standardowe z realnego wzrostu dywidendy wynosi 28,8%. W długim okresie wzrost dywidendy mieści się pomiędzy zmiennością zwrotów z akcji oraz wzrostu konsumpcji. W wartościach rocznych wzrost realnej dywidendy wynosi tylko 6%.
7. Kwartalny wzrost realnej konsumpcji i wzrost realnych dywidend odznacza się bardzo słabą korelacją na poziomie 0,06, ale korelacja zwiększa się wraz ze zwiększaniem horyzontu czasowego. Dla okresu czterech lat jest to korelacja rzędu 0,25.
8. Realny wzrost konsumpcji i realny zwrot z akcji ma kwartalną korelację rzędu 0,22. Korelacja zwiększa się do 0,33 przy rocznym horyzoncie, ale zmniejsza się przy dalszym wydłużaniu.
9. Kwartalne realne wzrosty dywidendy i realne zwroty z akcji mają bardzo słabą korelację rzędu 0,04, ale korelacja zwiększa się znacznie do 0,51 przy 4-letnim horyzoncie.
10. Realny wzrost konsumpcji nie jest dobrze prognozowany ani na podstawie danych historycznych, ani na podstawie danych rynku akcji.
11. Realny wzrost dywidendy wykazuje się pewną krótkookresową prognozowalnością wynikającą z sezonowości. Nie jest jednak dobrze prognozowalny poprzez dane z rynku akcji. Logarytmiczny wskaźnik cena-dywidenda objaśnia zaledwie 8% wariancji realnego wzrostu dywidendy na przestrzeni od roku do 4 lat.
12. Realne stopy procentowe wykazują pewną pozytywną autokorelację. Jednak realne stopy procentowe nie są dobrze prognozowalne przez rynek akcji. Na przykład logarytmiczna stopa cena-dywidenda objaśnia zaledwie 1% wariancji realnej stopy procentowej na przestrzeni od roku do 4 lat.
13. Nadwyżka zwrotu na akcjach w porównaniu z oprocentowaniem bonów skarbowych jest wysoce prognozowalna. Wskaźnik logarytmiczny cena-dywidenda objaśnia 18% wariancji nadwyżki zwrotu przy horyzoncie 1 roku, 34% przy 2 latach i 51% przy 4 letnim horyzoncie.

Powyższe fakty podnoszą dwie istotne kwestie dla badaczy zagadnień makroekonomii i finansów:

1. Dlaczego średni realny zwrot z akcji jest tak wysoki w porównaniu ze średnią krótkookresową stopą procentową; oraz

2. Dlaczego zmienność zwrotów z akcji jest tak wysoka w porównaniu ze zmiennością krótkookresowej realnej stopy procentowej?

Będziemy nazywać – za Mehra i Prescottem (1985) – pierwsze pytanie „zagadką premii akcyjnej” oraz – za Campbellem (1998) – pytanie drugie „zagadką zmienności rynku akcji”. Teoria finansów wyjaśnia, że nadwyżka zwrotu z instrumentu obciążonego ryzykiem w porównaniu ze stopą zwrotu instrumentu bez ryzyka to ilość ryzyka mnożona przez cenę ryzyka. W standardowym modelu wyceny aktywów opartym o konsumpcję, ilość ryzyka rynkowego jest mierzona przez kowariancję między nadwyżką zwrotu a wzrostem konsumpcji. Cena ryzyka jest współczynnikiem awersji do ryzyka reprezentatywnego inwestora. Wysoki średni zwrot z akcji oraz niska krótkookresowa stopa procentowa (fakt 1. i 2.) oznaczają, że nadwyżka, czyli premia akcyjna jest wysoka. Ale wygładzenie konsumpcji powoduje, że kowariancja pomiędzy zwrotami z akcji i konsumpcją jest niska. Stąd premia akcyjna może być wyjaśniona za pomocą bardzo wysokiego współczynnika awersji do ryzyka.

Między innymi Hansen i Cochrane (1992) powiązali zagadkę premii akcyjnej ze stochastycznym czynnikiem dyskontującym lub równoznacznie ze zmiennością międzyokresowej krańcowej stopy substytucji konsumpcji dla reprezentatywnego inwestora. W tej metodologii duża zmienność rynku akcji spowodowana jest ekstremalnie zmiennym stochastycznym czynnikiem dyskontującym.

Wielu autorów odpowiedziało na zagadkę premii akcyjnej stwierdzając, że awersja do ryzyka jest rzeczywiście wyższa niż to się powszechnie zakłada. Jeżeli inwestorzy są bardzo awersyjni wobec ryzyka, wtedy mają silną motywację do przenoszenia bogactwa z okresów z wysoką konsumpcją do okresów z niską konsumpcją. Odkąd konsumpcja zaczęła w sposób ciągły rosnąć, wysoka awersja do ryzyka może powodować, że inwestorzy chcą pożyczać swoje bogactwo tak, aby zmniejszyć różnicę pomiędzy bieżącą a przyszłą konsumpcją. Aby połączyć ten fakt z niską realną stopą procentową, możemy zaobserwować, że inwestorzy są wyjątkowo cierpliwi, jeżeli chodzi o konsumpcję. Ich preferencje dają przyszłej konsumpcji prawie tak samo dużą lub nawet wyższą wagę niż bieżącej konsumpcji. Innymi słowy mają oni niską lub nawet negatywną stopę preferencji czasowej.

W podrozdziale 1.1 przedstawimy zagadnienie zagadki premii akcyjnej, a potem przejdziemy do badania zależności między zwrotami z aktywów i konsumpcją (podrozdział 1.2). Zagadkę zmienności rynku akcji postaram się wyjaśnić w podrozdziale 1.3, a następnie zaprezentujemy cykliczność cen akcji na tle konsumpcji (podrozdział 1.4).

1.1. Zagadka premii akcyjnej

Poniższa część jest oparta w dużej części na rachunkach zaprezentowanych przez Cochrane (2000) oraz Campbella (1998).

1.1.1. Stochastyczny czynnik dyskontujący

Aby zrozumieć zagadkę premii akcyjnej należy rozważyć problem międzyokresowego wyboru inwestora, oznaczonego początkowo przez k , który inwestuje w czasie t w walor i i może uzyskać w czasie $t+1$ stopę zwrotu równą $(1+R_{i,t+1})$. Jeżeli inwestor konsumuje C_{kt} w czasie t i ma separowalne w czasie użyteczności z czynnikiem dyskontującym δ oraz użyteczność okresową $U(C_{kt})$, wtedy warunek pierwszego rzędu jest następujący¹:

$$U'(C_{kt}) = \delta E_t[(1 + R_{i,t+1})U'(C_{k,t+1})]. \quad (1)$$

Lewa strona tego równania oznacza krańcową stratę użyteczności wynikającą ze straty konsumpcji wartości jednego dolara. Prawa strona powyższego równania oznacza natomiast oczekiwaną krańcową korzyść z konsumpcji w czasie $t+1$, wynikającą z zainwestowania jednego dolara w czasie t i sprzedaży waloru w czasie $t+1$. Inwestor, aby zoptymalizować międzyokresową użyteczność zrównuje krańcową stratę i korzyść. Stąd równanie (1).

Dzieląc powyższe równanie przez $U'(C_{kt})$ otrzymujemy:

$$1 = E_t[(1 + R_{i,t+1})\delta \frac{U'(C_{k,t+1})}{U'(C_{kt})}] = E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{k,t+1}], \quad (2)$$

gdzie $M_{k,t+1} = \delta \frac{U'(C_{k,t+1})}{U'(C_{kt})}$ jest międzyokresową stopą substytucji inwestora, nazywaną

też *stochastycznym czynnikiem dyskontującym*. Istnienie dodatniego czynnika stochastycznego jest gwarantowane przez warunek braku arbitrażu na rynkach, na których inwestor może inwestować bez kosztów transakcyjnych. Na rynku może być wiele takich czynników dyskontujących, na przykład różni inwestorzy, których użyteczności charakteryzuje różny proces stochastyczny mają różny czynnik $M_{k,t+1}$. Ale każdy czynnik dyskontujący musi spełniać powyższe równanie. Można w tym momencie opuścić subskrypt k i napisać po prostu:

$$1 = E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}]. \quad (3)$$

Na kompletnych rynkach stochastyczny czynnik dyskontujący M_{t+1} jest unikalny, ponieważ inwestorzy mogą handlować między sobą, aby dostosować wypłatę z inwestycji do krańcowej użyteczności.

¹ Dokładne wyprowadzenie tego wzoru znajduje się w Cochrane (2000), s. 14-15.

Aby zrozumieć wnioski wynikające z równania (3) przekształćmy wartość oczekiwaną iloczynu jako iloczyn wartości oczekiwanych plus kowariancję,

$$E_t[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}] = E_t[(1 + R_{i,t+1})]E_t[M_{t+1}] + Cov_t[R_{i,t+1}, M_{t+1}]. \quad (4)$$

Podstawiając do (3) i przekształcając otrzymujemy:

$$1 + E_t[R_{i,t+1}] = \frac{1 - Cov_t[R_{i,t+1}, M_{t+1}]}{E_t[M_{t+1}]}. \quad (5)$$

Aktywa z wysokim oczekiwanym zwrotem muszą mieć niską kowariancję ze stochastycznym czynnikiem dyskontującym (patrz na licznik). Takie aktywa mają niski zwrot, kiedy inwestorzy mają wysoką krańcową użyteczność (patrz na mianownik).

Równanie (5) musi być spełnione dla każdego aktywa, włączając w to aktywa bez ryzyka, dla których zwrot jest równy $1 + R_{f,t+1}$. Stąd walor bez ryzyka ma zerową kowariancję ze stochastycznym czynnikiem dyskontującym (lub każdą inną zmienną losową). Stąd mamy:

$$1 + R_{f,t+1} = \frac{1}{E_t[M_{t+1}]}. \quad (6)$$

Można użyć tego równania do przekształcenia równania (5) jako:

$$1 + E_t[R_{i,t+1}] = (1 + R_{f,t+1})(1 - Cov_t[R_{i,t+1}, M_{t+1}]). \quad (7)$$

Dla ułatwienia założymy, że łączny rozkład zwrotu z aktywów oraz stochastycznego czynnika dyskontującego jest lognormalny i homoskedastyczny. Te założenia nie są zbyt realistyczne, odkąd zwroty akcji charakteryzują się tzw. *ciężkimi ogonami z wariancjami*, które zmieniają się w czasie, niemniej jednak bardzo ułatwiają zrozumienie mechanizmu premii akcyjnej.

Jeżeli zmienna losowa X ma warunkowy rozkład lognormalny, wtedy ma bardzo przydatną własność:

$$\log E_t X = E_t X + \frac{1}{2} Var_t \log X,^2 \quad (8)$$

gdzie $Var_t \log X \equiv E_t[(\log X - E_t \log X)^2]$. Jeśli dodatkowo X jest warunkowo homoskedastyczny, wtedy $Var_t \log X \equiv E_t[(\log X - E_t \log X)^2] = Var(\log X - E_t \log X)$. Zgodnie z założeniem lognormalności rozkładu zwrotów akcji oraz konsumpcji poprzez zlogarytmowanie równania (3) otrzymujemy:

$$0 = E_t r_{i,t+1} + E_t m_{t+1} + \frac{1}{2} (\sigma_i^2 + \sigma_m^2 + 2\sigma_{im}). \quad (9)$$

W tym równaniu przyjęliśmy oznaczenia $m_t = \log(M_t)$ oraz $r_{it} = \log(1 + R_{it})$, gdzie σ_i^2 oznacza bezwarunkową wariancję z nieuwzględnionego w oczekiwaniach logarytmu

² Wynika to z faktu: $E(e^z) = e^{E(z) + (1/2) \sigma^2(z)}$.

zwrotów z aktywów $Var(r_{i,t+1} - E_t r_{i,t+1})$, a σ_m^2 oznacza bezwarunkową wariancję z nieuwzględnionego w oczekiwaniach logarytmu stochastycznego czynnika dyskontującego $Var(m_{t+1} - E_t m_{t+1})$, a σ_{im} oznacza bezwarunkową kowariancję między nieuwzględnionym w oczekiwaniach zwrotem i stochastycznym czynnikiem dyskontującym $Cov(r_{i,t+1} - E_t r_{i,t+1}, m_{t+1} - E_t m_{t+1})$. Rozważmy walor pozbawiony ryzyka ze zwrotem $r_{f,t+1}$. Dla tego aktywa wartości wariancji nieoczekiwanego zwrotu σ_f^2 i kowariancji między nieoczekiwanym zwrotem oraz nieoczekiwanym stochastycznym czynnikiem dyskontującym σ_{fm} wynoszą zero. Stąd stopa zwrotu bez ryzyka spełnia równanie:

$$r_{f,t+1} = -E_t m_{t+1} - \frac{\sigma_m^2}{2}. \quad (10)$$

Jest to logarytmiczny odpowiednik równania (6).

Odejmując (10) od (9) otrzymujemy wzór na oczekiwaną nadwyżkę pomiędzy zwrotem z aktywa z ryzykiem i pozbawionym ryzyka:

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \frac{\sigma_i^2}{2} = -\sigma_{im}. \quad (11)$$

Wariancja z lewej strony tego równania jest dostosowana z nierówności Jensena, wynika z faktu, że opisujemy oczekiwane logarytmy zwrotów. Ten wyraz znika, gdy rozważamy logarytm ze stosunku zwrotów z aktywa z ryzykiem i bez ryzyka: $\log E_t[(1 + R_{i,t+1})/(1 + R_{f,t+1})] = -\sigma_{im}$. Prawa strona równania (11) mówi, że logarytm z premii za ryzyko (premii akcyjnej) jest wywołany kowariancją pomiędzy zwrotem z aktywa i stochastycznym czynnikiem dyskontującym, przedstawioną ze znakiem ujemnym. Znak ujemny mówi nam, że wysoko wyceniane są aktywa, które są ujemnie skorelowane z konsumpcją, to znaczy wygładzają ją. Dają one wysoki zwrot, gdy konsumpcja jest niska, a niski, gdy konsumpcja jest wysoka. To równanie jest logarytmicznym odpowiednikiem równania (7).

Kowariancję σ_{im} można zapisać jako iloczyn odchylenia standardowego zwrotu z aktywa σ_i , odchylenia standardowego stochastycznego czynnika dyskontującego σ_m oraz korelacji pomiędzy tymi wartościami ρ_{im} . Jak wiadomo zachodzi: $\rho_{im} \geq -1$, $-\sigma_{im} \leq \sigma_i \sigma_m$. Wstawiając do równania (11) mamy:

$$\sigma_m \geq \frac{E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \frac{\sigma_i^2}{2}}{\sigma_i}. \quad (12)$$

Prawa strona tego równania oznacza nadwyżkę zwrotu z instrumentu z ryzykiem w porównaniu z instrumentem wolnym od ryzyka, wystandaryzowaną przez odchylenie standardowe nieoczekiwanego zwrotu z instrumentu z ryzykiem - jest to tzw.

współczynnik Sharpe'a dla instrumentu. Nierówność (12) mówi, że odchylenie standardowe z logarytmu stochastycznego czynnika dyskontującego musi być większe niż współczynnik Sharpe'a liczony dla każdego z instrumentów dostępnych na rynku. A zatem uzyskaliśmy oszacowanie z dołu odchylenia standardowego logarytmu stochastycznego czynnika dyskontującego.

Z powyższej nierówności płynie pierwszy ważny wniosek. Mianowicie, wystandaryzowany przez odchylenie standardowe zwrot z instrumentu z ryzykiem nie może być procentowo większy niż zmienność w stochastycznym czynniku dyskontującym, czyli w zmianach międzyokresowej substytucji konsumpcji.

1.1.2. Wycena aktywów oparta na konsumpcji z użytecznością potęgową

Prowadźmy dalej nasze wnioskowanie za Mehra i Prescottem (1985). Załóżmy, że istnieje reprezentatywny agent, który maksymalizuje swoją separowalną w czasie funkcję użyteczności zdefiniowaną na zagregowanej konsumpcji C_t jako:

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad (13)$$

gdzie γ jest współczynnikiem awersji do ryzyka γ . Jest to tak zwana relatywna awersja do ryzyka (RRA). Ta funkcja użyteczności ma kilka istotnych własności. Po pierwsze, jest niewrażliwa na skalę. Jeżeli rozkład zwrotów jest stały, premia za ryzyko nie zmienia się w czasie wraz z rosnącym bogactwem. A zatem jeżeli różni inwestorzy mają różny poziom bogactwa, ale takie same użyteczności potęgowe, wtedy mogą oni być zagregowani do jednego reprezentatywnego inwestora z tą samą funkcją użyteczności jak indywidualni inwestorzy. Mniej pożądaną własnością jest to, że elastyczność międzyokresowej substytucji, oznaczana przez ψ , jest odwrotnością współczynnika awersji do ryzyka.

Potęgowa funkcja użyteczności powoduje, że krańcowa użyteczność wynosi $U'(C_t) = C_t^{-\gamma}$, a stochastyczny czynnik dyskontujący $M_{t+1} = \delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$. Założenie poczynione wcześniej, mówiące o tym, że stochastyczny czynnik dyskontujący jest warunkowo lognormalny, będzie zastąpione przez założenie, że zagregowana konsumpcja jest warunkowo lognormalna. Z tym założeniem przyjmujemy oznaczenia: $m_{t+1} = \log(\delta) - \gamma \Delta c_{t+1}$, gdzie $c_t = \log(C_t)$. Stąd możemy przekształcić równanie (9) i otrzymujemy:

$$0 = E_t r_{i,t+1} + \log \delta - \gamma E_t \Delta c_{t+1} + \frac{1}{2} [\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma \sigma_{ic}] \quad (14)$$

W równaniu tym σ_c^2 oznacza bezwarunkową wariancję logarytmu nieoczekiwanej konsumpcji $Var(c_{t+1} - E_t c_{t+1})$, a σ_{ic} oznacza bezwarunkową kowariancję pomiędzy nieoczekiwanymi zwrotami i konsumpcją $Cov(r_{i,t+1} - E_t r_{i,t+1}, c_{t+1} - E_t c_{t+1})$.

Równanie (10) przyjmuje postać:

$$r_{f,t+1} = -\log \delta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2}. \quad (15)$$

To równanie mówi, że pozbawiona ryzyka realna stopa zwrotu jest liniowa względem wzrostu konsumpcji, ze współczynnikiem liniowości równym współczynnikowi awersji do ryzyka. Warunkowa wariancja wzrostu konsumpcji ma negatywny wpływ na stopę zwrotu bez ryzyka i może być interpretowana jako zapobiegawczy efekt oszczędnościowy.

Równanie (11) w tej specyfikacji przyjmuje postać:

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma \sigma_{ic}. \quad (16)$$

A zatem logarymiczna premia za ryzyko jest równa relatywnej awersji do ryzyka mnożonej przez kowariancję zwrotu z aktywów i wzrostu konsumpcji. Aktywa z wysoką kowariancją względem konsumpcji mają wysoki zwrot. Kiedy konsumpcja jest mała, to krańcowa użyteczność konsumpcji jest wysoka. Zainwestowanie w instrument ryzykowny w tym wypadku wymaga dużej premii za ryzyko, aby pokryć dużą krańcową stratę użyteczności konsumpcji.

Ciekawym problemem, który się tu pojawia jest zjawisko katastrofy gospodarczej, czyli np. poważnego kryzysu finansowego lub walutowego. W takim wypadku kowariancje między konsumpcją a zwrotem z aktywów mają zwykle zaburzony charakter. Może się bowiem okazać, że jednocześnie spada i konsumpcja, i poziom zwrotów z aktywów ryzykownych. Najczęściej jednak po krótkim okresie oczyszczania rynku, relacja konsumpcja-zwroty z aktywów wraca do normy. Natomiast istotne wydają się opóźnienia z jakim rynek aktywów działa w stosunku do konsumpcji.

1.1.3. Zagadka stopy zwrotu bez ryzyka

Jedną z odpowiedzi na zagadkę premii akcyjnej jest rozważenie wysokiej wartości współczynnika awersji do ryzyka γ . Ale to prowadzi do kolejnej zagadki – zagadki stopy zwrotu bez ryzyka. Z równania (15) wynika, że bezwarunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu bez ryzyka wynosi:

$$Er_{f,t+1} = -\log \delta + \gamma g - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2}, \quad (17)$$

gdzie g oznacza wartość oczekiwaną wzrostu konsumpcji. Ponieważ g jest dodatnie, wysokie wartości γ powodują wysokie wartości γg . Ignorując przez chwilę składnik

$\frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2}$, możemy γg przyjmować za krótkookresową średnią stopę procentową (stopę zwrotu z instrumentu bez ryzyka). Ale jeżeli wskaźnik dyskonta międzyokresowego δ będzie bliski 1, co oznacza małą lub nawet ujemną preferencję czasową, to stopa wolna od ryzyka będzie też wysoka, co przeczy naszym obserwacjom.

Interpretując to równanie dochodzimy do wniosku, że inwestorzy, którzy mają wysoką awersję do ryzyka z potęgową funkcją użyteczności, są także bardzo niechętni do wymiany międzyokresowej. Mając dany dodatni średni wzrost konsumpcji, niską stopę zwrotu bez ryzyka i wysoki współczynnik preferencji czasowej, inwestor będzie miał silną motywację, aby pożyczać z przyszłości tak, aby zredukować średnią stopę wzrostu konsumpcji. Intuicyjnie, niska stopa procentowa jest możliwa w równowadze, tylko wtedy, gdy inwestorzy mają niską lub negatywną stopę preferencji czasowej, która mocno zmniejsza ich skłonności do zapożyczania się na poczet przyszłej konsumpcji. Świadczy to o tym, że współczynnik δ przyjmuje wartość bliską 1.

Wyjaśnienie sprzeczności zauważonej powyżej wynika oczywiście z faktu, że jeżeli współczynnik awersji do ryzyka γ jest duży, wtedy ujemne wyrażenie ważące z kwadratem $-\frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2}$ dominuje w równaniu (17), a część liniową i stopę procentową obniża się. Wyrażenie z kwadratem oznacza tzw. zapobiegawczy efekt oszczędnościowy. Awersyjni do ryzyka agenci z niepewnymi strumieniami konsumpcji mają tzw. zapobiegawczą motywację do oszczędzania, która działa w przeciwnym kierunku do skłonności do pożyczania. Wyjaśnienie zagadki stopy wolnej od ryzyka wymaga, aby efekt zapobiegawczy był duży. Idzie to w parze z niską wartością δ .

1.1.4. Stopa zwrotu z obligacji, zagadka premii akcyjnej i zagadka premii wolnej od ryzyka

Niektórzy autorzy przekonują, że stopa zwrotu wolna od ryzyka jest niska, ponieważ krótkookresowe obligacje skarbowe są bardziej płynne niż długookresowe aktywa finansowe. Krótkookresowy dług zachowuje się jak pieniądz, wszelkie transakcje nim mogą być dokonywane z niskim kosztem. Płynnościowy efekt redukuje w równowadze stopę zwrotu wolną od ryzyka i zwiększa premię akcyjną. Problem tej argumentacji polega na tym, że aktywa długookresowe powinny mieć istotną nadwyżkę zwrotu w porównaniu z krótkookresowym długiem. Długookresowe obligacje rządowe powinny oferować większą premię za okres trwania. Ale historia pokazuje, że wielokrotnie premia za okres trwania obligacji była znacząco mniejsza niż premia akcyjna. Dodatkowo, odwrócona krzywa dochodowości (ujemna premia okresowa) dla obligacji powoduje, że argument płynnościowy staje się nieprawdziwy rozpatrując

jedynie instrumenty wolne od ryzyka. Średnio premia okresowa dla obligacji rządowych wynosi od 0,5% do 1,5%. Miara ta pokazuje, że premia okresowa jest znacząco niższa od premii akcyjnej.

1.1.5. Separowanie awersji do ryzyka i międzyokresowej substytucji³

Zajmijmy się teraz bardziej elastyczną wersją modelu z potęgową funkcją użyteczności. Model potęgowy bowiem nakłada ograniczenie na elastyczność międzyokresowej substytucji tak, że współczynnik międzyokresowej substytucji ψ jest odwrotnością współczynnika awersji do ryzyka γ . Nie ma natomiast potrzeby ani empirycznej zależności, aby te dwie zmienne traktować w tak rygorystyczny sposób. Awersja do ryzyka oznacza bowiem niechęć konsumenta do zastępowania konsumpcji w kontekście niepewności stanów natury i jest znacząca nawet w przypadku modelu jednookresowego. Elastyczność międzyokresowej substytucji oznacza natomiast chęć konsumenta do zastępowania dzisiejszej konsumpcji jutrzejszą i jest znacząca nawet w pełni deterministycznym ujęciu. Poniższy model zachowuje wiele pożądaných właściwości modelu potęgowego, ale łamie powiązanie między parametrami γ oraz ψ .

Funkcja użyteczności jest zdefiniowana w sposób rekursywny przez:

$$U_t = \{(1-\delta)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta(E_t U_{t+1}^{1-\gamma})^{\frac{1}{\theta}}\}^{\frac{\theta}{1-\gamma}}, \quad (18)$$

gdzie $\theta \equiv (1-\gamma)/(1-1/\gamma)$. Jeżeli $\gamma = (1/\psi)$, $\theta = 1$, wtedy rekursja (18) staje się liniowa i może być rozwiązana dając wcześniej przedstawioną użyteczność potęgową.

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe dla reprezentatywnego agenta może być zapisane jako:

$$W_{t+1} = (1 + R_{w,t+1})(W_t - C_t), \quad (19)$$

gdzie W_{t+1} oznacza bogactwo reprezentatywnego agenta, a $(1+R_{w,t+1})$ oznacza zwrot z portfela z całego zainwestowanego bogactwa. Taka forma ograniczenia budżetowego jest odpowiednia dla rynków kompletnych. Stosując techniki programowania dynamicznego możemy pokazać, że równania (18) i (19) dają równanie Eulera postaci:

$$1 = E_t \left[\left\{ \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\frac{1}{\psi}} \right\}^{\theta} \left\{ \frac{1}{1 + R_{w,t+1}} \right\}^{1-\theta} (1 + R_{w,t+1}) \right]. \quad (20)$$

Jeżeli założymy, że zwrot z aktywów i konsumpcji jest homoskedastyczny i łącznie lognormalny to stopa wolna od ryzyka jest:

$$r_{f,t+1} = -\log \delta + \frac{1}{\psi} E_t [\Delta C_{t+1}] + \frac{\theta-1}{2} \sigma_w^2 - \frac{\theta}{2\psi^2} \sigma_c^2. \quad (21)$$

³ Podrozdział niniejszy oparty jest na: Epstein, Zin (1989).

⁴ Jest to tzw. funkcja użyteczności Zin-Epstein.

Stopa wolna od ryzyka równa się stałej $-\log \delta$ plus współczynnik $(1/\psi)$ mnożony przez oczekiwany wzrost konsumpcji. W modelu z użytecznością potęgową $1/\psi = \gamma$ oraz $\theta = 1$. Wtedy równanie (21) redukuje się do równania (15).

Premia za ryzyko, włączając do naszych kalkulacji portfel bogactwa, wynosi:

$$E_t[r_{i,t+1}] - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_i^2}{2} = \theta \frac{\sigma_{ic}}{\psi} + (1 - \theta) \sigma_{iw}. \quad (22)$$

To równanie mówi, że premia za ryzyko na instrumencie i jest ważoną kombinacją kowariancji zwrotu z tego instrumentu i wzrostu konsumpcji (dzieloną przez elastyczność międzyokresowej substytucji ψ) oraz kowariancją między zwrotem z i -tego instrumentu i zwrotem z portfela bogactwa. Wagi wynoszą odpowiednio θ oraz $1 - \theta$. Przy parametrze $\theta = 0$ daje nam to klasyczną wersję CAPM⁵.

Równania (21) oraz (22) pomogą wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej i zagadkę stopy wolnej od ryzyka. W równaniu (21) wysoki współczynnik awersji do ryzyka niekoniecznie powoduje niską stopę wolną od ryzyka, ponieważ

$$Er_{f,t+1} = -\log \delta + \frac{g}{\psi} + \frac{\theta - 1}{2} \sigma_w^2 - \frac{\theta}{2\psi^2} \sigma_c^2. \quad (23)$$

Średni wzrost konsumpcji jest tu dzielony przez parametr ψ i w tej specyfice ψ nie musi być małe, nawet jeżeli γ jest duże.

Równanie (22) sugeruje, że niekoniecznie wysoki współczynnik awersji do ryzyka musi wyjaśniać zagadkę premii akcyjnej. Jeżeli $\theta \neq 1$ to premia za ryzyko jest zdeterminowana w części przez kowariancję z portfelem bogactwa, σ_{iw} . Jeżeli zwrot z bogactwa jest bardziej zmienny niż wzrost konsumpcji, wtedy σ_{iw} może być większe niż σ_{ic} i może pomóc wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej. Zwrot z portfela bogactwa możemy tutaj rozumieć jako zwrot z indeksu giełdowego, jako przybliżenie zwrotu z portfela bogactwa.

Powyżej zaprezentowane podejście zostawia wciąż kilka problemów. Po pierwsze, międzyokresowa elastyczność konsumpcji jest bardzo niska. Po drugie konsumpcja i bogactwo są do siebie bardzo mocno przywiązane poprzez międzyokresowe ograniczenie budżetowe. Natomiast najczęściej jest tak, że

⁵ Za Duffie'm (2001) pokażemy klasyczną wersję CAPM. Formuła na premię akcyjną w poziomach, a nie logarytmach jest następująca: $E(R_w) - R_f = \beta_i [E(R_i) - R_f]$, gdzie $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_w)}{Var(R_w)}$, którą

uzyskujemy przez maksymalizację współczynnika korelacji pomiędzy zwrotem z portfela bogactwa oraz krańcową użytecznością konsumpcji. Zlogarytmowanie powyższego równania daje postać zbliżoną do (22). Równanie (22) dodatkowo bezpośrednio uzależnia premię akcyjną od kowariancji między konsumpcją a zwrotem z aktywa ryzykownego.

konsumpcja jest gładka, a bogactwo bardzo zmienne. Rozwiązanie tego problemu jest przedstawione w części następnej.

1.2. Dynamika zwrotu z aktywów i konsumpcja

1.2.1. Zmiany w warunkowych oczekiwaniach

Z równań (21) i (22) wynika ścisłe powiązanie oczekiwanego zwrotu z aktywów i wzrostu konsumpcji. Oczekiwana stopa zwrotu z aktywów jest doskonale skorelowana z oczekiwanym wzrostem konsumpcji. Odchylenie standardowe oczekiwanego wzrostu konsumpcji wynosi ψ pomnożone przez odchylenie standardowe oczekiwanej stopy zwrotu z aktywów.

Zastanówmy się, jak oszacować ψ . Jedną z metod zaproponowanych do rozwiązania tego problemu jest metoda regresji zmiennych instrumentalnych (IV)⁶. Jeżeli zdefiniujemy resztę jako $\eta_{i,t+1} \equiv r_{i,t+1} - E_t[r_{i,t+1}] - \gamma(\Delta c_{t+1} - E_t[\Delta c_{t+1}])$, wtedy możemy przepisać równania (21) oraz (22) jako równanie regresji:

$$r_{i,t+1} = \mu_i + \frac{1}{\psi} \Delta c_{t+1} + \eta_{i,t+1}. \quad (24)$$

W przypadku ogólnym wyraz $\eta_{i,t+1}$ będzie skorelowany ze wzrostem konsumpcji, stąd estymatory MNK będą obciążone i nie będą dobrze szacować modelu. Metoda zmiennych instrumentalnych z zastosowaniem jako instrumentów opóźnionych zmiennych zwrotu z aktywów rozwiązuje ten problem.

1.2.2. Metoda log-liniowa wyceny aktywów

W tej sekcji zaprezentowano podejście Lucasa (1978) do wyceny aktywów. Wprowadzamy pojęcie cen aktywów i dywidend. Konsumpcja jest bowiem zbyt stabilna, aby jej zmiennością móc wyjaśnić zmienność stopy zwrotu z aktywów.

Aby zrozumieć drugi moment zwrotów akcji, należy rozważyć zależność między ruchami cen i ruchami w oczekiwanych przyszłych wypłatach dywidend i stóp dyskontujących. Model cen jest nieliniowy, ponieważ oczekiwane zwroty są zmienne w czasie. Dlatego należy dokonać kilku istotnych uproszczeń. Najbardziej popularnym podejściem jest rozważenie dyskretnego procesu Markowa dla wzrostu dywidend lub warunkowych wartości oczekiwanych wzrostu dywidend. Struktura Markowa pozwala znaleźć terazniejszą wartość modelu, lecz obliczenia są żmudne analitycznie i najczęściej znajduje się wyniki numeryczne.

⁶ Metoda zaproponowana przez Halla (1988) nie jest istotna dla naszych rozważań, ale pokazuje metodę estymacji ekonometrycznej modelu w celu sprawdzenia stawianej przez teorię ekonomii hipotezy.

Innym podejściem jest log-liniowa aproksymacja dokładnej wartości modelu. Log-liniowa zależność między cenami, dywidendami i zwrotami ma swoje intuicyjne uzasadnienie: wysokie ceny muszą poprzedzać wysokie przyszłe dywidendy lub niskie przyszłe zwroty, natomiast wysokie ceny muszą poprzedzać wysokie oczekiwane dywidendy lub niskie oczekiwane przyszłe zwroty. Podobnie, duże zwroty muszą być powiązane ze wzrostem oczekiwanych przyszłych dywidend i spadkiem oczekiwanych przyszłych zwrotów.

Log-liniową aproksymację rozpoczynamy od definicji logarytmicznego zwrotu na pewnym aktywie i , $r_{i,t+1} \equiv \log(P_{i,t+1} + D_{i,t+1}) - \log(P_{it})$. Konwencja czasowa polega tu na tym, że ceny są mierzone na koniec każdego z okresów, dlatego zawierają prawa do dywidendy przypadającej na następny okres. Logarytmiczny zwrot jest nieliniową funkcją logarytmu cen $p_{i,t+1}$ oraz p_{it} , a także dywidend $d_{i,t+1}$. Może jednak być przybliżony wokół wartości oczekiwanej logarytmu współczynnika dywidenda-cena ($d_{it} - p_{it}$) używając przybliżenia szeregiem Taylora. Szukaną aproksymacją jest:

$$r_{i,t+1} \approx k + \rho p_{i,t+1} + (1 - \rho) d_{i,t+1} - p_{it}, \quad (25)$$

gdzie ρ i k są parametrami linearyzacji zdefiniowanymi przez $\rho \equiv \frac{1}{1 + \exp(d_{it} - p_{it})}$

oraz $k \equiv -\log(\rho) - (1 - \rho) \log(1/\rho - 1)$. Jeżeli wskaźnik cena-dywidenda jest stały, to

$\rho = \frac{P_i}{P_i + D_i}$ jest stosunkiem ceny instrumentu po wypłacie dywidendy i przed wypłatą dywidendy⁷.

Przybliżenie szeregiem Taylora w równaniu (25) zastępuje logarytm sumy ceny instrumentu i dywidendy, ważoną średnią logarytmu ceny instrumentu i logarytmu dywidendy. Logarytm ceny dostaje tutaj wagę bliską jedności, a logarytm dywidendy otrzymuje wagę $1 - \rho$ bliską zero. Potwierdza to empiryczna obserwacja rynków finansowych, gdzie dywidendy są znacznie mniejsze niż cena akcji, a co z tego wynika procentowa zmiana w wysokości dywidendy ma znacznie mniejszy wpływ na wartość aktywa niż procentowa zmiana ceny.

Równanie (25) jest liniowym równaniem różnicowym dla logarytmu ceny instrumentu. Nakładając warunek $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho^j p_{i,t+j} = 0$ oraz rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy:

⁷ W powojennej historii Stanów Zjednoczonych średni współczynnik cena-dywidenda wynosił 26,4, stąd ρ powinno wynosić około 0,964. Dlatego możemy uznać, że logarytmiczny zwrot z aktywów jest w znakomitej większości generowany przez zmiany cen instrumentów i tylko częściowo przez dywidendy. A zatem zmienność w procesie dywidend nie powinna mieć decydującego wpływu na zmienność zwrotów.

$$p_{it} - d_{it} = \frac{k}{1-\rho} + E_t \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j [\Delta d_{i,t+1+j} - r_{i,t+1+j}]. \quad (26)$$

Równanie to pokazuje, że logarytmiczny wskaźnik cena-dywidenda jest wysoki wtedy, gdy oczekiwane dywidendy w przyszłości będą rosły szybko lub gdy oczekiwane zwroty będą niskie. Intuicyjnie powinniśmy rozumieć to równanie w ten sposób, że wysoka cena dzisiaj i nieeksplozywność cen implikuje, że przyszłe dywidendy będą wysokie, natomiast zwroty niskie.

Nałożone ograniczenie na nieeksplozywność cen może nie wytrzymywać krytyki, odkąd obserwujemy na giełdach tzw. bąble spekulacyjne. Możemy jednak ze względu na kilka faktów uznać bąble za odstępstwo od ogólnych reguł gry rynkowej. Blanchard i Fisher (1992) pokazują np., że w makroekonomicznym modelu gospodarki z przeplatającymi się pokoleniami racjonalne bąble mogą rosnąć tylko w gospodarkach dynamicznie nieefektywnych, czyli takich, w których kapitał jest inwestowany nieefektywnie. Teoretyczne podstawy bąbli są uznawane za zbyt kruche, aby wprowadzać je do modeli finansowych jako regułę⁸.

Ujęcie równania (26) w sposób logarytmiczny ma też swoje bardzo pozytywne ekonometryczne implikacje⁹.

Dotychczas rozpatrywaliśmy cenę aktywów jako liniową kombinację oczekiwanych przyszłych dywidend i oczekiwanych przyszłych zwrotów. W innym ujęciu możemy także napisać zwrot z aktywów jako liniową kombinację nieoczekiwanych wartości przyszłych dywidend i zwrotów. Dodając równanie (26) do równania (27), uzyskujemy:

$$r_{i,t+1} - E_t r_{i,t+1} = (E_{t+1} - E_t) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta d_{i,t+1+j} - (E_{t+1} - E_t) \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{i,t+1+j}. \quad (27)$$

To równanie mówi, że nieoczekiwany zwrot z aktywów wiąże się ze zmianami w oczekiwaniach dotyczących przyszłych dywidend i realnych (zdyskontowanych)

⁸ Santos i Woodford (1997) dają wyczerpujący formalny opis warunków, przy których pojawiają się bąble spekulacyjne na cenach aktywów. Do głównych rezultatów tej pracy należą kruche podstawy leżące po stronie monetarnej dla wyjaśnienia bąbli. Dodatkowe rezultaty interesujące nas w kontekście naszego modelu są takie, że niemożliwe jest powstanie bąbli przy stosunkowo ogólnych założeniach modelu, takich jak kompletny rynek, ograniczenia w pożyczaniu i międzyokresowej substytucji. Ponadto, jeżeli aktywa są produktywnie (tzn. zagregowane bogactwo jest ograniczone przez plan inwestycyjny) to bąble spekulacyjne nie mogą się pojawić nawet w modelu z nieskończonym horyzontem czasowym. Znane przykłady racjonalnych bąbli leżą raczej w bardzo specyficznych założeniach, omijających równowagę monetarną.

Ponadto, wykluczenie możliwości racjonalnych bąbli spekulacyjnych nie wyklucza roli samospełniających się przepowiedni (oczekiwań) na alokację w równowadze i wycenę aktywów.

⁹ Wynikają one z faktu, że ceny i dywidendy mogą być ze sobą skointegrowane, a co za tym idzie proces opisany przez równanie (26) jest stacjonarny, czyli prognozowalny.

zwrotów. Wzrost oczekiwanych przyszłych dywidend jest związany ze wzrostem ceny aktywów dzisiaj, natomiast oczekiwany wzrost zwrotów jest związany ze spadkiem ceny dzisiaj. Ta ostatnia zależność wynika z faktu, że przy danym strumieniu dywidend, przyszłe wysokie zwroty mogą być generowane tylko wtedy, gdy obecna cena jest niska.

1.2.3. Zagadka zmienności rynku akcji

Dotychczas zajmowaliśmy się poziomem premii akcyjnej. Teraz spróbujemy zilustrować zagadkę zmienności rynku akcji. Międzyokresowe ograniczenie budżetowe dla reprezentatywnego agenta mówi, że konsumpcja w każdym okresie równa się dywidendzie z portfela zainwestowanego bogactwa w . Możemy tu założyć, że kapitał ludzki jest częścią tego portfela. Jeżeli rozważamy portfel cen akcji, wtedy konsumpcja zależy tylko w części od dywidendy z portfela akcji. Jeżeli oznaczymy portfel akcji przez e to dywidenda z tego portfela równa się konsumpcji podniesionej do potęgi λ . W zapisie logarytmicznym mamy zatem:

$$d_{et} = \lambda c_t. \quad (28)$$

Współczynnik λ można interpretować jako miarę dźwigni finansowej¹⁰.

Jeżeli rozważamy model wyceny aktywów oparty o funkcję użyteczności reprezentatywnego agenta z równania (18), wtedy nakładając warunki lognormalności rozkładów i homoskedastyczności (równania (21) i (22)) dają:

$$E_t r_{e,t+1} = \mu_e + \frac{1}{\psi} E_t \Delta c_{t+1}, \quad (29)$$

gdzie μ_e jest stałą dla danego portfela. Oczekiwany logarytmiczny zwrot na portfelu akcji, podobnie jak logarytmiczny oczekiwany zwrot na każdym innym poszczególnym aktywie, jest stałą. Dodajemy zatem oczekiwany wzrost konsumpcji, dzielony przez międzyokresową elastyczność substytucji.

Dodając równania (30) i (31) do równań (27) oraz (28) otrzymujemy:

$$p_{et} - d_{et} = \frac{k_e}{1-\rho} + \left(\lambda - \frac{1}{\psi}\right) E_t \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta c_{t+1+j} \quad (30)$$

oraz

$$r_{e,t+1} - E_t r_{e,t+1} = \lambda (\Delta c_{t+1} - E_t \Delta c_{t+1}) + \left(\lambda - \frac{1}{\psi}\right) (E_{t+1} - E_t) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \Delta c_{t+1+j}. \quad (31)$$

Oczekiwany przyszły wzrost konsumpcji wpływa na wskaźnik cena-dywidenda. Ma on bezpośredni dodatni wpływ poprzez zwiększenie zdyskontowanego strumienia

¹⁰Jeżeli $\lambda > 1$, wtedy dywidenda i zwroty akcji są bardziej zmienne niż zwroty na zintegrowanym portfelu bogactwa. Możemy zatem zwiększać konsumpcję, jeżeli ceny akcji rosną szybciej niż bogactwo, oszukując tym samym naturalne ograniczenie budżetowe. Zob: Abel (1996).

dywidend oraz pośredni ujemny wpływ poprzez zwiększenie realnej stopy procentowej. Ponadto nieoczekiwany logarytmiczny zwrot wynosi λ mnożone przez nieoczekiwany wzrost logarytmicznej konsumpcji plus $(\lambda - (1/\psi))$ mnożone przez zdyskontowaną sumę poprawek w oczekiwaniach wzrostu konsumpcji.

Równanie (31) może być przekształcone tak, aby przedstawić wzrost konsumpcji jako funkcję nieoczekiwanych zwrotów i poprawek w oczekiwaniach dotyczących zwrotów. Używamy też równania (29).

$$\Delta c_{t+1} - E_t \Delta c_{t+1} = \frac{1}{\lambda} (r_{e,t+1} - E_t r_{e,t+1}) + \left(\frac{1}{\lambda} - \psi \right) (E_{t+1} - E_t) \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{e,t+1+j} \quad (32)$$

Nieoczekiwany zwrot z aktywów zwiększa bogactwo o czynnik $(1/\lambda)$ i, co za tym idzie, zwiększa konsumpcję o tę samą wartość. Zwiększanie oczekiwanych przyszłych zwrotów wywiera na konsumpcję dodatni efekt przychodowy ze współczynnikiem $(1/\lambda)$ oraz ujemny efekt substytucji ze współczynnikiem $-\psi$.

Powyższe równania mogą być uproszczone, jeżeli założymy, że oczekiwana zagregowana konsumpcja, którą oznaczmy jako z_t jest procesem AR(1)¹¹, ze średnią g oraz wskaźnikiem podtrzymywania ϕ . Mamy wtedy:

$$\Delta c_{t+1} = z_t + \varepsilon_{c,t+1}, \quad (33)$$

$$z_{t+1} = (1 - \phi)g + \phi z_t + \varepsilon_{z,t+1}. \quad (34)$$

Przyjmujemy tutaj, że wzrost konsumpcji jest dyskretnym procesem Markowa. Przyrost konsumpcji wprowadzamy w równaniu (33) za pomocą egzogenicznego szoku i.i.d. $\varepsilon_{c,t+1}$. Dodatkowo uzależniamy zagregowaną konsumpcję od średniej ważonej średniej konsumpcji i ostatniej konsumpcji oraz egzogenicznego szoku $\varepsilon_{z,t+1}$. Szoki powyższe mogą być pozytywnie lub negatywnie ze sobą skorelowane. Jako specjalną wersję modelu możemy przyjąć, że $\varepsilon_{z,t+1} = \phi \varepsilon_{c,t+1}$ ¹².

Z równania (21) wynika, że stopa zwrotu bez ryzyka jest liniowa względem wzrostu zagregowanej konsumpcji z_t , zatem ten model implikuje zachowanie się stopy wolnej od ryzyka jako homoskedastycznego procesu AR(1).

Równania (33) i (34) pozwalają przepisać (29) i (30) jako

¹¹ Przy wprowadzaniu zmiennych autoregresyjnych należy być bardzo uważnym, gdyż proces konsumpcji może być zintegrowany w stopniu 2 i należy uwzględnić odpowiednią ilość czynników błędzenia losowego w równaniu. Podążając za Campbellem (1998) konsumpcja jest tu określona jako I(1), ale powinna być I(2). Jest to problem wyboru między interpretacją ekonomiczną równania a poprawnością ekonometryczną regresji.

¹² Jest to wzmocniona kumulacja szoków w przyroście konsumpcji. Interpretacja zależy od znaku ϕ oraz znaków szoków.

$$p_{et} - d_{et} = \frac{k}{1-\rho} + \left(\lambda - \frac{1}{\psi}\right) \left[\frac{g}{1-\rho} + \frac{z_t - g}{1-\rho\phi} \right], \quad (35)$$

oraz

$$r_{e,t+1} - E_t r_{e,t+1} = \lambda \varepsilon_{c,t+1} + \left(\lambda - \frac{1}{\psi}\right) \left(\frac{\rho}{1-\rho\phi} \right) \varepsilon_{z,t+1}. \quad (36)$$

Równanie (38) pokazuje jak trudno jest w tym ujęciu wyjaśnić zagadkę zmienności rynku akcji. Najprostszą próbą wyjaśnienia dużych zmian w zwrotach portfela akcji jest przyjęcie dużego współczynnika λ , który oznacza duży udział dywidendy w finansowaniu konsumpcji. Z drugiej strony, jeżeli wyrażenie $\lambda - (1/\psi)$ ma wartość ujemną, to zmienność rynku akcji zmniejsza się¹³.

Zbudujmy teraz ten sam model dla rynku obligacji. Dla rynku obligacji mamy $\lambda = 0$ ¹⁴. Przekształcając równania (35) i (36) otrzymujemy przychód z obligacji

$$y_{bt} = d_{bt} - p_{bt} = -\frac{k_b}{1-\rho} + \frac{1}{\psi} \left[\frac{g}{1-\rho} + \frac{z_t - g}{1-\rho\phi} \right], \quad (37)$$

oraz

$$r_{b,t+1} - E_t r_{b,t+1} = -\frac{1}{\psi} \left(\frac{\rho}{1-\rho\phi} \right) \varepsilon_{z,t+1}. \quad (38)$$

Jeżeli ψ jest małe to nawet mała zmiana we wzroście konsumpcji z_t będzie powodować duże zmiany w zmianach stopy wolnej od ryzyka, a także w zwrotach z długookresowych obligacji. Korelacja między zwrotami z akcji i obligacji jest dodatnia, jeżeli $\lambda < (1/\psi)$. Jeżeli znak powyższej nierówności jest odwrotny to mamy ujemną korelację.

1.2.4. Wpływ na zagadkę premii akcyjnej

W podrozdziale 1.2 mieliśmy kowariancję między konsumpcją a zwrotami z aktywów traktowaną jako egzogeniczną. Nie podawaliśmy związków między konsumpcją a zwrotami z akcji. Poczyniliśmy to dopiero w podrozdziale 1.3. Przy tym drugim ujęciu możemy traktować kowariancję między konsumpcją a zwrotami jako zmienną określoną na procesie stochastycznym konsumpcji. Zaletą tego ujęcia jest uwyrażnienie zalet separowalnych krzywych użyteczności. W modelu z separowalnymi krzywymi użyteczności uzależniliśmy premię za ryzyko jako kowariancję między zwrotami z aktywów oraz wzrostem konsumpcji i zwrotem z portfela bogactwa.

¹³ Ta uwaga może mieć ciekawe uzasadnienie. Jeżeli inwestor czerpie większe zyski z inwestycji w realną stopę procentową niż z dywidendy, to zmienność rynku akcji się zmniejsza.

¹⁴ Zakładamy rynek z aktywami, które dają zerową dywidendę w ujęciu logarytmicznym i stałą równą konsumpcji w poziomach. Jest to realistyczne ujęcie.

Stochastyczne własności konsumpcji, razem z ograniczeniem budżetowym mogą być użyte do zastąpienia konsumpcji lub bogactwa w poprzednim ujęciu.

Zauważmy, że równanie (33) stosuje się do zwrotów z portfela bogactwa, gdy $\lambda = 1$. Zakładając $e = w$ oraz $\lambda = 1$ równanie (31) staje się:

$$r_{w,t+1} - E_t r_{w,t+1} = \Delta c_{t+1} - E_t \Delta c_{t+1} + (1 - \frac{1}{\psi})(E_{t+1} - E_t) \prod_{j=1}^{\infty} \rho^j \Delta c_{t+1+j}. \quad (39)$$

Z tego wynika, że kowariancja między zwrotem z aktywów a portfelem bogactwa musi spełniać równanie

$$\sigma_{ig} \equiv \sigma_{ic} + (1 - \frac{1}{\psi}) \sigma_{ig}, \quad (40)$$

gdzie σ_{ig} oznacza kowariancję między nieoczekiwanym zwrotem z aktywów a poprawkami w oczekiwaniach dotyczących wzrostu konsumpcji (oznaczenie przez g).

$$\sigma_{ig} \equiv \text{Cov}(r_{w,t+1} - E_t r_{w,t+1}, (E_{t+1} - E_t) \prod_{j=1}^{\infty} \rho^j \Delta c_{t+1+j}). \quad (41)$$

Podstawiając to równanie do formuły (22) na premię za ryzyko mamy

$$E_t[r_{i,t+1}] - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma \sigma_{ic} + (\gamma - \frac{1}{\psi}) \sigma_{ig}. \quad (42)$$

Premia za ryzyko na dowolnym aktywie jest współczynnikiem awersji do ryzyka γ mnożonym przez kowariancję między zwrotem z tego aktywa i wzrostem konsumpcji plus $(\gamma - (1/\psi))$ mnożone przez kowariancję między aktywem z poprawkami oczekiwań dotyczących przyszłego wzrostu konsumpcji.

Teraz wróćmy do założenia (poczynionego w poprzednim podrozdziale), że oczekiwany wzrost konsumpcji jest procesem AR(1) danym przez równanie (34). Przy tym założeniu,

$$(E_{t+1} - E_t) \prod_{j=1}^{\infty} \rho^j \Delta c_{t+1+j} = (\frac{\rho}{1 - \rho\phi}) \varepsilon_{z,t+1}. \quad (43)$$

Z równań (36), (42) oraz (43) wynika, że aby lepiej zrozumieć powyższe wyrażenie zaleca się, aby rozbić wzór na premię akcyjną na część premii z obligacji w porównaniu ze stopą wolną od ryzyka oraz premię z akcji w porównaniu z obligacjami:

$$E_t[r_{b,t+1}] - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_b^2}{2} = \lambda [-\frac{1}{\psi} (\frac{\rho}{1 - \rho\psi}) \sigma_{cz}] + (\gamma - \frac{1}{\psi}) [-\frac{1}{\psi} (\frac{\rho}{1 - \rho\phi})^2 \sigma_z^2]. \quad (44)$$

oraz

$$E_t[r_{e,t+1}] - r_{b,t+1} + \frac{\sigma_b^2}{2} - \frac{\sigma_c^2}{2} = \lambda [\sigma_c^2 + (\frac{\rho}{1 - \rho\phi}) \sigma_{cz}] + (\gamma - \frac{1}{\psi}) \lambda [\frac{\rho}{1 - \rho\phi} \sigma_{cz} + (\frac{\rho}{1 - \rho\phi})^2 \sigma_z^2] \quad (45)$$

Równania (44) oraz (45) dają w sumie równanie na premię akcyjną. Pierwsze wyrażenie w obu tych równaniach reprezentuje potęgową funkcję użyteczności inwestora, a drugie

reprezentuje efekt premii z funkcją użyteczności separowalną pozwalając, aby współczynnik awersji do ryzyka różnił się od odwrotności współczynnika elastyczności międzyokresowej substytucji.

Rozpatrując użyteczność potęgową, premia na obligacjach – równanie (44) – zależy od kowariancji σ_{cz} między zrealizowaną konsumpcją i poprawkami w oczekiwaniach przyszłego wzrostu konsumpcji. Jeżeli ta kowariancja jest dodatnia, to wzrost konsumpcji jest powiązany z wysokim oczekiwanym przyszłym wzrostem konsumpcji, co zwiększa stopę wolną od ryzyka i zmniejsza stopę zwrotu z obligacji. Stopa zwrotu z obligacji może być w takich warunkach nawet ujemna.

Druga część reprezentuje użyteczności separowalne. Jeżeli $\gamma < 1/\psi$ to ceny aktywów mają ujemną kowariancję z przyszłym oczekiwanym wzrostem konsumpcji, co generuje wyższą premię za ryzyko obligacji. Ta charakterystyka pozwala na generowanie dużej premii za okres trzymywania obligacji.

Premia akcyjna w porównaniu ze zwrotem z obligacji z równania (45) jest proporcjonalna do współczynnika λ , który odpowiada za zmienność w procesie wzrostu dywidend. Pozostałe wyrażenia sprawiają pewną trudność w interpretacji premii akcyjnej.

Podsumowując, użyteczności separowalne (Zin-Epstein) mają lepsze właściwości od użyteczności potęgowej, ale relatywny współczynnik awersji do ryzyka γ musi być odpowiednio duży i zbliżony do odwrotności ψ , aby dawać duże zwroty z akcji oraz małe zwroty z obligacji.

1.3. Cykliczne zmiany w cenie ryzyka

W poprzednich sekcjach scharakteryzowaliśmy teorię wyceny aktywów opartą o konsumpcję. Zagadka premii akcyjnej sugeruje, że współczynnik awersji do ryzyka musi być bardzo wysoki, aby wyjaśnić wysoką relatywną stopę zwrotów z akcji. Natomiast zagadka zmienności rynków akcji tłumaczy, że współczynnik awersji musi się zmieniać w czasie tak, by wyjaśnić dużą zmienność cen akcji. Teraz zastanowimy się: skąd bierze się cykliczność w cenach aktywów finansowych w oparciu o modele konsumpcji oraz jak wygenerować dużą zmienność rynku akcji, bez uciekania do zmienności współczynnika awersji do ryzyka.

1.3.1. Formowanie przyzwyczajęń konsumpcyjnych

Wielu badaczy zwracało uwagę na formowanie przyzwyczajęń konsumpcyjnych jako ważny czynnik wpływający na formowanie krańcowej użyteczności konsumpcji. Musimy rozważyć kilka kwestii. Pierwsza to postać funkcji użyteczności konsumpcji $U(C_t, X_t) \equiv U(\cdot)$. X_t oznacza zmienne w czasie przyzwyczajenia konsumpcyjne

nazywane przeze mnie także zwyczajową konsumpcją. Za propozycję funkcji $U(\cdot)$ przyjmuje się funkcję potęgową wyrażenia C_t/X_t lub wyrażenia $C_t - X_t$. Drugą kwestią jest wpływ decyzji agenta na przyszły poziom przyzwyczajęń konsumpcyjnych. W modelu wewnętrznego formowania przyzwyczajęń, przyzwyczajenia zależą od indywidualnych decyzji agenta dotyczących przyszłego poziomu konsumpcji. W modelu zewnętrznego formowania przyzwyczajęń, przyzwyczajenia zależą od zagregowanej konsumpcji i nie zależą od indywidualnych decyzji agenta. Trzecią kwestią jest szybkość, z jaką przyzwyczajenia dopasowują się do indywidualnej lub zagregowanej konsumpcji.

Wybór pomiędzy funkcją użyteczności z wyrażeniem C_t/X_t a funkcją użyteczności z wyrażeniem $C_t - X_t$ jest istotny, ponieważ pierwszy przypadek ma stałą awersję do ryzyka a drugi ma zmienną w czasie awersję do ryzyka. Aby to zobaczyć rozważmy najpierw pierwszy przypadek:

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \frac{(C_{t+j}/X_{t+j})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad (46)$$

gdzie X_t oznacza zsumowany wpływ przeszłej konsumpcji na poziom dzisiejszej użyteczności. Dla prostoty, określimy X_t jako zewnętrzne przyzwyczajenia zależące tylko od opóźnionej uśrednionej zagregowanej konsumpcji:

$$X_t = \bar{C}_{t-1}^{\kappa}, \quad (47)$$

gdzie $\bar{C}_{t-1}^{\kappa}$ oznacza zagregowaną uśrednioną opóźnioną konsumpcję a parametr κ oznacza stopień nieseparowalności czasowej. Ponieważ mamy jednego reprezentatywnego agenta możemy zrezygnować z uśrednionej wartości konsumpcji

$$X_t = C_{t-1}^{\kappa}. \quad (48)$$

Z tą specyfikacją użyteczności warunkiem podstawowym na zaistnienie równowagi jest

$$1 = \delta E_t[(1 + R_{t,t+1})(C_t/C_{t+1})^{\kappa(\gamma-1)}(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}]. \quad (49)$$

Zakładając homoskedastyczność i łączną lognormalność zwrotów z aktywów i wzrostu konsumpcji powyższe równanie daje następującą postać stopy zwrotu bez ryzyka oraz premii akcyjnej:

$$r_{f,t+1} = -\log \delta - \gamma^2 \sigma_c^2 / 2 + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \kappa(\gamma-1) \Delta c_t, \quad (50)$$

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \sigma_i^2 / 2 = \gamma \sigma_{ic}. \quad (51)$$

Równanie (50) mówi, że logarytmiczna stopa zwrotu bez ryzyka równa się współczynnikowi awersji pomnożonemu przez oczekiwany wzrost konsumpcji pomniejszonej przez wyrażenie $\kappa(\gamma-1)\Delta c_t$ oraz wariancję konsumpcji pomnożonemu przez kwadrat współczynnika awersji do ryzyka. Ponadto z tego równania

wnioskujemy, że zakładając dzisiejszą konsumpcję oraz oczekiwaną jutrzejszą konsumpcję jako stałą, zwiększenie konsumpcji wczoraj zwiększa krańcową użyteczność konsumpcji dzisiaj. To powoduje, że agent ma motywację pożyczać z przyszłości, co dźwiga realną stopę procentową w górę. Równanie (51) opisujące premię za ryzyko jest dokładnie takie samo jak równanie (16), znaczy to, że zewnętrzne formowanie przyzwyczajień nie wpływa na premię za ryzyko.

Abel (1990, 1996) argumentuje między innymi, że zewnętrzne formowanie przyzwyczajień pozwala jednak wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej. Ten argument jest oparty na dwóch rozważaniach. Po pierwsze, średni poziom stopy bez ryzyka jest oparty na wyrażeniu z równania (50) $-\log \delta - \gamma^2 \sigma_c^2 / 2 + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \kappa(\gamma - 1)g$, gdzie g jest średnią stopą wzrostu konsumpcji. Jeżeli γ jest wysokie, wtedy dodatnia wartość κ zmniejsza średnią stopę bez ryzyka. Dlatego zewnętrzne formowanie przyzwyczajień konsumpcyjnych pozwala wyjaśnić wysoki poziom awersji do ryzyka wpływający pozytywnie na premię akcyjną, ale nie wpływający na premię stopy wolnej od ryzyka. Po drugie dodatnia wartość κ czyni stopę wolną od ryzyka bardziej zmienną poprzez wyrażenie $-\kappa(\gamma - 1)\Delta c_t$. Bardziej zmienna stopa zwrotu bez ryzyka zwiększa kowariancję między zwrotami z akcji oraz konsumpcją σ_{ic} i zwiększa premię akcyjną.

Jednak drugie z tych rozważań świadczy raczej o słabości modelu, a nie jego sile. Odchylenie standardowe oczekiwanej realnej stopy procentowej jest raczej małe i ponad połowa jej wariancji jest prognozowalna, zatem nie jest to spójne z dużą wartością κ oraz γ w równaniu (50).

Problemy ze stopą wolną od ryzyka w modelach z formowaniem przyzwyczajień konsumpcyjnych są istotne. Nieseparowalne w czasie funkcje użyteczności powodują, że krańcowa użyteczność konsumpcji jest bardzo zmienna, nawet jeżeli konsumpcja jest wygładzona. Wynika to stąd, że konsument mierzy pochodną użyteczności względem historycznej, a nie absolutnej konsumpcji. Natomiast duże zmiany w krańcowej użyteczności powodują wahania stopy wolnej od ryzyka. Wszystko to przy stałym współczynniku awersji do ryzyka.

Teraz pokażemy drugie ujęcie, oparte również na zewnętrznym formowaniu przyzwyczajień. Użyteczność zależy tu od wyrażenia $C_t - X_t$, gdzie X_t to poziom konsumpcji zgodnej z przyzwyczajeniami. Dodatkowo zakładamy, że logarytm konsumpcji zawiera błędzenie losowe. To odzwierciedla obserwacje, że większość krajów nie ma bardzo przewidywalnych poziomów konsumpcji ani wzrostu dywidend. Proces wzrostu konsumpcji zapisujemy zatem:

$$\Delta c_{t+1} = g + \varepsilon_{c,t+1}, \quad (52)$$

gdzie $\varepsilon_{c,t+1}$ jest normalną homoskedastyczną zmienną losową z wariancją σ_c^2 .

Funkcja użyteczności przyjmuje postać

$$E_t \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \frac{(C_{t+j} - X_{t+j})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}. \quad (53)$$

W tym równaniu X_t jest poziomem przyzwyczajęń konsumpcyjnych, δ jest subiektywnym czynnikiem dyskontującym, γ jest współczynnikiem krzywizny funkcji użyteczności. Użyteczność zależy od różnicy między konsumpcją, a przyzwyczajeniem i jest zdefiniowana tylko, gdy konsumpcja przekracza przyzwyczajenia.

Wygodnym sposobem na wyrażenie zależności między konsumpcją a przyzwyczajeniem jest współczynnik nadwyżki konsumpcji, określony jako:

$$S_t \equiv \frac{C_t - X_t}{C_t}. \quad (54)$$

Takie ujęcie pozwala uogólnić użyteczność w równaniu (53). Jeżeli przyzwyczajenie X_t jest stałe, a konsumpcja C_t zmienia się, to lokalny współczynnik awersji do ryzyka jest:

$$\frac{-Cu_{CC}}{u_C} = \frac{\gamma}{S_t}, \quad (55)$$

gdzie u_C oraz u_{CC} jest pierwszą i drugą pochodną użyteczności względem konsumpcji. Współczynnik awersji do ryzyka zwiększa się, jeżeli współczynnik S_t zmniejsza się tzn. konsumpcja zbliża się do poziomu przyzwyczajęń. Zauważmy, że γ - współczynnik krzywizny funkcji użyteczności nie oznacza już relatywnej awersji do ryzyka w modelu¹⁵.

W tym wypadku współczynnikiem relatywnej awersji jest $\frac{-Cu_{CC}}{u_C}$.

Aby uzupełnić opis funkcji użyteczności, trzeba jeszcze pokazać jak przyzwyczajenia X_t zmieniają się w czasie w odpowiedzi na zagregowaną konsumpcję. Za Campbellem oraz Cochrane (1999) przyjmijmy następujący model dla logarytmu ze współczynnika nadwyżki konsumpcji $s_t = \log(S_t)$:

$$s_{t+1} = (1 - \phi)\bar{s} + \phi s_t + \lambda(s_t)\varepsilon_{c,t+1}. \quad (56)$$

Parametr ϕ odpowiedzialny jest za podtrzymanie logarytmicznego współczynnika nadwyżki konsumpcji, natomiast $\lambda(s_t)$ odpowiada za wrażliwość s_{t+1} , a co za tym idzie wrażliwość logarytmu przyzwyczajęń x_{t+1} względem $\varepsilon_{c,t+1}$ ¹⁶.

¹⁵ Dalsze rozważania na temat współczynnika krzywizny i relatywnej awersji do ryzyka będę prowadził w podrozdziale 2.

¹⁶ Campbell i Cochrane (1999) dają formalną analizę funkcji $\lambda(s_t)$. Określają oni funkcję wrażliwości przez:

Równanie (56) mówi, że dzisiejsze przyzwyczajenia są funkcją przeszłej i bieżącej konsumpcji. Liniowa aproksymacja pomaga to zrozumieć. Jeżeli zastąpimy $s_t \equiv \log(1 - \exp(x_t - c_t))$ w równaniu (56) i weźmiemy przybliżenie liniowe względem stanu równowagi ($c_t = x_t$) to zauważymy, że równanie (56) jest w przybliżeniu tradycyjnym modelem formowania przyzwyczajzeń, w którym logarytm przyzwyczajzeń zależy od logarytmicznej konsumpcji.

$$x_{t+j} \approx (1 - \varphi)\alpha + \varphi x_t + (1 - \varphi)c_t = \alpha + (1 - \varphi) \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j c_{t-j}. \quad (57)$$

Model (57) ma dwie poważne wady. Po pierwsze, kiedy konsumpcja jest egzogenicznym procesem jak w równaniu (52), nie ma powodu, aby konsumpcja spadała poniżej poziomu przyzwyczajzeń. Po drugie, model liniowy na ogół powoduje dużą zmienność stopy zwrotu bez ryzyka. Z kolei proces (56) poprzez niestalą funkcję wrażliwości $\lambda(s_t)$ pozwala na sterowanie lub nawet eliminację wahań w stopie zwrotu bez ryzyka.

Aby znaleźć realną stopę procentową w tym modelu, należy najpierw obliczyć pochodną funkcji konsumpcji:

$$u'(C_t) = (C_t - X_t)^{-\gamma} = S_t^{-\gamma} C_t^{-\gamma}. \quad (58)$$

Prostą stopą zwrotu jest:

$$(1 + R_{t+1}^f) = (\delta E_t \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)})^{-1} = (\delta E_t (\frac{S_{t+1}}{S_t})^{-\gamma} (\frac{C_{t+1}}{C_t})^{-\gamma})^{-1}. \quad (59)$$

Logarytmując to równanie oraz stosując równania (52) oraz (5) mamy logarytmiczną stopę zwrotu bez ryzyka:

$$r_{t+1}^f = -\log \delta + \gamma \delta - \gamma(1 - \varphi)(s_t - \bar{s}) - \frac{\gamma^2 \sigma_c^2}{2} [\lambda(s_t) + 1]^2. \quad (60)$$

Pierwsze dwa wyrażenia prawej strony wzoru (60) są analogiczne do modelu z użytecznością potęgową (17), a pozostałe dwa wyrażenia są nowe. Trzecie wyrażenie

$$\lambda(s_t) = \frac{1}{S} \sqrt{1 - 2(s_t - \bar{s})} - 1, s \leq s_{\max}$$

$$0 \quad s \geq s_{\max},$$

gdzie $\bar{s} \equiv \sigma \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \varphi}}$ oraz $s_{\max} \equiv \bar{s} + \frac{1}{2}(1 - \bar{s}^2)$. Równanie (56) jest procesem pierwiastka

jednostkowego. Specyfikacja $\lambda(s_t)$ daje trzy ważne modyfikacje do tego procesu:

- 1) Stopa wolna od ryzyka jest stała. Jeżeli konsumpcja spada w kierunku poziomu zwyczajowego to $\lambda(s_t)$ wzrasta. To powoduje wzrost w (56), który oznacza wzrost zapobiegawczych oszczędności, co zmniejsza stopy procentowe. Specyfikacja powyższa dla $\lambda(s_t)$ powoduje, że oba efekty znoszą się wzajemnie.
- 2) Zwyczajowa konsumpcja jest zdefiniowana dla $s_t = s$.
- 3) Zwyczajowa konsumpcja zwiększa się wraz z konsumpcją, a $\lambda(s_t)$ wzrasta wraz ze spadkiem s_t tak, aby wygenerować zmienny w czasie współczynnik Sharpe'a.

jest liniowe względem $(s_t - \bar{s})$ i odzwierciedla międzyokresową substytucję. Jeżeli współczynnik nadwyżki konsumpcji jest niski, to krańcowa użyteczność konsumpcji jest wysoka. Jednak nadwyżka konsumpcji po przejściowym odchyleniu od średniej powinna do niej powrócić, dlatego krańcowa użyteczność też się zmniejszy. Dlatego konsument będzie chciał pożyczać i dlatego stopa wolna od ryzyka pójdzie w górę.

Czwarte wyrażenie we wzorze (60) jest liniowe względem $([\lambda(s_t) + 1]^2)$ i opisuje tzw. zapobiegawcze oszczędności. Jeżeli niepewność się zwiększa, to konsumenci będą bardziej skłonni do oszczędzania i stopa procentowa pójdzie w dół. Zauważmy, że niepewność nie dotyczy konsumpcji jako takiej, ale krańcowej funkcji użyteczności.

Równanie (60) pozwala na zaobserwowanie stabilności realnych stóp procentowych na dwa sposoby. Po pierwsze, jeżeli współczynnik podtrzymania przyzwyczajęń φ będzie bliski 1, to ograniczamy efekt międzyokresowej substytucji konsumpcji. Po drugie, efekt zapobiegawczych oszczędności przeciwdziała międzyokresowej substytucji, jeżeli $\lambda(s_t)$ zmniejsza się wraz z s_t .

Podsumowując, jest kilka różnic między modelem z potęgową użytecznością i wysokim współczynnikiem awersji do ryzyka a modelem z formowaniem przyzwyczajęń konsumpcyjnych. Po pierwsze, model z formowaniem przyzwyczajęń nie wyjaśnia zagadki premii akcyjnej. Rozważając równanie (61) w równowadze i nakładając ograniczenia na funkcję wrażliwości $\lambda(s_t)$ mamy:

$$r_{t+1}^f = -\log \delta + \gamma \delta + \left(\frac{\gamma}{S}\right)^2 \frac{\sigma_c^2}{2}. \quad (61)$$

Stopa wolna od ryzyka jest zatem określona przez współczynnik awersji do ryzyka i średnią konsumpcję, która to wartość jest silnie korygowana, ponieważ z kwadratem przez współczynnik awersji dzielony przez nadwyżkę konsumpcji. Jeżeli nadwyżka konsumpcji jest mała to stopa wolna od ryzyka będzie duża, natomiast jeżeli nadwyżka będzie duża to stopa wolna od ryzyka będzie mała. Kwadratowe oddziaływanie nadwyżki na stopę bez ryzyka powoduje silną elastyczność tych dwóch zmiennych.

Cykle i wahania stopy wolnej od ryzyka powodowane są zmianami w nadwyżce konsumpcji ponad konsumpcję zwyczajową i zmianę krańcowej użyteczności konsumpcji z tym związanej. Po okresie odchylenia, konsumpcja wraca do okresu przyzwyczajonej konsumpcji lub odwrotnie – przyzwyczajona konsumpcja dostosowuje się do nowej średniej konsumpcji i stopa wolna od ryzyka wraca do poziomu równowagi opisanego przez równanie (61).

1.3.2. Model z heterogenicznymi agentami

Dotychczas rozpatrywane modele zakładały, że aktywa mogą być wyceniane jeżeli istnieje reprezentatywny agent, który konsumuje zagregowaną konsumpcję. Jednak zagregowana konsumpcja nie jest konsumpcją inwestorów giełdowych. Dlatego mamy dwie miary konsumpcji i dwa typy agentów w gospodarce: tacy, którzy nie inwestują na giełdzie i konsumują swą pracę w każdym okresie (ograniczona konsumpcja) i tacy, którzy inwestują (czyli ich konsumpcja jest teoretycznie nieograniczona). Konsumpcja agentów ograniczonych nie wpływa na wycenę aktywów, ale może stanowić znaczną część zagregowanej konsumpcji. Znacząca jest rola tych agentów, zwłaszcza dlatego, że ich konsumpcja może być z powodzeniem prognozowalna. Zależy ona bowiem od wzrostu dochodu. Konsumpcja posiadaczy akcji jest dużo bardziej zmienna. Ograniczeni agenci w powyższym modelu nie wpływają bezpośrednio na ceny akcji, ponieważ zakłada się, że nie posiadają oni ani nie handlują aktywami finansowymi.

Wyjaśnienie dużej zmienności cen akcji w porównaniu z konsumpcją wpływa właśnie z tego faktu. Inwestorów giełdowych jest względnie mało w porównaniu z agentami, którzy nie inwestują. Dlatego konsumpcja, podobnie jak i proces wypłat dywidend, jest bardzo zmienna, ale tylko w grupie inwestorów giełdowych¹⁷.

Duffie i Constantinides (1996) dostarczyli prostego modelu, na którym możemy zrozumieć efekt heterogeniczności. Postulują oni, że ekonomia ma k niezależnych inwestorów i każdy z nich ma inny poziom konsumpcji C_{kt} . W każdej sekcji rozkład konsumpcji jest lognormalny, a zmiany w logarytmie konsumpcji w każdej sekcji od czasu t do czasu $t + 1$ są wzajemnie nieskorelowane z poziomem konsumpcji w czasie t . Wszyscy inwestorzy mają te same użyteczności potęgowe z czynnikiem dyskontującym δ i relatywnym współczynnikiem awersji do ryzyka γ .

W tej ekonomii międzyokresowa stopa substytucji konsumpcji dla każdego inwestora osobno to stochastyczny czynnik dyskontujący. Dlatego możemy znaleźć też międzyokresową stopę substytucji w każdej z k sekcji. Oznaczmy to przez:

$$M_{t+1}^* \equiv \delta E_{t+1}^* \left[\left(\frac{C_{k,t+1}}{C_{kt}} \right)^{-\gamma} \right], \quad (62)$$

gdzie E_t^* jest wartością oczekiwaną na rozkładach prawdopodobieństwa w sekcji w czasie t . To znaczy dla każdej przebiegającej w sekcji zmiennej losowej X_{kt} ,

¹⁷ Dodatkowym ciekawym problemem jest istnienie tzw. 'noise traders', których inwestycje nie wpływają na funkcję użyteczności, ale powodują ruchy w cenie akcji, które wpływają na użyteczność pozostałych inwestorów. Istnienie 'noise traders' także zwiększa zmienność na rynku akcji w porównaniu z konsumpcją.

$E_t^* X_{kt} = \lim_{K \rightarrow \infty} (1/K) \sum_{k=1}^K X_{kt}$. Zauważmy, że $E_t^* X_{kt}$ jest zmienna w czasie i nie musi być

lognormalna warunkowo względem przeszłej informacji.

Założenie lognormalności rozkładów przebiegających w sekcji oznacza, że logarytmiczny stochastyczny czynnik dyskontujący $m_{t+1}^* \equiv \log(M_{t+1}^*)$ może być napisany jako funkcja przebiegającej w sekcji średniej i wariancji zmian w logarytmicznej konsumpcji:

$$m_{t+1}^* = -\log \delta - \gamma E_{t+1}^* \Delta c_{k,t+1} + \left(\frac{\gamma^2}{2}\right) Var_{t+1}^* \Delta c_{k,t+1}, \quad (63)$$

gdzie Var^* jest zdefiniowany analogicznie do E^* jako

$$Var_t^* X_{kt} = \lim_{K \rightarrow \infty} (1/K) \sum_{k=1}^K (X_{kt} - E_t^* X_{kt})^2 \text{ oraz jest zmienna w czasie.}$$

Spróbujmy skonstruować stochastyczny czynnik dyskontujący dla reprezentatywnego agenta, M_{t+1}^{RA} stosując zagregowaną konsumpcję:

$$M_{t+1}^{RA} \equiv \delta \left(\frac{E_{t+1}^*[C_{k,t+1}]}{E_t^*[C_{kt}]} \right)^{-\gamma}. \quad (64)$$

Logarytm tego stochastycznego czynnika dyskontującego także może być powiązany z wartością oczekiwaną przebiegającą sekcję i wariancją zmian w logarytmicznej konsumpcji

$$m_{t+1}^{RA} = -\log \delta - \gamma E_{t+1}^* \Delta c_{k,t+1} + \frac{\gamma}{2} [Var_{t+1}^* c_{k,t+1} - Var_t^* c_{kt}] = -\log \delta - \gamma E_{t+1}^* \Delta c_{k,t+1} - \frac{\gamma}{2} [Var_{t+1}^* \Delta c_{k,t+1}], \quad (65)$$

gdzie drugie równanie pochodzi z równania $c_{k,t+1} = c_{kt} + \Delta c_{k,t+1}$ i z faktu, że $\Delta c_{k,t+1}$ jest nieskorelowane w sekcji z c_{kt} .

Różnica między tymi dwiema zmiennymi może być teraz zapisana jako:

$$m_{t+1}^* - m_{t+1}^{RA} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} Var_{t+1}^* \Delta c_{k,t+1}. \quad (66)$$

Wzór (66) przedstawia różnicę w stochastycznym czynniku dyskontującym dla danej sekcji i reprezentatywnego agenta. Zależy ona od wariancji konsumpcji w sekcji. Szereg czasowy z powyższymi zmiennymi może mieć niezerową średnią, co wyjaśnia zagadkę stopy wolnej od ryzyka oraz niezerową wariancję, pozwalającą wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej.

Ponadto, jeżeli wariancja logarytmu wzrostu konsumpcji wzięta dla danych w zakresie każdej z sekcji jest negatywnie skorelowana z poziomem zagregowanej konsumpcji, wtedy ryzyko zwiększa się w czasie gospodarczego spowolnienia. Dla okresu spowolnienia gospodarczego stochastyczny czynnik dyskontujący zaczyna

przybierać duże wartości i zmniejsza stopę wolną od ryzyka. Stochastyczny czynnik dyskontujący m_{t+1}^* będzie w tym wypadku bardziej przeciwykliczny niż stochastyczny czynnik dyskontujący wzięty dla reprezentatywnego agenta z tymi samymi parametrami preferencji. Wyjaśnia to zmienność stopy wolnej od ryzyka.

Wyjaśnienie premii akcyjnej w modelu, wymaga dużej heterogeniczności agentów, co może zastąpić wysoką awersję do ryzyka.

Wszystkie z powyższych modeli zakładają, że agenci mają identyczne preferencje. Ale heterogeniczność preferencji również może mieć znaczenie¹⁸.

W powyższych rozważaniach dotyczących zmienności stochastycznego czynnika dyskontującego pominęliśmy jeden istotny fakt – istnienie ryzyka nieuwzględnianego (*idiosyncratic risk*). Jeżeli zwrot z aktywów jest nieskorelowany z czynnikiem dyskontującym, to nie generuje on dodatkowej premii¹⁹.

1.3.3. Nieracjonalne oczekiwania

Dotychczas zakładaliśmy, że inwestorzy kierują się racjonalnymi oczekiwaniami i rozumieją zachowanie szeregów czasowych. Zajmijmy się jednak rozluźnieniem tych założeń. Podczas, gdy nie ma arbitrażu, istnieją takie ceny, które mogą zrationalizować ceny wymienianych aktywów. Te ceny są równe subiektywnym prawdopodobieństwom odpowiadającym tym stanom natury mnożonym przez krańcową użyteczność w różnych stanach. Dlatego mając daną funkcję użyteczności, istnieją takie subiektywne prawdopodobieństwa, które dają ceny wymienianych na rynkach aktywów. Interesującą kwestią jest, czy te subiektywne prawdopodobieństwa są zbliżone do obiektywnych prawdopodobieństw stanów natury.

Zagadnienie to należy do kręgu równowagi cząstkowej, a nie ogólnej, nieuwzględniającej wszystkich czynników. Zakładamy bowiem, że ceny aktywów zależą od zdyskontowanych przyszłych dywidend. Zakłada się, że dywidendy są generowane przez podwójnie zintegrowany proces, taki że wzrosty mają pierwiastek jednostkowy. Te założenia powodują, że nagły wzrost dywidend powoduje wzrost cen

¹⁸ Kilku autorów argumentuje, że wymiana między inwestorami z różnym stopniem awersji do ryzyka i preferencji czasowej, prawdopodobnie na skutek zmian rynkowych, może prowadzić do zmieniającej się w czasie ceny ryzyka. Wydaje się, że będzie to dziedzina aktywnie badana w najbliższych latach.

¹⁹ Za Cochrane (2000): można sądzić, że instrumenty mające wysoką wariancję wypłat, czyli zwrotów i dywidend powinny być uznane za ryzykowne i mieć wysoką premię za ryzyko. Nic bardziej błędnego. Jeżeli wypłata z instrumentu jest nieskorelowana ze stochastycznym czynnikiem dyskontującym, to nie ma żadnej korekty w cenie ze względu na ryzyko. W takim wypadku - patrz równanie (5) - instrument daje zwrot równy stopie wolnej od ryzyka. Inaczej mówiąc, nie otrzymujemy rekompensaty za utrzymywanie nieuwzględnianego ryzyka.

bardziej niż proporcjonalny, taki że współczynnik cena-dywidenda rośnie, kiedy rośnie dywidenda. Jeżeli wzrost dywidend jest stacjonarny, wtedy wysoki wskaźnik cena-dywidenda poprzedza spadek dywidend, niskie zwroty z akcji i powrót do długookresowej średniej we współczynniku cena-dywidenda.

W równowadze ogólnej, dywidendy są powiązane ściśle z konsumpcją, tak więc nieracjonalne oczekiwania dotyczące wzrostu dywidend powinny być powiązane z nieracjonalnymi oczekiwaniami dotyczącymi wzrostu dywidend. Stopy procentowe podobnie jak ceny akcji nie są egzogeniczne, ale zdeterminowane oczekiwaniami inwestorów. Dlatego bardzo trudno zbudować model równowagi ogólnej z nieracjonalnymi oczekiwaniami.

Aby zobaczyć jak nieracjonalność może wpływać na ceny aktywów, rozpatrzmy najpierw statyczny model, w którym logarytm konsumpcji jest błędzeniem losowym z dryfem g . Inwestorzy rozumieją, że konsumpcja jest błędzeniem losowym, ale błędnie oceniają dryf na $\bar{g}$ zamiast g . Równanie (35) dla logarytmicznego współczynnika cena-dywidenda wygląda tak:

$$p_{et} - d_{et} = \frac{k}{1-\rho} + (\lambda - \frac{1}{\psi})(\frac{\bar{g}}{1-\rho}), \quad (67)$$

Poniżej mamy równanie na stopę zwrotu bez ryzyka:

$$r_{f,t+1} = -\log \delta + \frac{\bar{g}}{\psi} + \frac{\theta-1}{2} \sigma_w^2 - \frac{\theta}{2\psi^2} \sigma_c^2, \quad (68)$$

oraz racjonalną oczekiwaną stopę zwrotu z rynku akcji:

$$E_t[r_{e,t+1}] - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_e^2}{2} = \gamma \lambda \sigma_c^2 + \lambda(g - \bar{g}). \quad (69)$$

W równaniu (69) pierwsze wyrażenie po prawej stronie oznacza standardową formułę na premię akcyjną. Drugie wyrażenie powstaje, dlatego że wzrost dywidend jest systematycznie różny od tego, czego oczekują inwestorzy.

Ten model pokazuje, że nieracjonalny pesymizm, kiedy ($\bar{g} < g$), może zwiększyć średnią premię akcyjną – równanie (69) oraz zmniejszyć stopę wolną od ryzyka – równanie (68). Osiąga się zatem taki sam efekt jak w przypadku wysokiego współczynnika awersji do ryzyka. Przeciwnie, nieracjonalny optymizm, kiedy ($\bar{g} > g$), zwiększa stopę wolną od ryzyka i zmniejsza premię akcyjną. To ujęcie pozwala zatem wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej i zagadkę stopy bez ryzyka bez odwoływania się do preferencji.

Aby wyjaśnić zagadkę zmienności, posłużmy się modelem AR(1) dla logarytmicznego wzrostu konsumpcji. Współczynnik podtrzymania konsumpcji niech będzie na poziomie $\bar{\phi}$ różnym od właściwego ϕ . W tym wypadku stopa bez ryzyka dana jest wzorem:

$$r_{f,t+1} = \mu_f + \frac{\bar{\phi}}{\phi} (\Delta c_t - g), \quad (70)$$

a racjonalna oczekiwana premia akcyjna jest:

$$E_t[r_{e,t+1}] - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_e^2}{2} = \mu_e - (\bar{\phi} - \phi) \left[\left(\frac{\rho \bar{\phi}}{1 - \rho \bar{\phi}} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\psi} \right) + \lambda \right] (\Delta c_t - g), \quad (71)$$

gdzie μ_f oraz μ_e są stałymi. Jeżeli $\bar{\phi}$ jest większa niż ϕ to wyrażenie w nawiasie kwadratowym (71) jest dodatnie oraz premia akcyjna spada wraz ze wzrostem gwałtownym konsumpcji i zwiększa się, gdy wzrost konsumpcji jest słaby. Właśnie błędy w oszacowaniu przyszłej oczekiwanej konsumpcji, czyli niewłaściwe oszacowanie współczynnika podtrzymania powoduje generowanie cykli w premii akcyjnej.

Jedną z trudności, jaka pojawia się w badaniu ceny akcji jest fakt, że wzrost stopy bez ryzyka pociąga za sobą wzrost oprocentowania obligacji i co za tym idzie spadek cen akcji. W kontekście powyższego modelu możemy wyjaśnić ten fakt w następujący sposób:

Wzrost premii akcyjnej zwiększa dochody agentów i co za tym idzie zwiększa wskaźnik podtrzymania dla konsumpcji, bądź zwiększa dryf w strumieniu dywidend. To powoduje zwiększenie stopy wolnej od ryzyka i zmniejszenie premii akcyjnej. Zmniejszenie premii akcyjnej powoduje zmniejszenie dochodu i obniżenie wskaźnika podtrzymania konsumpcji. Cykl się zamknął.

2

Realny cykl koniunkturalny a ceny aktywów

W poprzednim rozdziale staraliśmy się wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej, zmienność cen akcji i stopy wolnej od ryzyka oraz zjawisko cykliczności w zależności od funkcji użyteczności agentów ekonomicznych, w szczególności od konsumpcji. Pominęliśmy sferę produkcyjną gospodarki oraz rynek pracy. W niniejszym rozdziale wyjdziemy poza model CCAPM i pójdziemy w kierunku modelu realnego cyklu koniunkturalnego (RBC).

Zadamy w tym rozdziale i odpowiemy na następujące pytania:

1. W jaki sposób technologia w modelu musi być zmodyfikowana, aby wyjaśniać zagadkę premii akcyjnej i zagadkę stopy wolnej od ryzyka?
2. Jakie są implikacje dla cyklu koniunkturalnego wynikające z tego ujęcia?

Zacniemy od prostej ekonomii wymiany (podrozdział 2.1) bez możliwości akumulacji kapitału. Następnie model ten rozszerzymy o sektor produkcyjny dopuszczający akumulację kapitału (podrozdział 2.2), aż w końcu skomplikujemy model tak, by wprowadzić dwa sektory, produkujące dobra kapitałowe i konsumpcyjne oraz przedsiębiorstwa finansujące się zarówno przez emisję akcji jak i obligacji. Znacznie rozszerzy nam to perspektywę, z jakiej obserwujemy ceny aktywów. Rachunki prowadzone są za Boldrin, Christiano, Fisher (1995).

2.1. Ekonomia wymiany

W tej sekcji analizujemy ekonomię wymiany zaprezentowaną przez Lucasa (1978) oraz Mehre i Prescottta (1985).

2.1.1. Model

Zacniemy od zaprezentowania konsumentów, czyli gospodarstw domowych. Ekonomia składa się z continuum nieskończenie długo żyjących, identycznych agentów, którzy maksymalizują oczekiwaną zdyskontowaną użyteczność. W każdym okresie t , reprezentatywne gospodarstwo domowe wycenia swoją konsumpcję zgodnie ze wzorem:

$$E_t \sum_{j=t}^{\infty} \delta^{j-t} \frac{(C_j - X_j)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad (72)$$

gdzie X_j oznacza zmienne w czasie przyzwyczajenia konsumpcyjne, które zmieniają się zgodnie ze schematem:

$$X_j = hX_{j-1} + bC_{j-1}. \quad (73)$$

Dla celów naszej analizy, definiujemy użyteczność potęgową preferencji w przypadku, gdy $\gamma > 0$, $h = b = 0$ oraz preferencje z przyzwyczajeniami konsumpcyjnymi, gdy $\gamma \equiv 0$, oraz h lub $b \neq 0$. Proces zdefiniowany przez równanie (73) oznacza, że przyzwyczajenia konsumpcyjne zależą od opóźnionych przyzwyczajzeń i opóźnionej konsumpcji odpowiednio z wagami h i b .

W każdym okresie t , gospodarstwo domowe musi spełniać następujące ograniczenie budżetowe:

$$B_t + S_t + C_t \leq (1 + R_t^e)S_{t-1} + (1 + R_t^f)B_{t-1}, \quad (74)$$

gdzie B_t oraz S_t oznacza nabycie w czasie t dwóch rodzajów jednookresowych aktywów B_t oraz S_t , czyli odpowiednio wolnych od ryzyka i ryzykownych, denominowanych w jednostkach konsumpcji. Ich stopy zwrotu są równe odpowiednio $1 + R_t^f$ oraz $1 + R_{t+1}^e$. Stopa zwrotu na S_t jest uwarunkowana stanami natury w okresie $t + 1$, natomiast stopa wolna od ryzyka nie jest. Problem optymalizacyjny gospodarstwa domowego jest następujący: w każdym okresie t , mając dane S_{t-1} , B_{t-1} , X_t oraz $\{R_j^e, R_{j-1}^f; j \geq t\}$ maksymalizuje (72) przy warunkach (73) i (74) wybierając optymalną alokację $\{B_j, S_j, C_j; j \geq t\}$.

Przejdziemy teraz do opisu przedsiębiorstw. Technologia zmieniająca kapitał, K_t , w produkcję Y_t , jest jak niżej:

$$Y_t = Z_t K_t, \quad (75)$$

gdzie:

$$Z_t = Z_{t-1} \exp(\theta_t). \quad (76)$$

Zmienna losowa θ_t jest opisana następującym procesem autoregresyjnym:

$$\theta_t = (1 - \rho)\bar{\theta} + \rho\theta_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (77)$$

oraz $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, dla wszystkich $t \geq 0$ ²⁰. Kapitał nie deprecjonuje się i nie istnieje technologia dla zwiększania lub zmniejszania jego wielkości. Zagregowany, *per capita* kapitał jest stały i równy $K > 0$.

Zakładamy, że przedsiębiorstwa mają horyzont planowania na jeden okres. Aby korzystać z kapitału w okresie $t + 1$, przedsiębiorstwo musi nabyć go w okresie t . Aby to zrobić, musi wyemitować akcję S_t , która spełniać będzie ograniczenie finansowania:

$$P_{k,t} K_{t+1} \leq S_t, \quad (78)$$

²⁰ Jest to klasyczne ujęcie modelu realnego cyklu koniunkturalnego, w którym dopuszczamy szoki w produktywności kapitału, czyli w technologii.

gdzie $P_{k,t}$ jest ceną kapitału w okresie t , zdenominowaną w jednostkach konsumpcji oraz K_{t+1} reprezentuje ilość kapitału, który firma planuje użyć. Przez π_{t+1} oznaczmy przychód netto przedsiębiorstwa pomniejszony o wydatki w okresie t . Przychody obejmują sprzedaż produkcji Y_{t+1} , plus sprzedaż udziałów kapitałowych w przedsiębiorstwie $P_{k,t+1}K_{t+1}$. Wydatki firmy są ograniczone przez zrealizowanie zobowiązań dotyczących wyemitowanych akcji $(1 + R_{t+1}^e)S_t$. Firma wybiera alokację S_t i K_{t+1} , uwzględniając dane $P_{k,t}$ oraz zależne od stanów R_{t+1}^e oraz $P_{k,t+1}$. Wydatki firmy w każdym stanie natury nie mogą przekraczać jej dochodów:

$$\pi_{t+1} = Y_{t+1} + P_{k,t+1}K_{t+1} - (1 + R_{t+1}^e)S_t \geq 0. \quad (79)$$

Problem firmy w okresie t polega na maksymalizacji, przez wybór S_t oraz K_{t+1} , wartości π_{t+1} poprzez stany natury, przy warunkach danych przez równania/nierówności (75) - (79). To powoduje, że ograniczenie finansowe dane przez równanie (78) jest spełnione jako dokładna równość w równowadze. Liniowa homogeniczność funkcji celu, wspólnie ze słabą nierównością daną przez (79) powoduje warunek równowagi $\pi_{t+1} = 0$ dla każdego $t + 1$ i dla wszystkich stanów natury. W wyniku powyższego zachodzi:

$$1 + R_{t+1}^e = \frac{Z_{t+1} + P_{k,t+1}}{P_{k,t}}. \quad (80)$$

Powyższe równanie daje nam pierwszy wniosek dotyczący cen akcji. Zwrot z cen akcji zależy nie tylko od wzrostu ceny kapitału z okresu t na $t + 1$, ale także od współczynnika technologii wystandaryzowanego przez cenę kapitału. Jeżeli technologia jest wydajna bardziej niż średnia, to średni zwrot z akcji jest także wyższy od średniej. Można również zakładać, że jeżeli proces (77) generuje cykle, to także zwrot z aktywów ryzykownych będzie cykliczny.

Znajdziemy następnie równowagę. Wprowadźmy teraz normalizację liczby przedsiębiorstw i gospodarstw domowych do jedności. Wtedy, ograniczenie „surowcowe” dla tej gospodarki jest wyrażone następująco:

$$C_t \leq Y_t, K_t \leq K. \quad (81)$$

Optymalne wartości w równowadze otrzymujemy w następujący sposób. Po pierwsze, $C_t = Z_t K$. Ceny znajdujemy przez kombinację warunków pierwszego rzędu dla S_t dla gospodarstw domowych z warunkami (75) - (79):

$$p_{k,t} = E_t M_{c,t+1} \exp(\theta_{t+1}) [1 + p_{k,t+1}], \quad (82)$$

gdzie $p_{k,t} \equiv P_{k,t} / Z_t$.

Dodatkowo,

$$M_{c,t+1} = \delta \frac{u_{c,t+1}}{u_{c,t}}, \quad (83)$$

gdzie $u_{c,t}$ oznacza pochodną w równaniu (72) po C_t . Zauważmy, że wzór (83) jest wzorem na stochastyczny czynnik dyskontujący. Można go policzyć mając dane rozwiązanie dla C_t dane powyżej. Wtedy znajdujemy $p_{k,t}$ jako funkcję θ_t i rozwiązujemy dla punktu stałego równanie (82). Mając dane $P_{k,t} = p_{k,t}$, rozwiązujemy dla (90). Ostatecznie:

$$1 + R_t^f = \frac{1}{E_t M_{c,t+1}}. \quad (84)$$

Co jest identycznym wynikiem z równaniem (6). A zatem skomplikowanie naszej gospodarki o sferę produkcyjną i stochastyczny wzrost nie spowodowało zmiany wzoru na stopę wolną od ryzyka.

2.1.2. Preferencje i zwrot z aktywów

W tej sekcji, rozważamy kilka własności preferencji z podtrzymaniem przyzwyczajęń konsumpcyjnych, które są istotne ze względu na wycenę aktywów. Dyskutujemy także wpływ podtrzymanych przyzwyczajęń na stopę wolną od ryzyka oraz prezentujemy formalną dekompozycję premii akcyjnej na krzywiznę i kanał zysków kapitałowych.

Wprowadzimy teraz rozróżnienie między awersją do ryzyka i miarą krzywizny. Aby zrozumieć wpływ podtrzymania przyzwyczajęń konsumpcyjnych na premię akcyjną, musimy odróżnić koncepcję relatywnej awersji do ryzyka (RRA) od miary krzywizny funkcji użyteczności²¹. Miarą krzywizny jest $-\frac{Cu_{cc}}{u_c}$, gdzie u_{cc} jest pochodną u_c po C , a brak subskryptu czasu oznacza wartość C na niestochastycznej ścieżce równowagi. W przypadku preferencji, takich jak użyteczność potęgowa, krzywizna i awersja do ryzyka są identyczne. Właśnie dlatego badacze, którzy starają się wyjaśnić premię akcyjną przez zwiększanie krzywizny, jednocześnie odnotowują wysoką awersję do ryzyka.

Aby nabrać intuicji dlaczego krzywizna może być niska, a RRA wysokie w przypadku użyteczności z przyzwyczajeniami konsumpcyjnymi, musimy przywołać jeszcze raz definicję RRA: mierzy ona ile indywidualne gospodarstwo domowe jest w stanie zapłacić, aby uniknąć sprawiedliwego zakładu na swoim bogactwie. Jej wielkość odnosi się do straty w użyteczności w przypadku niepomyślnych stanów natury. Gdyby gospodarstwa domowe były zmuszone do nagłego spadku konsumpcji, strata w takim

²¹ Wspomnieliśmy o tym w podrozdziale 1.3.1.

zakładzie byłaby bardzo bolesna, mając daną krótkookresową egzogeniczność przyzwyczajęń i dużą krzywiznę. Jednakże, gospodarstwa podtrzymujące przyzwyczajenia konsumpcyjne mogą tego uniknąć. Ponieważ wartość obecna zdyskontowanej całkowitej konsumpcji musi spaść, wtedy gospodarstwa mogą wyhamować spadek w obecnej konsumpcji poprzez zaciągnięcie prywatnego kredytu o stopie wolnej od ryzyka i przyzwyczajenia konsumpcyjne nie muszą spaść.

Przyjrzyjmy się stopie wolnej od ryzyka. Rozważmy równanie (84) wzdłuż niestochastycznej ścieżki stałego wzrostu, gdzie $C_t = C_{t+1} \exp(\bar{\theta})$:

$$1 + R_t^f = \begin{cases} \frac{\exp \gamma \bar{\theta}}{\beta} & , \text{ dla użyteczności potęgowej} \\ \frac{\exp \bar{\theta}}{\beta} & , \text{ dla podtrzymanych przyzwyczajęń konsumpcyjnych.} \end{cases} \quad (85)$$

Jak wiadomo, elastyczność międzyokresowej substytucji w konsumpcji ψ jest odwrotnością naszej miary krzywizny. Ponadto możemy zauważyć, że zwiększając γ redukujemy międzyokresową substytucję w przypadku użyteczności potęgowej. Dlatego z równania (84) wynika, że redukcja międzyokresowej substytucji ma bardzo różny wpływ na stopę wolną od ryzyka, zależnie czy mamy do czynienia z preferencjami potęgowymi, czy z podtrzymanymi przyzwyczajeniami konsumpcyjnymi.

W przypadku użyteczności potęgowej i dodatnim wzroście konsumpcji, przyszła krańcowa użyteczność konsumpcji jest niska w porównaniu z krańcową użytecznością obecnej konsumpcji. Zwiększając γ intensyfikuje to zjawisko, tak że wyższa stopa wolna od ryzyka jest konieczna, aby zniechęcić agentów do przenoszenia konsumpcji z przyszłości na teraz. Wpływ zwiększania b lub h jest inny. W tym wypadku zwiększa się przyszła zwyczajowa konsumpcja, co zwiększa krańcową użyteczność przyszłej konsumpcji, zmniejszając chęć przenoszenia konsumpcji z przyszłości.

Podsumowując, przy próbie wyjaśnienia zagadki premii akcyjnej, można zwiększyć krzywiznę, wtedy uniknie się mylnych wniosków dla stopy wolnej od ryzyka, gdy zwiększamy b lub h , ale nie γ . Otrzymaliśmy zatem kolejne ciekawe rozszerzenie wniosków z poprzedniego rozdziału. Niska stopa wolna od ryzyka może być wytłumaczona wysokimi wartościami współczynników b i h , co oznacza wzrost zwyczajowej konsumpcji. Podobny wniosek uzyskaliśmy też w podrozdziale 1.3.3, rozpatrując nieracjonalne oczekiwania. Tutaj mamy do czynienia ze zwiększeniem zwyczajowej konsumpcji, która nie musi być nieracjonalna.

A teraz przejdźmy do zagadki premii akcyjnej. Krzywizna oraz kanał zysków kapitałowych koresponduje z dwoma wyrażeniami na warunkową kowariancję dla zagadki premii akcyjnej:

$$R_t^{ep} = \frac{E_t(1 + R_{t+1}^e)}{1 + R_t^f} = 1 - \text{Cov}(M_{c,t+1}, \frac{Z_{t+1} + P_{k,t+1}}{P_{k,t}}), \quad (86)$$

Znów wysoką premię akcyjną mają akcje ujemnie skorelowane z współczynnikiem międzyokresowej substytucji konsumpcji. Czyli takie, które wygładzają konsumpcję. Szok technologiczny, zależnie od znaku może zwiększyć lub zmniejszyć premię akcyjną.

Oznaczmy przez $\Delta E R_t^{ep}$ zmianę w średniej premii akcyjnej w zależności od zmiany w preferencjach. Nasza dekompozycja niech będzie oznaczona przez:

$$\Delta E R_t^{ep} = \delta_u E R_t^{ep} + \delta_{P_k} E R_t^{ep}, \quad (87)$$

gdzie $\delta_u E R_t^{ep}$ i $\delta_{P_k} E R_t^{ep}$ mierzą odpowiednio kanał krzywizny i kanał ceny kapitału²².

Definiujemy $\delta_u E R_t^{ep}$ jako zmianę średniej premii akcyjnej w zależności od zmiany w funkcji użyteczności, utrzymując jako stały rozkład $\frac{Z_{t+1} + P_{k,t+1}}{P_{k,t}}$ oraz C_{t+1} przez wszystkie okresy i stany natury. Kanał zysków kapitałowych jest zdefiniowany po prostu jako reszta: $\delta_{P_k} E R_t^{ep} = \Delta E R_t^{ep} - \delta_u E R_t^{ep}$.

2.2. Ekonomia z jednym sektorem produkcyjnym

W tej sekcji modyfikujemy poprzedni model, pozwalając naszej ekonomii na akumulację kapitału i elastyczną podaż pracy. Pokażemy, że te modyfikacje w sposób znaczący eliminują premię akcyjną, nawet z preferencjami uwzględniającymi przyzwyczajenia konsumpcyjne.

2.2.1. Model

W okresie 0 preferencje gospodarstwa domowego dane są za pomocą wyrażenia:

$$E_0 \lim_{t \rightarrow \infty} \delta^t \frac{[(C_t - X_t)(1 - h_t)^v]^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}, \quad (88)$$

gdzie h_t oznacza pracę w okresie t , X_t jest zwyczajową konsumpcją, zdefiniowaną w (73) oraz:

$$0 \leq h_t \leq 1, \forall t \geq 0. \quad (89)$$

Ograniczenie surowcowe dla tej ekonomii dane jest następująco:

$$K_t^\alpha (Z_t h_t)^{1-\alpha} \geq C_t + K_{t+1} - (1 - \beta)K_t, \quad (90)$$

²² Kanał krzywizny zależy tylko od funkcji użyteczności i preferencji w międzyokresowej substytucji. Kanał ceny kapitału uzależniony jest od warunków równowagi ekonomii.

gdzie $0 < \beta, \alpha < 1$. Zmienna Z_t oznacza jak powyżej szok technologiczny (w wydajności pracy), ale tym razem generowany z rozkładu normalnego, a nie procesu AR(1), spełniający warunki:

$$Z_t = \exp(\theta_t)Z_{t-1}, \quad \theta_t : N(\bar{\theta}, \sigma^2), \forall t \geq 0. \quad (91)$$

Rozwiązując te równanie posługujemy się taką samą sekwencją obliczeń jak w sekcji poprzedniej, odpowiednio zmodyfikowanej, aby uwzględnić możliwe inwestycje i wybór między czasem wolnym a pracą. Optymalną alokację znajdujemy w następujący sposób: maksymalizujemy (88) przy warunkach danych równaniami (89)-(91) oraz warunkami $K_{t+1}, C_t \geq 0$. Stopę zwrotu na instrumencie wolnym od ryzyka obliczamy używając (83) i (84). Stopa zwrotu z instrumentu z ryzykiem dana jest wyrażeniem:

$$R_{t+1}^e = \alpha \left(\frac{Z_{t+1} h_{t+1}}{K_{t+1}} \right)^{1-\alpha} - \beta. \quad (92)$$

Zauważmy, że we wzorze (92) odeszliśmy w znaczący sposób od schematu CCAPM. Po pierwsze nie mamy już współczynnika awersji do ryzyka γ . Po drugie uzależniamy stopę zwrotu z akcji od nowych zmiennych: ilości i wydajności pracy. Wzrost ilości pracy i jej wydajności wystandaryzowany przez ilość kapitału wpływa pozytywnie na wzrost zwrotu z akcji. Zauważmy ponadto, że ilość kapitału wpływa na ceny akcji multiplikatywnie, a ilość pracy w sposób potęgowy. A zatem wzrost ilości pracy na rynku jest znacznie bardziej istotny dla zwrotów z aktywów ryzykownych niż akumulacja kapitału. Wskaźnik zwrotu z aktywów jest dodatkowo pomniejszony o deprecjację kapitału - współczynnik β .

2.3. Ekonomia z dwoma sektorami produkcyjnymi

W tej sekcji wprowadzimy trzy modyfikacje modelu analizowanego w poprzedniej sekcji. W pierwszej modyfikacji zakładamy, że konsumpcja i dobra inwestycyjne są produkowane w różnych sektorach oraz że alokacja kapitału w sektorach w okresie t jest funkcją stanów natury w okresie $t-1$. W drugiej modyfikacji, pozwalamy gospodarstwu domowemu na alokację zasobów pracy w sektorze inwestycyjnym i konsumpcyjnym, przed realizacją stanów natury. Dodatkowo pozwalamy przedsiębiorstwom na emisję wolnych od ryzyka obligacji obok emisji akcji, tak by uzyskać kapitał potrzebny do produkcji. Będziemy się zajmować analizą cyklu koniunkturalnego w kontekście tego modelu.

2.3.1. Ekonomia z dwoma sektorami produkcyjnymi z pełną mobilnością pracy

Mamy następujący problem optymalizacyjny:

$$\max E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{[(C_t - X_t)(1 - h_{i,t} - h_{c,t})^v]^{1-\phi} - 1}{1 - \phi} \right\} \quad (93)$$

przy warunkach:

$$K_{c,t}^\alpha (Z_t h_{c,t})^{1-\alpha} \geq C_t, \quad (94)$$

$$h_{c,t}, h_{i,t}, h_{c,t} + h_{i,t} \in [0,1], \forall t \geq 0, \quad (95)$$

oraz

$$K_{i,t}^\alpha (Z_t h_{i,t})^{1-\alpha} + (1 - \beta)(K_{c,t} + K_{i,t}) \geq K_{c,t+1} + K_{i,t+1}. \quad (96)$$

W tym wypadku, subskrypt c i i oznacza odpowiednio sektor konsumpcyjny i inwestycyjny. Wymagamy tutaj, aby $K_{c,t+1} + K_{i,t+1}$, $K_{c,t+1}$, $K_{i,t+1}$ były wybrane jako funkcja stanów natury w okresie t . Dodatkowo zakładamy, że technologia Z_t jest reprezentowana przez równanie (91). Niech $\Lambda_{c,t}$ oraz $\Lambda_{i,t}$ oznaczają mnożniki Lagrange'a z równaniami odpowiednio (94) oraz (96). Pierwszy mnożnik określa równowagę częściową z ograniczeniem konsumpcyjnym gospodarstw domowych, a drugi równowagę częściową z ograniczeniem kapitałowym przedsiębiorstw.

Zakładamy, że takie same jak dotychczas warunki finansowania przedsiębiorstwa mają jednookresowy horyzont planowania i produkują w okresie $t + 1$. Emitują one akcję w okresie t , tak by zdobyć kapitał potrzebny do nabycia kapitału w okresie t . Różny rodzaj akcji jest emitowany do finansowania przedsiębiorstw produkujących dobra konsumpcyjne i inwestycyjne.

Można pokazać, że stopa zwrotu z akcji na rynku dóbr konsumpcyjnych dana jest przez:

$$1 + R_{c,t+1}^e = \frac{\alpha \left[\frac{Z_{t+1} h_{c,t+1}}{K_{c,t+1}} \right]^{1-\alpha} + P_{k,t+1} (1 - \beta)}{P_{k,t}} \quad (97)$$

oraz dla dóbr inwestycyjnych:

$$1 + R_{i,t+1}^e = \frac{P_{k,t+1} \alpha \left[\frac{Z_{t+1} h_{i,t+1}}{K_{i,t+1}} \right]^{1-\alpha} + P_{k,t+1} (1 - \beta)}{P_{k,t}}. \quad (98)$$

Równania (97) i (98) uzależniają stopę zwrotu od wydajności i ilości pracy oraz cen kapitału. W równaniu (98) stopa zwrotu z akcji przedsiębiorstwa produkującego dobra inwestycyjne jest dodatkowo wzmocniona przez wzrost ceny kapitału w wyrażeniu

$$P_{k,t+1} \alpha \left[\frac{Z_{t+1} h_{i,t+1}}{K_{i,t+1}} \right]^{1-\alpha}.$$

Jeżeli cena kapitału rośnie znacząco, to zwiększa się też zwrot z akcji przedsiębiorstw sektora inwestycyjnego.

Stopa zwrotu z portfela rynkowego, R_t^e , jest dana przez:

$$R_{t+1}^e = \frac{K_{c,t+1}}{K_{t+1}} R_{c,t+1}^e + \frac{K_{i,t+1}}{K_{t+1}} R_{i,t+1}^e, \quad (99)$$

gdzie $K_{t+1} = K_{c,t+1} + K_{i,t+1}$.

Musimy jeszcze znaleźć $P_{k,t}$, która dana jest relacją:

$$P_{k,t} = \frac{\Lambda_{i,t}}{\Lambda_{c,t}}. \quad (100)$$

A zatem cena kapitału uzależniona jest od mnożników Lagrange'a, czyli pośrednio ograniczeń na ilość kapitału i produkcji. Jeżeli kapitału jest dużo, możemy spodziewać się, że będzie on tani, a jeżeli jest go mało w stosunku do produkcji i konsumpcji, to będzie on drogi. W tym drugim przypadku akcje przedsiębiorstwa z sektora inwestycyjnego będą mocno drożeć. Ponadto zauważmy, że cena $P_{k,t}$ zmienia się wraz z realizacją stanów natury w okresie t , ponieważ zmienia się wydajność pracy, podczas gdy praca jest realokowana pomiędzy sektory, a alokacja kapitału jest stała.

Stopa wolna od ryzyka dana jest jak poprzednio.

2.3.2. Efekt dźwigni finansowej

Wprowadzamy teraz modyfikację polegającą na umożliwieniu przedsiębiorstwom emitowania długu. Zakładamy, że będzie on wolny od ryzyka. Dług ten będzie identyczny z długiem prywatnych gospodarstw domowych dotychczas rozważanym. Jednak w przeciwieństwie do instrumentu bez ryzyka w poprzedniej sekcji, teraz dług emitowany przez przedsiębiorstwo będzie wymieniany w równowadze ogólnej.

Firmy maksymalizujące zysk są obojętne pomiędzy wyborem źródeł finansowania, czyli pomiędzy emisją akcji i emisją obligacji. Ponadto alokacja w równowadze ogólnej nie zależy od wzorca wskaźnika wartość długu - wartość akcji (twierdzenie Modiglianiego-Millera). Wariancja i średni zwrot z akcji nie zależą od tego wskaźnika. Natomiast premia akcyjna rośnie wraz ze wzrostem tego wskaźnika. Fakt ten odzwierciedla zjawisko takie, że akcje niosą ze sobą całe ryzyko związane ze zmiennością stanów natury. Ryzyko musi zostać podzielone pomiędzy kapitał akcyjny, a jeżeli jest go mało to będzie go przypadało dużo na jedną akcję, czyli premia za ryzyko będzie duża.

Biorąc pod uwagę możliwość dźwigni finansowej dla firmy działającej w sektorze x , czyli w naszym wypadku $x = c, i$ mamy następujące ograniczenia:

$$P_{k,t} K_{x,t+1} \leq S_{x,t} + B_{x,t}. \quad (101)$$

W okresie $t + 1$, przedsiębiorstwo działające w sektorze x zatrudnia pracowników i zaczyna produkować. Niech $\pi_{x,t+1}$ oznacza zysk przedsiębiorstwa liczony jako

przychód ze sprzedaży, $Y_{x,t+1}$, plus niezdeprecjonowany kapitał pomniejszone o wydatki na pracę i wypełnianie zobowiązań finansowych. Wszystkie wyrazy w poniższym równaniu są zdenominowane w jednostkach konsumpcji. Wymagamy ponadto, że wydatki firmy nie przekraczają przychodów:

$$\pi_{x,t+1} = Y_{x,t+1} + (1-\beta)K_{x,t+1}P_{k,t+1} - W_{x,t+1}h_{x,t+1} - (1+R_{x,t+1}^e)S_{x,t} - (1+R_t^f)B_{x,t} \geq 0, \quad (102)$$

gdzie $R_{x,t+1}^e$ oraz R_t^f oznaczają stopy zwrotu z akcji i obligacji odpowiednio. Ponadto, $W_{x,t+1}$ oznacza płacę dla pracowników w sektorze x wyrażoną w jednostkach konsumpcji w okresie $t+1$.

Przedsiębiorstwo przyjmuje jako dane ceny i stopy zwrotu: $P_{k,t}$, $R_{x,t+1}^e$, R_t^f , $P_{k,t+1}$, $W_{x,t+1}$. W okresie t funkcja celu firmy dana jest następująco:

$$\max_{S_{x,t}, K_{x,t+1}, B_{x,t}} E_t P_{c,t+1} \max_{h_{x,t+1}} \pi_{x,t+1}, \quad (103)$$

przy warunkach (83), (101) i (102). Traktujemy cenę dobra konsumpcyjnego $P_{c,t+1}$ jako egzogeniczną. Jeżeli szukamy rozwiązania wewnętrznego dla równania (103), to mamy następujące warunki pierwszego rzędu dla $h_{x,t+1}$:

$$mpl_{x,t+1} = W_{x,t+1}, \quad (104)$$

gdzie $mpl_{x,t+1}$ jest krańcowym produktem pracy w sektorze x , wyrażonym w jednostkach konsumpcji. Warunek pierwszego rzędu związany z $S_{x,t}$ jest następujący:

$$E_t P_{c,t+1} \left[\frac{mpk_{x,t+1} + (1-\beta)P_{k,t+1}}{P_{k,t}} - (1+R_{t+1}^e) \right] = 0, \quad (105)$$

gdzie $mpk_{x,t+1}$ oznacza krańcową produktywność kapitału w sektorze x , mierzoną w jednostkach konsumpcji. Warunkiem podstawowym dla $B_{x,t}$ jest warunek (105), gdzie R_{t+1}^e jest zastąpione przez R_t^f . Liniowa homogeniczność funkcji celu gwarantuje, że w równowadze zysk z równania (103) jest równy zero dla wszystkich stanów natury. W połączeniu z następującymi faktami:

- (i) nierówność w (101) zachodzi w równowadze jako równość,
- (ii) zachodzi następująca równość $Y_{x,t+1} = mpk_{x,t+1}K_{x,t+1} + mpl_{x,t+1}h_{x,t+1}$ oraz
- (iii) warunek pierwszego rzędu na pracę w równaniu (104)

dają następujące wyrażenie na stopę zwrotu z akcji w sektorze x :

$$1+R_{x,t+1}^{e*} = \frac{mpk_{x,t+1} + (1-\beta)P_{k,t+1}}{P_{k,t}} (1+\gamma_{x,t}) - (1+R_t^f)\gamma_{x,t}, \quad (106)$$

gdzie $\gamma_{x,t} = B_{x,t} / S_{x,t}$ jest wskaźnikiem dług-kapitał akcyjny oraz $R_{x,t+1}^{e*}$ jest lewarowaną stopą zwrotu na akcjach. Zauważmy również, że stopa zwrotu z akcji lewarowana długiem zależy od krańcowej produktywności kapitału. Jeżeli krańcowa produktywność kapitału jest wysoka to dźwignia finansowa daje pozytywne efekty. Zauważmy, że przy

małej krańcowej produktywności kapitału lewarowana stopa zwrotu może być ujemna. Wysoki wskaźnik dług-kapitał akcyjny tylko spotęguje ten efekt.

Przekształcając równanie (106) i biorąc pod uwagę nielewarowaną stopę zwrotu z akcji $R_{x,t+1}^e$ daną w równaniach (107) i (108), otrzymujemy następujące wyrażenie na premię akcyjną:

$$R_{x,t+1}^{e*} - R_t^f = (R_{x,t+1}^e - R_t^f)(1 + \gamma_{x,t}). \quad (107)$$

Z tego równania możemy wywnioskować, że dźwignia zwiększa premię akcyjną proporcjonalnie do swej wielkości. Oczywiście, jeżeli premia akcyjna w nielewarowanej ekonomii jest mała, to dźwignia będzie miała bardzo mały wpływ na premię akcyjną. Dla przykładu, w równaniu (107), aby przekonwertować nielewarowaną premię w wysokości 1 procenta w lewarowaną premię w wysokości 5 procent, wymaga to wskaźnika dług-kapitał akcyjny w wysokości 4. Nie zdarza się to jednak w rzeczywistych gospodarkach. Wskaźnik ten może wynosić co najwyżej 1, chociaż zazwyczaj jest niższy.

2.4. Uzupełnienia

Omówimy w tym rozdziale rozszerzenia poprzedniego modelu o zagadnienie współczynnika q -Tobina i jego zastosowanie do wyjaśnienia zagadki premii akcyjnej. Następnie przedyskutujemy pewne problemy powstające przy modelowaniu cyklu koniunkturalnego i dodatkowe interpretacje RBCM.

2.4.1. Współczynnik q -Tobina

Christiano i Fisher (1995) dokonują zasadniczego rozszerzenia powyższego modelu dwusektorowej ekonomii dla omówienia zagadnienia współczynnika q -Tobina i tzw. zjawiska przełączania znaków (*switching sign phenomenon*) w liczniku i mianowniku tego współczynnika. Współczynnik q -Tobina oznacza stosunek krańcowej wartości przedsiębiorstwa, wynikającej ze zwiększenia produkcji dobra konsumpcyjnego lub inwestycyjnego o jednostkę do krańcowego kosztu nowego dobra inwestycyjnego, potrzebnego do zwiększenia możliwości produkcyjnych dobra konsumpcyjnego bądź inwestycyjnego o jednostkę. Jeżeli obie te wartości są sobie równe, to współczynnik q -Tobina jest równy jedności. Zjawisko przełączania znaków zaobserwowane w rzeczywistych gospodarkach mówi, że licznik w tym równaniu jest silnie procykliczny, a mianownik słabo przeciwykliczny. Wspólnie jednak powoduje to, że współczynnik q -Tobina jest mocno procykliczny i różni się zasadniczo od jedności. Krańcowa wartość przedsiębiorstwa po standaryzacji to oczywiście cena akcji tego przedsiębiorstwa.

Cenę akcji przedsiębiorstwa produkującego dobro $x = c, i$, równą cenie nowego kapitału w sektorze $x = c, i$, dostępnego do produkcji w okresie $t + 1$ oznaczamy przez $P_{k',x,t}$. Przez $P_{k,x,t}$ oznaczamy cenę już wcześniej zainstalowanego kapitału. Cenę nowego dobra inwestycyjnego potrzebnego do zwiększenia możliwości produkcyjnych przedsiębiorstwa w sektorze $x = c, i$ oznaczamy przez $P_{i,t}$. Przez $Q^x(y, z) \equiv [a_1 y^\psi + a_2 z^\psi]^\frac{1}{\psi}$, $\psi \leq 1$ ²³, oznaczamy ilość kapitału używanego przez przedsiębiorstwo $x = c, i$, gdzie y oznacza poprzednio zainstalowany kapitał, a z nowe dobro inwestycyjne potrzebne do produkcji. Przez $Q_{i,t}^x$ oznaczamy pochodną cząstkową po i -tym argumentcie.

Omówmy tylko główne wnioski płynące z tych rozważań. Rozważmy najpierw $P_{i,t}$. Szoki w produktywności dobra inwestycyjnego powodują ujemną kowariancję pomiędzy $P_{i,t}$ a produkcją, a szoki w zagregowanej produktywności powodują dodatnią kowariancję pomiędzy $P_{i,t}$ a produkcją.

Rozważmy teraz $P_{k',x,t}$. Jeżeli $Q_{2,t}^x$, wtedy oznacza to, że $\psi = 1$ i oczywiście $P_{k',x,t} = P_{i,t}$, i nie ma mowy o zjawisku przełączania znaków we współczynniku q -Tobina. Natomiast jeżeli $\psi < 1$, to wtedy te dwie wartości będą różne i zachodzi zjawisko przełączania znaków. Różnica powoduje zmniejszanie wpływu szoku w produkcji dobra inwestycyjnego na $P_{k',x,t}$ oraz zwiększa wpływ zagregowanych szoków technologicznych.

Rozważmy najpierw dodatni szok w produktywności dobra inwestycyjnego. Powoduje on w równowadze spadek ceny dobra inwestycyjnego $P_{i,t}$ i wzrost ilości inwestycji oznaczanej przez $I_{x,t}$. To powoduje dwa przeciwne efekty na $P_{k',x,t}$. Spadek $P_{i,t}$ powoduje spadek $P_{k',x,t}$, ale wzrost $I_{x,t}$ powoduje wzrost $P_{k',x,t}$, od momentu kiedy $Q_{2,t}^x$ spada. Dlatego $P_{k',x,t}$ spada proporcjonalnie mniej niż $P_{i,t}$, gdy następuje szok w produktywności dobra inwestycyjnego.

Rozważmy teraz dodatni szok w zagregowanej technologii. Powoduje on zwiększenie popytu na kapitał z powodu wygładzania konsumpcji. To powoduje wzrost

²³ Dla $\psi = 1$ mamy liniową akumulację kapitału. Dla $\psi < 1$ krańcowa stopa produktywności nowego dobra inwestycyjnego spada wraz ze wzrostem inwestycji.

w $P_{i,t}$ oraz jednocześnie w $I_{x,t}$. Wzrost w $I_{x,t}$, zmniejszając $Q_{2,t}^x$, powoduje zwiększenie $P_{k',x,t}$ proporcjonalnie większe niż $P_{i,t}$.²⁴

Teraz postaramy się wyjaśnić zagadkę premii akcyjnej w tym kontekście. Wyróżnienie szoków w produktywności dobra inwestycyjnego w przeciwieństwie do wcześniej stosowanych szoków w produktywności zagregowanego kapitału daje nam nowe wyjaśnienie dla dużych premii akcyjnych. Wysoka premia akcyjna powinna zgodnie z tym modelem być skutkiem dodatnich szoków technologicznych, które zachodzą w całej gospodarce. Wzrost akcji przedsiębiorstw produkujących dobra inwestycyjne i konsumpcyjne jest wtedy większy niż w przypadku zachodzenia szoków jedynie w technologii nowego dobra inwestycyjnego. Wnikliwa analiza współczynnika q -Tobina przekracza jednak ramy tej pracy.

2.4.2. Dyskusja

Wyjaśnienie zjawiska cyklu koniunkturalnego w powyżej zbudowanym modelu wymaga wyjaśnienia zjawiska autokorelacji w procesie technologii, produkcji i konsumpcji. Autokorelacja oznacza podtrzymanie znaku i siły składników losowych wpływających na poziom tych zmiennych. Autokorelacja w tych zmiennych będzie również powodować podtrzymanie wartości premii akcyjnej i stopy wolnej od ryzyka. Funkcja użyteczności ze zwyczajową konsumpcją oraz pewne ograniczenia na przepływ kapitału między sektorami mogą służyć za wytłumaczenie zjawiska autokorelacji i opisanie wzorca dla cyklu koniunkturalnego.

Aby wprowadzić wzrost do modelu RBC, powinniśmy przyjąć za proces technologiczny pewną formę błędzenia losowego, czyli $I(1)$ z trendem i z autokorelacją²⁵.

Zauważmy, że w modelu z akumulacją kapitału i mobilnością kapitału oraz szokami technologicznymi, gospodarstwa domowe mają dużą możliwość wygładzania międzyokresowej konsumpcji. Mogą np. zwiększyć ilość pracy lub poprawić jej wydajność, zmienić sektor, w którym są zatrudnione. Oczywiście odpowiedź na szoki i

²⁴ Współczynnik q -Tobina w tej metodologii można zapisać jako:

$$q_t^x \equiv \frac{P_{k',x,t}}{P_{i,t}} = \frac{1}{Q_{2,t}^x} = \frac{1}{a_2} \left[a_1 \left(\frac{(1-\beta)K_{x,t}}{I_{x,t}} \right)^\psi + a_2 \right]^{\frac{\psi-1}{\psi}}, \text{ co równa się jedności jeżeli } \psi=1.$$

Na podstawie tego wzoru już łatwo wytłumaczyć zjawisko przełączania znaku. Wzrost ceny akcji przy jednoczesnym spadku ceny nowego dobra inwestycyjnego jest równoważny wzrostowi popytu na nowe dobro inwestycyjne $z = I_{x,t}$ i spadkowi popytu na poprzednio zainstalowany kapitał $y = (1-\beta)K_{x,t}$ (szok w produkcji nowego dobra inwestycyjnego).

²⁵ Ze względów ekonometrycznych autokorelacja składnika losowego jest niepożądana i stanowi główny problem modelowania cyklu koniunkturalnego.

konsumpcję ze strony rynku pracy nie jest natychmiastowa, jednak pozwala wygładzić strumień konsumpcji. Powoduje to mniejszą potrzebę międzyokresowej substytucji. Brak lub słaba korelacja między zwrotami z aktywów i wzrostem oczekiwanej konsumpcji w kontekście modeli RBC wyjaśnia zagadkę premii akcyjnej w następujący sposób. Premia akcyjna jest spowodowana raczej niską skłonnością do międzyokresowej substytucji, rozumianej w ujęciu deterministycznym, niż wysoką awersją do ryzyka, zależącą od stanów natury. Wyjaśnienie słabej korelacji między wzrostem konsumpcji a cenami aktywów może mieć swe uzasadnienie w opóźnieniu jakie zachodzi w konwersji nominalnych zysków kapitałowych w realne obserwowane w konsumpcji.

Kolejnym problemem jest modelowanie i znalezienie właściwego wzorca dla ceny kapitału. Poprawki w oczekiwaniach dotyczących ceny kapitału muszą być negatywnie skorelowane z krańcową użytecznością konsumpcji. W takim wypadku akcje są złym zabezpieczeniem przed ryzykiem i wymagają dużej premii, aby znalazły nabywców. Aby poprawnie modelować ceny kapitału wymagamy, aby gospodarstwa domowe kupowały aktywa, gdy ich krańcowa użyteczność konsumpcji jest mała i sprzedawały, gdy krańcowa użyteczność konsumpcji jest duża oraz dysponujemy losową technologią, która komplikuje ten schemat zachowania (Boldrin, Christiano, Fisher, 1995).

Literatura dotycząca wyceny aktywów daje też ciekawe wyjaśnienie kosztu fluktuacji ekonomicznych, który powoduje stratę bogactwa. Modele z przyzwyczajoną konsumpcją potwierdzają, że konsumenci biorą fluktuacje ekonomiczne bardzo poważnie. Fluktuacje mają silny negatywny wpływ na bogactwo, ponieważ ograniczają konsumpcję w krótkim okresie i redukują długookresowy wzrost produkcji. To zjawisko wyjaśnia też zagadkę premii akcyjnej. Wybór między ryzykownymi akcjami i instrumentami pieniężnymi pozbawionymi ryzyka jest swoistym wyborem pomiędzy średnią w stopie wzrostu bogactwa a zmiennością tej stopy (Campbell, 1998).

3

Struktura terminowa stóp procentowych

Dyskretnie modele stopy procentowej pochodzą od modeli CCAPM. Szczególnym aktywem jest tutaj stopa procentowa, której miernikiem może być cena obligacji. Cena obligacji jest zatem wartością oczekiwaną stochastycznego czynnika dyskontującego. Używając tej metodologii wprowadźmy podstawy modelu terminowej stopy procentowej. Wprowadzenie pojęcia terminowej stopy procentowej czy inaczej stopy dochodowości obligacji pozwala wydłużyć nam horyzont, w jakim analizujemy ceny aktywów i premii akcyjnej oraz implikacje cyklu koniunkturalnego. Wprowadzimy do naszych rozważań hipotezę oczekiwań. Zastanowimy się, czy kształt krzywej dochodowości obligacji może wyjaśnić zmienność w cenie aktywów ryzykownych. Dodatkową analizą będzie odwrócenie perspektywy obserwacji. Dotychczas uzależnialiśmy zmienność cen aktywów od ruchów zmiennych realnych. Pokażemy, że ta zależność działa też w przeciwnym kierunku. Zmiany w terminowej strukturze stopy procentowej doskonale przepowiadają okresy rozwoju i recesji.

3.1. Dyskretny model terminowej stopy procentowej

W niniejszej części prowadzę rachunki za Sargent, Ljunqvist (2003). Wyjdźmy od pojęcia stochastycznego czynnika dyskontującego i strumienia dywidend.

3.1.1. Stochastyczny czynnik dyskontujący

Oznaczamy strumień dywidend przez $\{D_t\}_{t=1}^{\infty}$. Cena aktywów P_t w modelu bez niepewności wyraża się wzorem:

$$P_t = E_t \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^j M_{t+s} \right) D_{t+j} \right], \quad (108)$$

gdzie M_{t+1} jest jednookresowym stochastycznym czynnikiem dyskontującym, $\prod_{s=1}^j M_{t+s}$

oznacza j -okresowy stochastyczny czynnik dyskontujący. Określimy teraz proces dywidend w sposób szczególny tak, aby P_t była ceną n -okresowej pozbawionej ryzyka obligacji. Wtedy wzór (108) przybiera postać

$$P_{n,t} = E_t \left(\prod_{s=1}^n M_{t+s} \right). \quad (109)$$

Zatem cena obligacji jest oczekiwanym produktem skumulowanych, jednookresowych czynników dyskontujących. Czyli im większe współczynniki międzyokresowej substytucji, tym wyższe ceny obligacji.

Zdefiniujmy stopę procentową do wykupu (*yield*) $y_{n,t}$ na n -okresowej obligacji jako $P_{n,t} = \exp(-ny_{n,t})$ lub

$$y_{n,t} = -\frac{1}{n} \log P_{n,t}, \quad (110)$$

gdzie $p_{n,t} = \log P_{n,t}$. Zauważmy, że stopy do wykupu obligacji są gaussowskie, jeżeli ceny obligacji są lognormalne. Stąd mamy lognormalny model wyceny obligacji. Niech jednookresowy stochastyczny czynnik dyskontujący w czasie t jest M_t , natomiast n -okresowy stochastyczny czynnik dyskontujący w czasie t $M_{t+1}, M_{t+2}, \dots, M_{t+n}$. Dla każdego t przyjmijmy $m_t = \log M_t$. Przyjmijmy też, że m_t jest determinowany przez proces stochastyczny:

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= -\delta - e_z z_{t+1} \\ z_{t+1} &= A_z z_t + C_z w_{t+1}, \end{aligned} \quad (111)$$

gdzie w_{t+1} jest zmienną losową wektorową i.i.d. gaussowską, gdzie $Ew_{t+1} = 0$, $Ew_{t+1}w'_{t+1}$, A_z jest macierzą $m \times m$ ze wszystkimi wartościami własnymi ograniczonymi w module przez jeden (proces nieeksplodujący)²⁶.

Stosując równanie (109) oraz (110) otrzymujemy

$$y_{n,t} = -\frac{1}{n} \log E_t[M_{t+1} \times \dots \times M_{t+n}]. \quad (112)$$

Aby obliczyć prawą stronę równania (112) należy posłużyć się własnością rozkładów lognormalnych, którą posługiwaliśmy się już wcześniej. Jeżeli $m_{t+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, wtedy

$$\log EM_{t+1} = m_{t+1} = \mu + \frac{\sigma^2}{2}, \quad (113)$$

stosując tę własność do równania (111) mamy:

$$m_{t+1} = -\delta - e_z A_z z_t + \frac{e_z C_z C'_z e'_z}{2}. \quad (114)$$

Iterując równanie (111) możemy otrzymać następujące wyrażenie, które jest użyteczne dla scharakteryzowania warunkowego rozkładu wyrażenia $\log(M_{t+1} \cdot \dots \cdot M_{t+n})$:

²⁶ Należy się tu wyjaśnienie, dlaczego proces AR(1) prezentowany w poprzednich rozdziałach zastępujemy teraz systemem VAR(1). System VAR jest bardziej pojemny, jeżeli chodzi o informację dotyczącą zależności pomiędzy wartościami stochastycznego czynnika dyskontującego w różnych okresach. Poza tym oszacowanie OLS w systemie VAR daje nam wszystkie potrzebne parametry wzajemnego oddziaływania zmiennych (oczywiście pod warunkiem normalności rozkładu zmiennych i czynników losowych).

$$\begin{aligned}
& -(\log M_{t+1} + \dots + \log M_{t+n}) = -(m_{t+1} + \dots + m_{t+n}) = n\delta + e_z(A_z + A_z^2 + \dots + A_z^n)z_t + e_z C_z w_{t+n} \\
& + e_z[C_z + A_z C_z]w_{t+n} + \dots + e_z[C_z + A_z C_z + \dots + A_z^{n-1} C_z]w_{t+1}
\end{aligned}
\tag{115}$$

Rozkład wyrażenia $m_{t+1} + \dots + m_{t+n}$ zależy od z_t i jest $N(\mu_{nt}, \sigma_n^2)$, gdzie

$$\begin{aligned}
\mu_{nt} &= -[n\delta + e_z(A_z + A_z^2 + \dots + A_z^n)z_t] \\
\sigma_1^2 &= e_z C_z C_z' e_z' \\
\sigma_n^2 &= \sigma_{n-1}^2 + e_z[I + \dots + A_z^{n-1}]C_z C_z'[I + \dots + A_z^{n-1}]e_z',
\end{aligned}
\tag{116}$$

gdzie rekursja (116c) zachodzi dla $n \geq 2$. Zauważmy, że warunkowe średnie μ_{nt} zmieniają się w czasie, natomiast warunkowe wariancje σ_n^2 są stałe. Zauważmy, że jeżeli współczynnik korekty A jest wysoki, co świadczy o wysokiej zmienności procesu rozwoju stochastycznego czynnika dyskontującego, to w formule (115) ulega on potęgowej kumulacji i daje bardzo wysoką średnią w n -tym okresie. Współczynniki A wzmacniają również wariancję tego procesu. A zatem stopy zwrotu w przypadku wysokiego współczynnika korekty A będą wysokie²⁷.

Biorąc formułę (112) oraz (113) otrzymujemy formułę na stopę do wykupu:

$$y_{n,t} = (\delta - \frac{\sigma_n^2}{2n}) + \frac{1}{n} e_z(A_z + \dots + A_z^n)z_t. \tag{117}$$

Wektor $y_{nt} = [y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt}]'$ jest nazywany terminową strukturą stóp procentowych w czasie t . W teorii mamy także model oczekiwanej struktury stóp procentowych, gdzie

$$y_{n,t} = \delta + \frac{1}{n} e_z(A_z + \dots + A_z^n)z_t, \tag{118}$$

która może być przybliżeniem równania (117)²⁸.

Powracając do lognormalnego modelu wyceny obligacji, mamy następującą przestrzeń VAR dla struktury terminowej stóp procentowych, zależną od ruchu stochastycznego czynnika dyskontującego:

$$\begin{aligned}
X_{t+1} &= A_0 X_t + C w_{t+1} \\
Y_t &\equiv \begin{pmatrix} y_t \\ m_t \end{pmatrix} = G X_t,
\end{aligned}
\tag{119}$$

gdzie

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ z_t \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ C_z \end{pmatrix}$$

²⁷ Przyrost krańcowej użyteczności będzie duży, co oznacza zmniejszanie poziomu konsumpcji z okresu na okres. Agenci będą pożyczać, aby wygładzić konsumpcję, co pociągnie stopę zwrotu w górę.

²⁸ Gdy w następnym rozdziale będziemy mówić o hipotezie oczekiwań, to będziemy rozumieli stopę do wykupu w znaczeniu równania (118), ignorując wyrażenie $-(\sigma_{\{n\}}^2)/(2 \times n)$.

$$\text{oraz } G = \begin{pmatrix} \delta - \frac{\sigma_1^2}{2} & e_z A_z & & \\ \delta - \frac{\sigma_2^2}{2 \times 2} & 2^{-1} e_z (A_z + A_z^2) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \delta - \frac{\sigma_n^2}{2 \times n} & n^{-1} e_z (A_z + \dots + A_z^n) & & \\ -\delta & & & \end{pmatrix}.$$

Jest to zgrabnie napisana formuła (117), która jednocześnie opisuje proces rekursywny dla y_t oraz m_t .

3.1.2. Nachylenie krzywej dochodowości

Z równania (119) wynika natychmiast, że wartość oczekiwana na strukturze stopy terminowej y_t ma postać:

$$E y_t' = [\delta - \sigma_1^2, \dots, \delta - \frac{\sigma_n^2}{2n}]. \quad (120)$$

Dlatego struktura terminowa wzrasta średnio wraz z wydłużaniem horyzontu czasowego, jeżeli wyrażenie $\frac{\sigma_j^2}{2j}$ spada przy wzrastającym j . Przyjrzyjmy się teraz

dokładniej wyrażeniu σ_j^2 :

$$\sigma_j^2 = \text{Var}_t(m_{t+1} + \dots + m_{t+j}), \quad (121)$$

gdzie Var_t oznacza wariancję warunkową na informacji w okresie t dotyczącej procesu z_t . Zauważmy dla przykładu, że:

$$\text{Var}_t(m_{t+1} + m_{t+2}) = \text{Var}_t(m_{t+1}) + \text{Var}_t(m_{t+2}) + 2\text{Cov}_t(m_{t+1}, m_{t+2}), \quad (122)$$

gdzie Cov_t jest warunkową kowariancją. Zauważmy, że $\sigma_1^2 > \sigma_2^2/4$ może zajść tylko jeżeli:

$$3\text{Var}_t(m_{t+1}) - \text{Var}_t(m_{t+2}) - 2\text{Cov}_t(m_{t+1}, m_{t+2}) > 0. \quad (123)$$

Powyższe równanie jest warunkiem na rosnącą krzywą dochodowości dla okresów $t+1$ i $t+2$. Zastanówmy się, kiedy będziemy mieli do czynienia z odwróconą krzywą dochodowości. Zajdzie to wtedy, gdy wariancja z jednookresowego czynnika dyskontującego zacznie gwałtownie rosnąć, ale będzie seryjnie dodatnio skorelowana. Dodatnia korelacja przy rosnącej wariancji będzie oznaczać tutaj pewien rodzaj procesu eksplodującego wraz ze zwiększaniem wariancji dla stochastycznego czynnika dyskontującego. Eksplodująca i coraz bardziej zmienna wartość krańcowej stopy substytucji oznacza zwiększenie niepewności, dotyczącej przyszłej konsumpcji, zachodzącej jednocześnie z obniżaniem poziomu konsumpcji (dla jednej ze standardowych postaci funkcji użyteczności).

Jest to zgodne z naszą intuicją. Jeżeli agenci konsumują coraz mniej lub w przypadku przyzwyczajenia konsumpcyjnych nie zwiększają konsumpcji i są niepewni, co do przyszłego poziomu konsumpcji to wzrasta krótkookresowa stopa procentowa i spada długookresowa. Zauważmy, że w przypadku zajścia pewnej formy kryzysu finansowego, który gwałtownie ogranicza konsumpcję, krótkookresowa stopa procentowa wzrasta gwałtownie ponad długookresową. Znaleźliśmy wytłumaczenie tego fenomenu leżące w modelu CCAPM.

3.2. Krzywa dochodowości i hipoteza oczekiwań

Dalsze rozważania dotyczące struktury terminowej będą bazować na hipotezie oczekiwań. Tę część opieramy na: Cochrane (2000).

Przed sformułowaniem hipotezy oczekiwań zdefiniujmy i opiszmy stopę forward. Stopa forward jest definiowana jako kontrakt zawarty dzisiaj, aby pożyczyć pieniądze w czasie n i zwrócić je w okresie $n + 1$. Można przedstawić kontrakt forward jako syntetyczną obligację zerokuponową. Zobaczmy, jak to zrobić. Załóżmy, że kupujemy n -okresową zerokuponową obligację i jednocześnie sprzedajemy x $n + 1$ okresowych zerokuponowych obligacji.

Tabela 1 Stopa forward = syntetyczna obligacja

	Kupić n -okresową obligację	Sprzedać x $n+1$ okresową obligację	Cash flow netto
Dzisiaj	$-P_{n,0}$	$+xP_{n+1,0}$	$xP_{n+1,0} - P_{n,0}$
Czas n	1		1
Czas $n+1$		$-x$	$-x$

$P_{n,t}$ oznacza tu cenę w czasie t zerokuponowej obligacji z n okresami do wykupu.

Teraz wybieramy taką wartość x , aby dzisiejsza wartość *cash flow* była równa zero. Stąd mamy wzór:

$$x = \frac{P_{n,0}}{P_{n+1,0}}, \quad (124)$$

czyli dzisiaj nie płacimy ani nie dostajemy niczego, w okresie n dostajemy jednego dolara i w okresie $n + 1$ płacimy $P_{n,0} / P_{n+1,0}$. A zatem mamy syntetyczny kontrakt na pożyczkę z okresu n na okres $n + 1$. Stąd stopa forward z okresu n na okres $n + 1$ oznaczana jest jako $P_{n,0} / P_{n+1,0}$. Dla logarytmów zachodzi oczywiście:

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = p_{n+1} - p_{n+1,t}. \quad (125)$$

Stopy forward mają tę ciekawą własność, że możemy wyrazić za ich pomocą cenę każdej obligacji. Zachodzi bowiem:

$$\begin{aligned}
 P_{n,t} &= P_{n,t} - P_{n-1,t} + P_{n-1,t} - P_{n-2,t} + \dots + P_{2,t} - P_{2,t} + P_{1,t} \\
 &= -f_t^{(n-1 \rightarrow n)} - f_t^{(n-2 \rightarrow n-1)} - \dots - f_t^{(1 \rightarrow 2)} - f_t^{(0 \rightarrow 1)}.
 \end{aligned}
 \tag{126}$$

Zatem cenę każdej obligacji możemy złożyć ze stóp forward. Określmy teraz hipotezę oczekiwania, która jest klasyczną teorią wyjaśniającą kształt stopy do wykupu. Składają się na nią trzy równoważnie założenia:

1. N -okresowa stopa do wykupu jest średnią oczekiwanych przyszłych jednookresowych stóp do wykupu.
2. Stopa forward równa się oczekiwanej przyszłej stopie spot.
3. Oczekiwane zwroty przez okres trzymywania obligacji są równe dla wszystkich obligacji.

Hipoteza oczekiwania jest klasyczną teorią tłumaczącą kształt krzywej dochodowości. Jeżeli krzywa dochodowości jest wznosząca, czyli długookresowa stopa procentowa jest większa od krótkookresowej, wtedy hipoteza oczekiwania mówi, że oczekujemy wzrostu krótkookresowych stóp w przyszłości²⁹.

Jedną z metod modelowania struktury terminowej jest dodawanie stałego współczynnika premii za ryzyko do wzoru na stopę forward. Stopa forward jest znana, ale przyszła stopa spot już nie. Zwroty z długookresowych obligacji są bardziej zmienne niż z krótkookresowych³⁰. Ten rodzaj zmienności będzie generował dodatkową premię za ryzyko, jeżeli oczywiście będzie skorelowany ze stochastycznym czynnikiem dyskontującym. Bardziej realistyczna jest zmienna w czasie premia za ryzyko, dzięki której możemy otrzymywać bardziej skomplikowane kształty dla krzywej dochodowości.

Opisywany w literaturze sposób generowania krzywej dochodowości jest następujący: początkowo określamy proces dla krótkookresowej stopy procentowej i premię za ryzyko a następnie na ich podstawie określić długookresowe stopy procentowe. Najważniejszą umiejętnością tutaj jest wyznaczenie odpowiednio

²⁹ Zgodnie z hipotezą oczekiwania nie da się zarobić bez ryzyka na wznoszącej krzywej dochodowości, jeżeli np. długookresowa stopa wynosi 10% a krótkookresowa - 5%. Nie oznacza to wcale, że długookresowa obligacja jest lepszą inwestycją, ponieważ zgodnie z hipotezą oczekiwania wzrosną krótkookresowe stopy procentowe, co oznacza zrolowanie krótkookresowego długu po wyższych krótkookresowych stopach. W rzeczywistości nie jest to podejście tzw. neutralne wobec ryzyka, zignorowaliśmy bowiem wyrażenie $\sigma^2 / 2$. Niemniej hipoteza oczekiwania jest pewnym przybliżeniem neutralności wobec ryzyka i skrótkowo będziemy posługiwać się tymi wyrażeniami wymiennie.

³⁰ Można wytłumaczyć ten fakt również wychodząc poza nasz schemat realnej ekonomii, bez rozważania zjawisk pieniężnych. Krótkookresowa stopa procentowa może lepiej dostosować się do zmian w inflacji, dlatego finansowanie krótkookresowym rolowanym długiem może być bezpieczniejsze niż finansowanie długookresowym długiem.

skomplikowanych założeń dla procesu, które jednak cały czas czynią model rozwiązywalnym.

3.3. Ekonomia Alvareza-Jermanna – ceny aktywów

Dotychczas opisywaliśmy zachowanie się terminowej struktury stóp zwrotu bez ryzyka. Aby pokazać jak ceny aktywów zachowują się w tym kontekście, musimy nieco skomplikować nasz model. Oprzemy się na modelu Alvarez, Jermann (2000). Metodologię oprzemy na jednowymiarowym łańcuchu Markowa pierwszego rzędu³¹. Dodatkowo pokażemy jak generuje się premię za okres trzymania obligacji.

3.3.1. Model

Ekonomia składa się z dwóch agentów $i = 1, 2$. Niech $\{z_t\}$ oznacza proces Markowa ze skończoną liczbą stanów $z \in Z = \{z_1, \dots, z_N\}$ z macierzą konwersji Π . Proces z_t determinuje zagregowane bogactwo e_t oraz indywidualne bogactwo dla każdego z agentów, e_t^i , $i = 1, 2$ tak, że:

$$e_{t+1} = \lambda(z_{t+1})e_t \quad (127)$$

oraz

$$e_t^i = \alpha^i(z_t)e_t, \quad \text{dla } i = 1, 2, \quad (128)$$

gdzie $\lambda(z_{t+1})$ oznacza wzrost stopy zagregowanego bogactwa między okresami t oraz $t + 1$, jeżeli stan natury w czasie $t + 1$ jest z_{t+1} . $\alpha^i(z_t)$ oznacza udział w zagregowanym bogactwie agenta i , jeżeli stan natury w okresie t jest z_t .

Niech $z_t = (z_1, \dots, z_t)$ oznacza historię z , aż do okresu t . Macierz Π determinuje warunkowe prawdopodobieństwa dla wszystkich historii $\pi(z_t|z_0)$. Gospodarstwa domowe dbają tylko o strumienie konsumpcji $\{C\} = \{C_t(z^t): t \geq 0, z^t \in Z^t\}$ i wyceniają ją przez zdyskontowaną oczekiwaną funkcję użyteczności:

$$U(C)(z^t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{z^{t+j} \in Z^{t+j}} \delta^j U(C_{t+j}(z^{t+j})) \pi(z^{t+j}|z^t), \quad (129)$$

³¹ Łańcuch Markowa definiujemy za Sargentem, Ljunqvistem (2004).

Proces stochastyczny $\{x_t\}$ ma własność Markowa, jeżeli dla każdego $k \geq 1$ i dla każdego t zachodzi: $Pr(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k}) = Pr(x_{t+1} | x_t)$.

Zakładając własność Markowa, definiujemy łańcuch Markowa przez trójkę: n -wymiarową przestrzeń stanów, macierz przejścia Π o wymiarach $n \times n$, która przechowuje prawdopodobieństwa przejścia od stanu do stanu w czasie jednego okresu, $n \times 1$ wymiarowy wektor π_0 , którego i -ty element jest prawdopodobieństwem bycia w stanie i w okresie 0.

gdzie $\delta \in (0,1)$ jest stałym czynnikiem dyskontującym. Funkcja użyteczności jest typu RRA:

$$U(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma}, 1 < \gamma < \infty, \quad (130)$$

Zakładamy w problemie planowania, że agent nie może wycofać się z podziału wspólnego ryzyka i zatem musi wymieniać bogactwo³², co oznaczamy warunkiem:

$$U(C^i)(z') \geq u(e^i)(z'), \forall z' \geq 0, z' \in Z', i = 1, 2. \quad (131)$$

Optymalna alokacja jest opisana jako proces, $\{C^i\}$, $i = 1, 2$, który maksymalizuje oczekiwaną użyteczność agenta 1. przy warunkach danych przez oczekiwaną obiecaną użyteczność (*promised utility*) agenta 2. Rekursywna formuła optymalnej alokacji jest dana przez:

$$TV(w, z, e) = \max_{C^1, C^2, \{w_{z'}\}} u(C_1) + \delta \sum_{z' \in Z} V(w_{z'}, z', e') \pi(z'|z), \quad (132)$$

przy warunkach

$$C^1 + C^2 \leq e \quad (133)$$

$$u(C^2) + \delta \sum_{z' \in Z} w_{z'} \pi(z'|z) \geq w \quad (134)$$

$$V(w_{z'}, z', e') \geq U^1(z', e'), \forall z' \in Z \quad (135)$$

$$w_{z'} \geq U^2(z', e'), \forall z' \in Z, \quad (136)$$

gdzie prymy oznaczają wartości w następnym okresie, $V(w, z, e)$ jest funkcją wartościującą agenta 1., w jest obiecaną w danym okresie użytecznością agenta 2., $w_{z'}$ jest obiecaną użytecznością dla agenta 2. jeżeli w następnym okresie stany natury opisane są przez z' oraz warunki (135) i (136) są ograniczeniami na udział w wymianie odpowiednio dla agenta 1 i 2.

3.3.2. Ceny aktywów

W kontekście poprzednio zbudowanych ograniczeń na wymianę wprowadzimy ceny aktywów. Jeżeli rynki są kompletne, to istnieje dokładnie jednookresowy instrument Arrowa-Debreu, dający prawo do jednostki konsumpcji przechodząc od stanu z do stanu z' . Jego cenę oznaczmy przez $q(z', z)$. Oznaczmy przez $a_{z'}^i$ portfel złożony z instrumentu Arrowa-Debreu i przez $B^i(z', z)$ oznaczmy minimalną pozycję, jaką agent i może zająć w instrumencie Arrowa-Debreu, jeżeli stan w następnym okresie jest z' i w obecnym okresie z .

Problem gospodarstwa domowego określimy jako maksymalizację funkcji:

$$H^i(a, z) = \max_{C, \{a_{z'}\}_{z' \in Z}} u(C) + \delta \sum_{z' \in Z} H^i(a_{z'}, z') \pi(z'|z) \quad (137)$$

³² Dokładniejsze konsekwencje tego faktu opisuje Seppälä (2000), str. 11.

przy warunkach:

$$a_{z'} \geq B^i(z', z), \forall z' \in Z \quad (138)$$

$$\max_{z' \in Z} q(z', z) + C \leq a + e^i(z). \quad (139)$$

Równowagę możemy zdefiniować jako zbiór $\{B_t^i, q_t, C_t^i, a_{t+1}^i\}$ taki, że:

1. Biorąc B_t^i oraz q_t jako dane, zbiór alokacji rozwiązuje problem optymalizacyjny dla dwóch agentów.

2. Rynek się oczyszcza:

$$a^1(z^{t+1}) + a^2(z^{t+1}) = 0, \forall t \geq 0, \forall z^{t+1} \in Z^{t+1}. \quad (140)$$

3. Jeżeli warunki na B_t^i są związane, to użyteczność równa się użyteczności bez wymiany:

$$H^i(B_{t+1}^i(z^{t+1}), z^{t+1}) = U^i(e^i)(z^{t+1}), \forall t \geq 0, \forall z^{t+1} \in Z^{t+1}. \quad (141)$$

W modelach wyceny aktywów jak ten, cena aktywa jest równa krańcowej stopie substytucji konsumpcji. Ponieważ instrument Arrowa-Debreu daje prawo do jednostki konsumpcji, dlatego cena takiego instrumentu z okresu t na $t + 1$ jest dana przez:

$$q(z^{t+1}, z^t) = \max_{i=1,2} \delta \frac{U^i(C_{t+1}^i)}{U^i(C_t^i)} \pi(z^{t+1}|z^t). \quad (142)$$

$Q(z^{t+j}, z^t)$ jest ceną instrumentu Arrowa-Debreu ze stanu z_t do stanu z_{t+j} , która jest dana przez:

$$q(z^{t+j}, z^t) = \prod_{k=t}^{t+j-1} q(z^{k+1}, z^k). \quad (143)$$

Zatem ceny aktywów w tym modelu całkowicie uzależniliśmy od funkcji użyteczności agentów oraz stochastycznego łańcucha Markowa.

3.3.3. Premia za ryzyko i premia za okres

Na ceny instrumentów wolnych od ryzyka nie wpływa postać łańcucha Markowa. Jeżeli stochastyczny czynnik dyskontujący jest dany przez:

$$M_{t+1} \equiv \max_{i=1,2} \delta \frac{U^i(C_{t+1}^i)}{U^i(C_t^i)} \quad (144)$$

to cena n -okresowej obligacji będzie dana przez:

$$P_{n,t} = E_t \left[\prod_{s=1}^n M_{t+s} \right] = E_t [M_{t+1} P_{n-1,t+1}], \quad (145)$$

co jest rekursywnym zapisem równania (109). Jednookresową stopę forward i stopę do wykupu na kontrakcie forward można zapisać w powyższej notacji odpowiednio jako:

$$f_t^{(n \rightarrow n+1)} = -(p_{n+1,t} - p_{n,t}) \quad (146)$$

oraz

$$y_t^{(n \rightarrow n+1)} = -\frac{1}{n}(p_{n+1,t} - p_{n,t}), \quad (147)$$

gdzie małe litery oznaczają przejście do logarytmów.

Aby znaleźć wzór na premię za ryzyko zacznijmy od równania (145) zapisanego dla okresów 1 i 2:

$$P_{2,t} = E_t[M_{t+1}P_{1,t+1}] = E_t[M_{t+1}]E_t[P_{1,t+1}] + Cov_t[M_{t+1}, P_{1,t+1}] = P_{1,t}E_t[P_{1,t+1}] + Cov_t[M_{t+1}, P_{1,t+1}], \quad (148)$$

co daje wzór na cenę kontraktu forward:

$$F_{1,t} = \frac{P_{2,t}}{P_{1,t}} = E_t[P_{1,t+1}] + Cov_t[M_{t+1}, P_{1,t+1}]. \quad (149)$$

Premia za ryzyko dla jednookresowego kontraktu forward, $rp_{1,t}$, dana jest zatem przez:

$$rp_{1,t} \equiv Cov_t[M_{t+1}, \frac{P_{1,t+1}}{P_{1,t}}] = F_{1,t} - E_t[P_{1,t+1}]. \quad (150)$$

Znaleźliśmy zatem wzór na premię za ryzyko za wejście w kontrakt forward określony jako kowariancja pomiędzy stochastycznym czynnikiem dyskontującym a wyrażeniem

$\frac{P_{1,t+1}}{P_{1,t}}$, będącym przyrostem ceny obligacji przy wydłużeniu zapadalności o jeden okres.

Podobnie premia za ryzyko dla n -okresowego kontraktu forward wyraża się wzorem:

$$rp_{n,t} \equiv Cov_t[\prod_{s=1}^n M_{t+s}, \frac{P_{1,t+n}}{P_{1,t}}] = F_{n,t} - E_t[P_{n,t+n}]. \quad (151)$$

Dodatkowo możemy zdefiniować tzw. premię za okres trwania obligacji, którą określamy jako różnicę pomiędzy jednookresową stopą kontraktu forward i oczekiwaną jednookresową stopą zwrotu w następnym okresie, co oznaczamy jako $tp_{1,t}$:

$$tp_{1,t} \equiv f_t^{(n \rightarrow n+1)} - E_t[y_t^{(n \rightarrow n+1)}]. \quad (152)$$

Podobnie dla p -okresowego kontraktu forward mamy:

$$tp_{p,t} \equiv f_t^{(n \rightarrow n+p)} - E_t[y_t^{(n \rightarrow n+p)}]. \quad (153)$$

Rozwinęliśmy zatem metodologię zaproponowaną w rozdziale 4.2, dając formalne wzory na zmienną premię za ryzyko kontraktu forward i zmienną premię za okres trzymania obligacji, o których wcześniej tylko wspomnieliśmy.

3.4. Krzywa dochodowości i prognozowanie konsumpcji

W wyżej przedstawionych rozdziałach pokazałem, w jaki sposób różne postacie modelu CCAPM wyjaśniają zachowanie struktury terminowej stóp procentowych. Postać funkcji użyteczności i – w szczególności – proces stochastyczny dla czynnika

dyskontującego tłumaczyły kształt krzywej dochodowości, wysokość stóp forward, premii za ryzyko i premii za okres trzymania.

Z drugiej strony można ten związek przyczynowo-skutkowy odwrócić i pokazać, że wszelkie obserwacje terminowej stopy procentowej są doskonałym wskaźnikiem dla prognozowania zjawisk realnej ekonomii, czyli przede wszystkim konsumpcji i produkcji. Podstawy do takiej hipotezy są już jednak ekonometryczne i ograniczymy się tylko do głównych spostrzeżeń tej analizy zaprezentowanej w: Ferreira, Martinez, Navarro, Rubio (2003).

Przeprowadzona przez nich analiza ekonometryczna bazująca na CCAPM pokazała, że nachylenie krzywej dochodowości zaskakująco dobrze prognozuje wzrost konsumpcji. Okazuje się również, że ten wskaźnik jest nawet silniejszy od cen aktywów, które powszechnie są uznawane za predyktor koniunktury gospodarczej. Ogólne obserwacje są takie, że odwrócona krzywa dochodowości prognozuje recesję, czyli spadek w produkcji i konsumpcji, natomiast wznosząca krzywa dochodowości prognozuje ekspansję. Dzieje się tak z dwóch powodów. Po pierwsze, *spread* stopy do wykupu jest wskaźnikiem polityki monetarnej i dlatego przewiduje wpływ polityki banku centralnego na realną ekonomię. Po drugie, co związane jest z realną ekonomią, *spread* stopy do wykupu zawiera informacje o oczekiwaniach inwestorów dotyczących przyszłego wzrostu, kiedy decydują oni o optymalnym planie konsumpcji, oszczędzania i inwestycji.

4

Wnioski

W powyższej pracy przedstawiłem, w jaki sposób teoria makroekonomii i teoria finansów wyjaśniają istnienie premii akcyjnej, stopy wolnej od ryzyka oraz zmienności cen akcji w kontekście statycznym, dynamicznym z uwzględnieniem cykliczności, a także na tle ewolucyjnego procesu terminowej struktury stopy procentowej. Przedstawione powyżej równania to matematyczne formuły starające się zweryfikować stawiane i obserwowane na rynkach aktywów hipotezy. Tam, gdzie to konieczne wprowadziłem pewne podstawy do analizy ekonometrycznej modeli. Teoria powyżej przedstawiona okazuje się satysfakcjonująca dla opisu zachodzących w rzeczywistych gospodarkach procesów. Problem pojawia się w przypadku ekonometrycznej weryfikacji stawianych hipotez. O słabości empirycznej modeli CCAPM piszą Campbell i Cochrane (1999). Słabości modeli RBC są również dobrze opisane w literaturze.

Moim celem NIE było jednak doprowadzenie rachunków do tzw. rozwiązania w postaci zamkniętej (*closed form solution*), które następnie byłoby przeze mnie testowane ekonometrycznie. Takie podejście znacznie bowiem przekraczałoby ramy tej pracy. Trzeba bowiem pamiętać, że znalezienie właściwej formy ekonometrycznej modelu jest niesłychanie pracochłonnym i długotrwałym zajęciem. W każdym jednak wypadku, analiza ekonometryczna musi wychodzić od teoretycznych podstaw modelu, a te postarałem się w sposób szczegółowy i staranny przedstawić w powyższej pracy.

Odpowiedź na pytanie postawione w tytule: „Szoki w preferencjach czy w technologii?” nie jest jednoznaczna, aczkolwiek możliwa. Słabość empiryczna modeli CCAPM pokazuje, że bardzo trudno jest wyjaśnić zmienność cen akcji i instrumentów pieniężnych tylko w kontekście funkcji użyteczności (preferencji, konsumpcji, procesu dywidend, itd.). Modele RBC pozwalają znacznie wyjść poza ścisłe ramy analizy stochastycznego czynnika dyskontującego, włączając do modelu sferę produkcyjną, akumulację kapitału i rynek pracy. Empiryczna weryfikacja wyników uzyskanych dla tak skonstruowanej równowagi ogólnej daje bardziej satysfakcjonujące wyniki. Analiza struktury stopy procentowej pozwala wydłużyć horyzont, w jakim analizujemy nasze zmienne.

Analiza klasycznego modelu CCAPM uzależnia stopę wolną od ryzyka od wartości stochastycznego czynnika dyskontującego, czyli preferencji agentów zadanych funkcją użyteczności. W przypadku użyteczności potęgowej mamy zależność między

stopą zwrotu bez ryzyka a wzrostem konsumpcji. W przypadku stopy zwrotu z instrumentu z ryzykiem badamy kowariancję między zwrotem z tego instrumentu a stochastycznym czynnikiem dyskontującym oraz wzrostem konsumpcji odpowiednio dla ogólnej postaci funkcji użyteczności i użyteczności potęgowej. Analiza ta przeprowadzona zarówno dla poziomów jak i logarytmów badanych zmiennych daje satysfakcjonujące wyjaśnienie zagadki premii akcyjnej. Aparat narzędziowy jest jednak zbyt słaby, aby wyjaśnić zagadkę zmienności rynku akcji, gdyż konsumpcja i preferencje konsumpcyjne są o wiele mniej zmienne niż zwroty z aktywów z ryzykiem.

Kolejne modele próbują wyjaśnić zmienność i cykliczność rynku aktywów. Wprowadzenie analizy strumienia dywidend, który jest bardziej zmienny od konsumpcji, pozwala wyjaśnić część zmienności. Dodatkowe wyjaśnienie leży w modelu przyzwyczajęń konsumpcyjnych, który wprowadza większą wrażliwość konsumpcji na ceny aktywów bez ryzyka. Dodatkowo istnienie heterogenicznych agentów objaśnia duży zwrot z akcji dużą zmiennością konsumpcji inwestorów giełdowych, uniezależniając analizę od funkcji użyteczności reprezentatywnego agenta. W końcu zmienność i cykliczność bardzo dobrze objaśnia model nieracjonalnych zachowań, gdyż wychodzimy poza ścisłe ramy równowagi ogólnej. Nieracjonalne oczekiwania dotyczące wzrostu konsumpcji wpływają na kierunek i siłę zmian cen aktywów. Na bazie modelu RBC pokazaliśmy, że zwiększanie zwyczajowej konsumpcji silnie podnosi cenę aktywów z ryzykiem, zachowując przy tym równowagę ogólną.

Oparcie analizy zmienności cen akcji na modelu CCAPM okazało się jednak niewystarczające. Wprowadzenie zmienności i cykliczności sfery produkcyjnej, w tym produktywności kapitału i pracy, wprowadza nowe czynniki objaśniające poziom premii akcyjnej i jej zmienność. Można uniezależnić istnienie premii za ryzyko od postaci funkcji konsumpcji i uzależnić ją od szoku technologicznego oraz wzrostu ceny kapitału potrzebnego do produkcji. Dodatkowo podaliśmy konieczny warunek na istnienie możliwości zysku w lewarowanym długim zakupie kapitału, czyli wzrost produktywności kapitału. Analiza współczynnika q -Tobina pozwoliła na rozróżnienie tempa i kierunku wzrostu cen kapitału inwestycyjnego oraz cen akcji.

W końcu, badając terminową strukturę stóp procentowych, podaliśmy warunki na nachylenie krzywej dochodowości leżące w preferencjach agentów. Pokazaliśmy też na podstawie łańcucha Markowa, że ceny akcji w dynamicznym horyzoncie zależą od stopnia niepewności zadanego przez macierze przejścia od stanu do stanu oraz stochastycznego czynnika dyskontującego. Ponadto wyjaśniliśmy istnienie premii za trzymanie kontraktu forward i premii za okres trzymania obligacji.

Podsumowując, analiza funkcji użyteczności, czyli preferencji agentów w metodologii CCAPM daje pewne rezultaty wyjaśniające zagadkę premii akcyjnej i

zmienności rynku akcji oraz zachowania terminowej struktury stopy procentowej. Są one jednak daleko niewystarczające zarówno z teoretycznego, jak i empirycznego punktu widzenia. Analiza sfery produkcji za pomocą modeli RBC pozwala nam przybliżyć się do rozwiązania. Wydaje się jednak, że dopiero wspólna analiza sfery realnej ekonomii, którą zaprezentowaliśmy, jak i nominalnej, nie przedstawionej w pracy, da satysfakcjonującą odpowiedź na postawione w tytule pracy pytanie, czy szoki w konsumpcji są ważniejsze od szoków w produkcji.

5

Biografia

1. A.B. Abel (1990): *Asset Prices under habit Formation and Catching Up with the Joneses*. American Economic Review 80, s. 38-42.
2. A.B. Abel (1996): *Risk Premia and Term Premia in General Equilibrium*. Wharton School, University of Pennsylvania.
3. F. Alvarez, U.J. Jermann (2000): *Efficiency, Equilibrium and Asset Pricing with Risk of Default*. Econometrica 68, s. 775-797.
4. O.J. Blanchard, S. Fisher (1992): *Lectures on Macroeconomics*. MIT Press.
5. M. Boldrin, L.J. Christiano, J. Fisher (1995): *Asset Pricing Lessons for Modeling Business Cycles*. NBER.
6. J.Y. Campbell (1998): *Asset Prices. Consumption and Business Cycles*. NBER.
7. J. Cochrane (2000): *Asset Pricing*. McGraw-Hill.
8. J. Cochrane, J.Y. Campbell (1999): *Explaining the Poor Performance of Consumption Based Asset Pricing Model*. NBER.
9. L.J. Christiano, J. Fisher (1995): *Tobin's q and Asset Returns: Implications for Business Cycle Analysis*. NBER.
10. D. Duffie (2001): *Dynamic Asset Pricing Theory*. 3rd edition, Princeton.
11. D. Duffie, G. Constantinides (1996): *Asset Pricing with Heterogeneous Consumers*. Journal of Political Economy 104, s. 219-240.
12. L. Epstein, S. Zin, (1989): *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behaviour of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework*. Econometrica 57, s. 937-968.
13. E. Ferreira, M.I. Martinez, E. Navarro, G. Rubio (2003): *Real Activity and Yield Spreads under the CCAPM*. Preliminary Version.
14. R.E. Hall (1988): *Intertemporal Substitution in Consumption*. Journal of Political Economy 96, s. 221-273.
15. L.P. Hansen, J. Cochrane (1992): *Asset Pricing Lessons for Macroeconomics*. NBER.
16. R.E.Jr. Lucas (1978): *Asset Prices in an Exchange Economy*. Econometrica 46, s. 1429-1446.
17. R. Mehra, E.C. Prescott (1985): *The Equity Premium - A puzzle*. Journal of Monetary Economics 15(2), s. 145-161.
18. Santos, Woodford (1997): *Dynamic Asset Pricing Bubbles*. Econometrica 65.
19. T.J. Sargent, Ljunqvist (2004): *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press.
20. J. Seppala (2000): *The Term Structure of Real Interest Rates: Theory and Evidence from UK Index-linked Bonds*. Working Paper, University of Illinois at Urbana Champaign.