

MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 213

Analiza kursu walutowego
euro – dolar amerykański
z uwzględnieniem
przepływów kapitałowych

Bogdan Dobrzeński

Warszawa, grudzień 2006 r.

Składam serdeczne podziękowania mojemu promotorowi profesorowi Aleksandrowi Welfe ze Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, pod którego kierunkiem naukowym niniejsza praca powstała oraz profesor Katarinie Juselius z Uniwersytetu w Kopenhadze. Ich cenne uwagi i wskazówki dostarczyły mi inspiracji oraz istotnie wpłynęły na treść i ostateczny kształt niniejszego opracowania. Odpowiedzialność za możliwe błędy ponoszę osobiście.

Projekt graficzny:

Oliwka s.c.

Skład i-druk:

Drukarnia NBP

Wydął:

Narodowy Bank Polski
Departament Komunikacji Społecznej
00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21
tel. 022 653 23 35, fax 022 653 13 21

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2006

Materiały i Studia rozprowadzane bezpłatnie.

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: <http://www.nbp.pl>

Spis treści

Spis tabel i wykresów	4
Streszczenie.....	8
Wstęp	9
1. Teoria parytetów międzynarodowych	11
1.1. Parytety międzynarodowe	11
1.2. Przepływy kapitałowe.....	15
2. Model VEqCM.....	18
2.1. Estymacja w modelu I(1)	18
2.2. Rząd kointegracji	21
2.3. Identyfikacja struktury długookresowej	23
2.4. Identyfikacja wspólnych trendów wiodzących.....	31
2.5. Prognozowanie w modelu VEqCM.	34
3. Analiza kursu walutowego euro – dolar amerykański.....	38
3.1. Dane, oznaczenia i analiza wykresów	38
3.2. Model VEqCM.....	46
3.3. Analiza reszt w modelu VEqCM.....	48
3.4. Testy stabilności parametrów	51
3.5. Rząd kointegracji	56
3.6. Testy pewnych właściwości zmiennych modelu.....	61
3.7. Testowanie relacji kointegrujących	62
3.8. Analiza struktury długookresowej	64
3.9. Analiza impulse – response i wspólne trendy wiodące	71
3.10. Wnioski	75
Zakończenie	90
Dodatek A: Konstrukcja testów normalności rozkładu reszt	92
Dodatek B: Konstrukcja rekursywnych testów stabilności parametrów ..	95
Dodatek C: Diagramy reszt modelu	98
Dodatek D: Szeregi czasowe	102
Bibliografia	106

 Spis tabel i wykresów

Tabela 1 Test długości opóźnienia: model podstawowy	47
Tabela 2 Test długości opóźnienia: model rozszerzony	47
Tabela 3 Macierz Π dla modelu podstawowego	49
Tabela 4 Macierz $\tilde{\Pi}$ dla modelu rozszerzonego	49
Tabela 5 Testy autokorelacji reszt: model podstawowy	50
Tabela 6 Testy autokorelacji reszt: model rozszerzony	50
Tabela 7 Test wielowymiarowej normalności	50
Tabela 8 Testy normalności: model podstawowy	51
Tabela 9 Testy normalności: model rozszerzony	51
Tabela 10 Test śladu dla modelu podstawowego	57
Tabela 11 Test śladu dla modelu rozszerzonego	57
Tabela 12 Macierz β' otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu	60
Tabela 13 Macierz $\tilde{\beta}'$ otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu	60
Tabela 14 Macierz Π otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu	60
Tabela 15 Macierz $\tilde{\Pi}$ otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu	61
Tabela 16 Testy właściwości zmiennych modelu: model podstawowy	61
Tabela 17 Testy właściwości zmiennych modelu: model rozszerzony .	62
Tabela 18 Testowanie hipotez dotyczących relacji kointegrujących: model podstawowy	63
Tabela 19 Relacje równowagi: model podstawowy	63
Tabela 20 Testowanie hipotez dotyczących relacji kointegrujących: model rozszerzony	63
Tabela 21 Relacje równowagi: model rozszerzony	64
Tabela 22 Macierz β' zawierająca zidentyfikowane wektory kointegrujące	65
Tabela 23 Macierz α	65

Tabela 24 Macierz $\tilde{\beta}$ zawierająca zidentyfikowane wektory kointegrujące	67
Tabela 25 Macierz $\tilde{\alpha}$	67
Tabela 26 Zidentyfikowana macierz Π . Wektor stałej Φ'	70
Tabela 27 Zidentyfikowana macierz $\tilde{\Pi}$. Wektor stałej $\tilde{\Phi}'$	70
Tabela 28 Niezidentyfikowana macierz α_{\perp}	71
Tabela 29 Macierz $\tilde{\beta}_{\perp}$	71
Tabela 30 Macierz C dla niezidentyfikowanej macierzy α_{\perp}	72
Tabela 31 Wartości statystyki t-studenta dla macierzy C z Tabeli 30 .	72
Tabela 32 Niezidentyfikowana macierz $\tilde{\alpha}_{\perp}$	72
Tabela 33 Macierz $\tilde{\beta}_{\perp}$	73
Tabela 34 Macierz \tilde{C} dla niezidentyfikowanej macierzy $\tilde{\alpha}_{\perp}$	73
Tabela 35 Wartości statystyki t-studenta dla macierzy \tilde{C} z Tabeli 34 .	73
Tabela 36 Zidentyfikowana macierz α_{\perp}^c	74
Tabela 37 Macierz $\beta_{\perp}^{c'}$	74
Tabela 38 Macierz C dla zidentyfikowanej macierzy α_{\perp}^c	75
Tabela 39 Macierz statystyk t-studenta dla macierzy C z Tabeli 38 .	75
Tabela 40 Szeregi czasowe zastosowane w badaniu.	102
1. Wykres szeregu czasowego realnej stopy procentowej - ppp_t	39
2. Wykres szeregu czasowego przyrostów wskaźnika CPI dla strefy euro - Δpeu_t	40
3. Wykres szeregu czasowego przyrostów wskaźnika CPI w USA - Δpus_t . .	40
4. Wykres szeregu czasowego oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro - beu_t	41
5. Wykres szeregu czasowego oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA - bus_t	41
6. Wykres szeregu czasowego oprocentowania depozytu overnight (O/N) w strefie euro – oeu_t	42
7. Wykres szeregu czasowego oprocentowania depozytu overnight (O/N) w USA - ous_t	42
8. Wykres szeregu czasowego przyrostów indeksu giełdowego w strefie euro - Δseu_t	43

9. Wykres szeregu czasowego przyrostów indeksu giełdowego w USA - Δsus_t	43
10. Wykresów zmiennych ppp_t , Δdeu_t - Δdus_t , Δsus_t - Δseu_t w GIVE WIN identyfikujące możliwe relacje kointegrujące	44
11. Wykres wartości funkcji wiarygodności dla $X(t)$ oraz $R(t)$: model rozszerzony	52
12. Wykres rekursywnie obliczonych statystyk testu śladu: model podstawowy	52
13. Wykres rekursywnego testu Δ dla $X(t)$ i $R(t)$: model rozszerzony .	53
14. Wykres rekursywnego testu tau: model rozszerzony	53
15. Wykres fluktuacji wektorów własnych: model rozszerzony	54
16. Wykres testu błędów predykcji na jeden okres dla kolejnych zmiennych w postaci pełnej $X(t)$: model rozszerzony	54
17. Wykres testu błędów predykcji na jeden okres dla kolejnych zmiennych w postaci skoncentrowanej $R(t)$: model rozszerzony	55
18. Wykres testu błędów predykcji na jeden okres dla całego układu: model rozszerzony	55
19. Pierwiastki macierzy stowarzyszonej: model podstawowy	56
20. Pierwiastki macierzy stowarzyszonej: model rozszerzony	57
21. Piąta relacja kointegrująca: model podstawowy	58
22. Czwarta relacja kointegrująca: model podstawowy	58
23. Siódma relacja kointegrująca: model rozszerzony	59
24. Szósta relacja kointegrująca: model rozszerzony	59
25. Diagramy reszt w Cats in Rats dla realnego kursu walutowego dolar - euro - ppp_t	98
26. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów wskaźnika CPI w strefie euro - Δpeu_t	98
27. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów wskaźnika CPI w USA - Δpus_t	99
28. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro - beu_t	99
29. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA - bus_t	99
30. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania depozytu overnight (O/N) w strefie euro - oeu_t	100

31. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania depozytu overnight (O/N) w USA - ous_t	100
32. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów indeksu giełdowego w strefie euro - Δseu_t	100
33. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów indeksu giełdowego w USA - Δsus_t	101

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest makroekonometryczna analiza kursu walutowego euro – dolar amerykański. Na podstawie 125 miesięcznych obserwacji z okresu od stycznia 1994 r. do maja 2004 r. zbadano zależności pomiędzy kursem walutowym euro – dolar amerykański, inflacją oraz oprocentowaniem 10-letnich obligacji skarbowych i rachunku overnight odpowiednio w strefie euro i w USA. Osobno zweryfikowano hipotezę, że przepływy kapitałowe mierzone zmianami indeksów na giełdach europejskich i giełdzie w Nowym Jorku (NYSE) wpływają na zmiany kursu walutowego euro – dolar amerykański. Do analizy ekonometrycznej zastosowano model VEqCM (ang. *Vector Equilibrium Correction Model*). Obliczeń dokonano w pakietach *Cats in Rats* oraz *Give Win*. Szczególną uwagę poświęcono analizie kointegracji, identyfikacji relacji kointegrujących i wspólnych trendów wiodzących oraz analizie *impulse – response*.

Słowa kluczowe: kurs walutowy EUR – USD, przepływy kapitałowe, VEqCM, rząd kointegracji, relacje kointegrujące, wspólne trendy wiodące, analiza *impulse – response*.

JEL: F31, F32, C32, C51, C52, C53.

Wstęp

Celem niniejszej pracy jest makroekonometryczna analiza kursu walutowego euro – dolar amerykański. Ze względu na krótkie szeregi czasowe danych makroekonomicznych dla strefy euro (strefa euro zaczęła funkcjonować 1 stycznia 2002 r.) analiza fundamentów makroekonomicznych była do tej pory albo niemożliwa, albo poważnie utrudniona. Strefa euro jako jednolity obszar gospodarczy i walutowy, poprzez swą wielkość, różnorodność i mechanizmy wewnętrznej konwergencji, posiada własną dynamikę procesów makroekonomicznych, których nie można porównać z żadną pojedynczą gospodarką tworzącą strefę euro. Zależności obserwowane pomiędzy zmiennymi makroekonomicznymi największej gospodarki strefy euro – Niemiec oraz kursem walutowym marka niemiecka – dolar amerykański (np. Juselius, MacDonald (2003)) uległy zmianie i nie mogą być wykorzystane do analizy kursu walutowego euro – dolar amerykański.

Praca stanowi próbę zanalizowania zależności pomiędzy fundamentami makroekonomicznymi gospodarek strefy euro i USA a kursem walutowym euro – dolar amerykański w oparciu o próbę 125 miesięcznych obserwacji pochodzących z okresu między styczniem 1994 r. a majem 2004 r. Zmiennymi makroekonomicznymi, które zostały zastosowane w modelu są oprócz kursu walutowego euro – dolar amerykański: wskaźniki inflacji (CPI), długookresowe stopy procentowe (oprocentowanie 10-letnich obligacji skarbowych), krótkookresowe stopy procentowe (oprocentowanie rachunku overnight) wszystkie odpowiednio w strefie euro i USA. Umieszczenie tych zmiennych jest motywowane klasyczną w finansach międzynarodowych teorią parytetów międzynarodowych (np. Shapiro (2000)).

Sformułowana w latach 70. i stosowana intensywnie w badaniach ekonometrycznych w latach 80. XX wieku teoria parytetów międzynarodowych nie uwzględnia jednak przepływów kapitału pomiędzy obszarami walutowymi związanych z inwestycjami kapitałowymi, w tym szczególnie giełdowymi. Ostatnia dekada XX i początek XXI wieku to jednak szybki rozwój rynków giełdowych, szczególnie w USA, na których dzięki rozwojowi technologii mogą inwestować również podmioty zagraniczne. Praca niniejsza formułuje hipotezę, że przepływy kapitałowe pomiędzy strefą euro i USA, w tym szczególnie te związane z inwestycjami giełdowymi, wpływają na kurs walutowy euro – dolar amerykański. Hipoteza ta jest weryfikowana w dodatkowym modelu tzw. rozszerzonym, w którym oprócz

powyżej wymienionych zmiennych makroekonomicznych znajdują się zwroty z indeksów giełdowych w strefie euro i USA.

Szeregi czasowe zmiennych zastosowanych w modelu o częstotliwości miesięcznej są w większości niestacjonarne. Ponadto, część z nich może ze sobą kointegrować, czyli znajdować się w długookresowej równowadze między sobą. Najlepszym narzędziem stosowanym do analizy takich szeregów jest model VEqCM (ang. *Vector Equilibrium Correction Model*) (Engle, Granger (1987), Johansen (1988)). Szczególną uwagę poświęcono w pracy identyfikacji długookresowych relacji równowagi tzw. relacji kointegrujących pomiędzy zmiennymi, identyfikacji wspólnych trendów wiodzących oraz analizie *impulse – response*.

W rozdziale pierwszym została umieszczona teoria parytetów międzynarodowych wraz z jej rozszerzeniem na przepływy kapitałowe, motywująca dobór zmiennych makroekonomicznych do modelu kursu walutowego. W rozdziale drugim zawarta jest część teorii modelu VEqCM, która następnie wykorzystana jest w analizie empirycznej. W rozdziale trzecim znajduje się analiza empiryczna kursu walutowego euro – dolar amerykański wraz z wnioskami, wykonana w oparciu o pakiety ekonometryczne Cats in Rats oraz Give Win / PC Give. Praca została rozszerzona także o dodatki. W Dodatku A znajduje się konstrukcja zastosowanych w pracy testów normalności rozkładów reszt. W Dodatku B sformułowano konstrukcję rekursywnych testów stabilności parametrów, na podstawie których weryfikowane jest występowanie zmian strukturalnych. W Dodatku C znajdują się wygenerowane przez Cats in Rats diagramy reszt modelu. W Dodatku D umieszczone są szeregi czasowe wykorzystane w analizie empirycznej.

Teoria parytetów międzynarodowych

1.1. Parytety międzynarodowe

Parytet siły nabywczej (ang. *PPP – purchasing power parity*), jedna z najważniejszych hipotez dotyczących kursu walutowego w finansach międzynarodowych, dany jest równaniem:

$$p = p^* + s, \quad (1.1)$$

gdzie p jest logarytmem naturalnym poziomu cen w kraju, p^* jest logarytmem naturalnym poziomu cen zagranicą, s oznacza logarytm naturalny kursu walutowego spot (cena w walucie krajowej, jaką trzeba zapłacić za jednostkę waluty zagranicznej). Logarytm naturalny realnego kursu walutowego oznaczany jako ppp_t jest zdefiniowany jako odchylenie w momencie t od długookresowej równowagi zdefiniowanej równaniem (1.1):

$$ppp_t = p_t - p_t^* - s_t. \quad (1.2)$$

PPP w silnej formie zakłada stacjonarność ppp_t . Analiza szeregów czasowych kursów walutowych marka niemiecka – dolar amerykański oraz euro – dolar amerykański prowadzi jednak do wniosków, że dla krótkich prób obserwacji (kilka lat) to założenie nie jest spełnione (Froot, Rogoff (1995), Johansen, Juselius (1992), Juselius (1995), Juselius, MacDonald (2003)). Hipoteza stacjonarności może być natomiast zaakceptowana dla szeregów czasowych kursów walutowych o długości kilku dziesięcioleci i częstotliwości kwartalnej. Jest kilka istotnych powodów, dla których dostosowania ppp_t do długookresowej równowagi są bardzo wolne. Najważniejszymi z nich są: różnice we wzoście produktywności pomiędzy dwoma obszarami walutowymi, nierównowaga na rachunkach płatności i nierównowaga budżetowa (Froot, Rogoff (1995), Johansen, Juselius (2003), Juselius, MacDonald (2003)).

Z rachunków płatności wiadomo, że deficyt (nadwyżka) na rachunku bieżącym musi być zrównoważona poprzez nadwyżkę (deficyt) na rachunku kapitałowym. Dlatego zmiany nominalnego kursu walutowego wiążą się silnie z parytetem niepokrytej stopy procentowej (ang. *UIP – uncovered interest rate parity*). Warunek na UIP można zdefiniować następująco:

$$E_t(\Delta s_{t+m})/m - (i_t^m - i_t^{m*}) = 0, \quad (1.3)$$

gdzie i_t^m oznacza stopę procentową do wykupu obligacji w okresie t (ang.: yield to maturity) z okresem wykupu $t+m$, $m=k,l$, gdzie k i l oznacza odpowiednio krótki i długi okres do wykupu, E_t oznacza operator warunkowej wartości oczekiwanej względem informacji dostępnej w okresie t , Δ jest operatorem różnicy zdefiniowanym równaniem $\Delta x_{t+m} = x_{t+m} - x_t$, dla dowolnej zmiennej x i dowolnych całkowitych, dodatnich indeksów t oraz m . Badania empiryczne kursów walutowych wykazują, że odchylenie od reguły UIP ε_t zdefiniowane równaniem:

$$\varepsilon_t = \Delta s_{t+m}/m - (i_t^m - i_t^{m*}) \quad (1.4)$$

jest I(1) (Johansen, Juselius (1992), Juselius (1995), Juselius, MacDonald (2003)). Jak pokazują badania, niestacjonarność ε_t i ppp_t częściowo znosi się, to znaczy różnice w dynamice cen są równoważone przez różnice w poziomach stóp procentowych (Cumby, Obstfeld (1981), Juselius, MacDonald (2003)). Zatem zmienne ε_t i ppp_t mogą ze sobą kointegrować.

Ten fakt prowadzi do sformułowania dwóch kolejnych hipotez. Pierwsza to hipoteza oczekiwań w modelu terminowej struktury stopy procentowej. Jednym z założeń tej hipotezy jest, że długookresowa stopa procentowa jest średnią ważoną dzisiejszej i oczekiwanych przyszłych krótkookresowych stóp procentowych (Cochrane (2000)). Warunek ten można zdefiniować równaniem:

$$i_t^l - \sum_{i=0}^l \alpha_i E_t i_{t+i}^{i+1} = 0, \quad (1.5)$$

gdzie α_i , $i=0,1,\dots,l$ takie, że $\sum_{i=0}^l \alpha_i = 1$ są wagami. Wnioskiem płynącym z hipotezy oczekiwań powinna być stacjonarność spreadu terminowego (ang. *TS – term spread*) stopy procentowej ts_t zdefiniowanego równaniem:

$$ts_t = i_t^l - i_t^k. \quad (1.6)$$

Badania empiryczne pokazują jednak, że spread terminowy ts_t jest I(1) (Campbell (1995), Campbell (1998)).

Druga ze wspomnianych hipotez to dekompozycja Fishera (ang. *Fisher decomposition*) nominalnych stóp procentowych na realne stopy procentowe i oczekiwaną inflację:

$$i_t^m = r_t^m + E_t((\Delta p_{t+m})/m), \quad (1.7)$$

gdzie r_t^m oznacza realną stopę procentową. Sformułowanie równania (1.7) kolejno dla $m=l, k$ i odjęcie stronami prowadzi do wzoru na spread terminowy nominalnej stopy procentowej:

$$i_t^l - i_t^k = r_t^l - r_t^k + E_t((\Delta p_{(t+k)+(l-k)})/(l-k)). \quad (1.8)$$

Na podstawie równania (1.8) niestacjonarność spreadu terminowego nominalnej stopy procentowej jest równoważna niestacjonarności oczekiwanej inflacji lub niestacjonarności spreadu realnej stopy procentowej. Badania empiryczne wykazują, że oczekiwana inflacja jest I(1), natomiast spread realnej stopy procentowej w długim okresie jest stacjonarny (Cumby, Obstfeld (1981));

Ostatnim rozważanym parytetem jest międzynarodowy parytet realnej stopy procentowej (ang. *CCRIP – cross currency real interest rate parity*):

$$r_t^m - r_t^{m*} = i_t^m - i_t^{m*} - E_t((\Delta p_{t+m} - \Delta p_{t+m}^*)/m). \quad (1.9)$$

Z działań przeprowadzonych na równaniu (1.3) sformułowanym kolejno dla $m=k, l$ otrzymuje się:

$$(i_t^l - i_t^{l*}) - (i_t^k - i_t^{k*}) = E_t((\Delta s_{(t+k)+(l-k)})/(l-k)). \quad (1.10)$$

Natomiast dokonując przekształceń równania (1.8) sformułowanego dla zmiennych w kraju i zmiennych za granicą otrzymuje się:

$$(i_t^l - i_t^{l*}) - (i_t^k - i_t^{k*}) = (r_t^l - r_t^{l*}) - (r_t^k - r_t^{k*}) + E_t((\Delta(p - p^*)_{(t+k)+(l-k)})/(l-k)) \quad (1.11)$$

Jeżeli spread pomiędzy inflacją w kraju i zagranicą jest niestacjonarny, to spread krzyżowy krótkookresowych i długookresowych nominalnych stóp procentowych w kraju i zagranicą też jest niestacjonarny. Ponadto na podstawie równania (1.8), przyrosty nominalnego kursu walutowego również są wówczas niestacjonarne. Jeżeli spread krzyżowy krótkookresowych i długookresowych realnych stóp procentowych w kraju i zagranicą $(r_t^l - r_t^{l*}) - (r_t^k - r_t^{k*})$ jest stacjonarny to równanie (1.11) można sformułować w postaci:

$$(i_t^l - i_t^{l*}) - (i_t^k - i_t^{k*}) = E_t((\Delta(p - p^*)_{(t+k)+(l-k)})/(l-k)) + \xi_t, \quad (1.12)$$

gdzie ξ_t jest stacjonarnym składnikiem losowym.

Niestacjonarność zmiennej ppp_t w równaniu (1.2) została wyjaśniona wolnym dostosowaniem ppp_t do stanu długookresowej równowagi. Na tej podstawie można sformułować hipotetyczne relacje dostosowania (ang. *adjustment relations*) dla nominalnego kursu walutowego:

$$E_t \Delta s_{t+m} = \omega_1 E_t (\Delta(p - p^*)_{t+m}) + \omega_2 E_t ppp_{t+m} + \zeta_t, \quad (1.13)$$

w którym oczekiwana nominalna deprecjacja (aprecjacja) jest uzależniona od spreadu oczekiwanej inflacji i oczekiwanej realnej aprecjacji (deprecjacji) odpowiednio z wagami ω_1 , ω_2 nazywanymi współczynnikami dostosowania (ang. *adjustment coefficients*), ζ_t jest składnikiem losowym (Juselius, MacDonald (2003)). Po zamianie indeksów równanie (1.13) przyjmuje postać:

$$E_t \Delta s_{(t+k)+(l-k)} = \omega_1 E_t (\Delta(p - p^*)_{(t+k)+(l-k)}) + \omega_2 E_t ppp_{t+l} + \zeta_t, \quad (1.14)$$

Podstawiając równanie (1.10) do równania (1.14) otrzymuje się następującą tożsamość:

$$(i_t^l - i_t^{l*}) - (i_t^k - i_t^{k*}) = \bar{\omega}_1 E_t (\Delta(p - p^*)_{(t+k)+(l-k)}) + \bar{\omega}_2 E_t ppp_{t+l} + \bar{\zeta}_t, \quad (1.15)$$

gdzie $\bar{\omega}_1 = \omega_1 / (l - k)$, $\bar{\omega}_2 = \omega_2 / (l - k)$, $\bar{\zeta}_t = \zeta_t / (l - k)$.

Można oczekiwać, że niektóre zmienne w równaniu (1.15) będą ze sobą kointegrować. Operator wartości oczekiwanej nie wpływa na stopień zintegrowania zmiennych, ani na kointegrację między nimi, jeżeli spełniony jest poniższy warunek:

- (i) proces $(E_t x_{t+m} - x_{t+m})_t$ jest stacjonarny.

Ponadto, zachodzi wówczas tożsamość $x_{t+m} = E_t x_{t+m} + \xi_t$, gdzie ξ_t jest składnikiem losowym (Juselius (2003)). Podobnie, jeżeli spełniony jest poniższy warunek:

- (ii) proces $(\Delta x_{t+m})_t$ jest stacjonarny

to długość m operatora różnicy nie wpływa na stopień zintegrowania zmiennych i zachodzi równanie $\Delta x_{t+m} = \Delta x_{t+1} + \xi_t$, gdzie ξ_t jest składnikiem losowym.

Jeżeli spełnione są warunki (i) oraz (ii), na podstawie równania (1.15) można sformułować następującą zależność pomiędzy dysparytetem długookresowej stopy procentowej, spreadem inflacyjnym, realnym kursem walutowym oraz spreadem krótkookresowej stopy procentowej:

$$i_t^l - i_t^{l*} = \beta_1 (\Delta(p - p^*)_{t+1}) + \beta_2 ppp_t + \beta_3 (i_t^k - i_t^{k*}) + \varepsilon_t, \quad (1.16)$$

gdzie ε_t jest stacjonarnym składnikiem losowym, β_1 , β_2 , β_3 są nowymi współczynnikami dostosowania. Zmiennymi, które na podstawie analizy parytetów międzynarodowych należy umieścić w modelu są: logarytm realnego kursu walutowego ppp_t , długo- i krótkookresowe stopy procentowe w kraju i zagranicą: i_t^l , i_t^{l*} , i_t^k , i_t^{k*} oraz wskaźniki inflacji w kraju i zagranicą Δp_{t+1} , Δp_{t+1}^* .

Niektóre prace analizujące kursy walutowe zamiast PPP uwzględniają efekt Ballasy – Samuelsona (np. Egert, *et al* (2003)). Jest on silnie obserwowany dla kursów walutowych pomiędzy walutami gospodarki rozwiniętej i gospodarki rozwijającej się. Można jednak założyć, że efekt Ballasy – Samuelsona nie występuje dla strefy euro i USA, czyli obszarów walutowych o podobnym potencjale gospodarczym i efektywności pracy.

1.2. Przepływy kapitałowe

Przepływy kapitałowe to zakupy waluty zagranicznej w celu dokonania inwestycji giełdowych lub rzeczowych zagranicą (ang. *capital flows*, *stock flows*). Uwzględnienie przepływów kapitałowych w modelu (1.16) pozwoli włączyć dodatkowe, nieuwzględnione w teoriach parytetów międzynarodowych, źródło przepływów pieniężnych pomiędzy dwoma obszarami walutowymi, wpływające istotnie na kurs walutowy.

Jednym ze sposobów uwzględnienia przepływów kapitałowych do analizy kursów walutowych jest włączenie do modelu kursu walutowego salda obrotów kapitałowych z rachunku płatności (np. Egert, *et al* (2004)). Takie podejście jest uzasadnione w przypadku badania kursu walutowego pomiędzy dużą gospodarką i małą gospodarką, ponieważ na mało płynnym rynku walutowym każde zmiany w pozycjach rachunku płatności znajdują swe odzwierciedlenie w poziomie kursu walutowego. Dolar amerykański i euro pełnią jednak funkcję waluty rezerwowej dla banków centralnych, dlatego strefa euro i USA mogą utrzymywać przez długi okres wysoki deficyt na rachunku obrotów bieżących bez znaczących konsekwencji dla poziomu kursu walutowego. W przypadku tych gospodarek poziomy stóp procentowych, wskaźniki giełdowe i poziom cen szybciej niż pozycje rachunku płatności reagują na zmiany makroekonomiczne i przede wszystkim oczekiwania dotyczące przyszłych danych makroekonomicznych. Dodatkowo, na podstawie analizy wysokości stóp procentowych, dynamiki wzrostu indeksów giełdowych, czy dynamiki wzrostu cen podejmowane są decyzje dotyczące zakupu lub sprzedaży waluty na rynkach finansowych. Pozycje rachunku płatności mogą zatem nie objaśniać zmienności kursu walutowego euro – dolar amerykański.

Lepszą metodą uwzględnienia przepływów kapitałowych w modelu kursu walutowego (1.16) opartego na parytetach międzynarodowych jest włączenie wskaźników giełdowych w kraju i zagranicą. Sformułowaniu zależności pomiędzy wskaźnikami giełdowymi a zmiennymi z równania (1.16) posłuży teoria zagadki premii akcyjnej (ang.:

equity premium puzzle) (Mehra, Prescott (1985)). Zagadka premii akcyjnej to obserwacja, że w długim okresie oczekiwany zwrot z inwestycji w akcje jest znacznie wyższy niż oczekiwany zwrot z inwestycji w obligacje. Tę zależność można sformułować w postaci równania:

$$E_t i_t^l = E_t(\Delta eq_{t+l}/l) - ep_t^l, \quad (1.17)$$

gdzie eq_t oznacza logarytm naturalny indeksu giełdowego, ep_t^l oznacza premię akcyjną pomiędzy momentami t i $t+l$. Premia akcyjna jest z definicji różnicą pomiędzy oczekiwanym zwrotem z inwestycji w akcje i oczekiwanym zwrotem z inwestycji w obligacje: $ep_t^l = E_t(\Delta eq_{t+l}/l) - E_t i_t^l$.

Zagadka zmienności cen akcji i obligacji (ang.: equity - bond volatility puzzle) to z kolei obserwacja, że zmienność cen akcji jest znacznie wyższa od zmienności cen obligacji (Campbell (1998), Dobrzeniecki (2005)). Dodatkowo z obserwacji empirycznych wynika, że ceny akcji eq_t oraz premia akcyjna ep_t są I(1) (Campbell (1998), Campbell, Cochrane (1999)). Zwroty z akcji Δeq_{t+l} są zatem stacjonarne.

Zakładając, że spełniony jest warunek (i) z rozdziału 1.1 równanie (1.17) przyjmuje postać:

$$i_t^l = \Delta eq_{t+l}/l - ep_t^l + \xi_t. \quad (1.18)$$

Równanie (1.18) można sformułować podobnie dla zagranicy:

$$i_t^{l*} = \Delta eq_{t+l}^*/l - ep_t^{l*} + \bar{\xi}_t. \quad (1.19)$$

Ponieważ premia akcyjna jest z definicji różnicą pomiędzy zwrotem z inwestycji w akcje a zwrotem z inwestycji w obligacje, więc dla równań (1.18) i (1.19) można sformułować następujące relacje dostosowania:

$$i_t^l = \omega_1(\Delta eq_{t+l}/l) + \xi_t, \quad (1.20)$$

$$i_t^{l*} = \bar{\omega}_1(\Delta eq_{t+l}^*/l) + \bar{\xi}_t. \quad (1.21)$$

Odejmując stronami równania (1.20) i (1.21) otrzymuje się:

$$i_t^l - i_t^{l*} = \omega((\Delta(eq - eq^*))_{t+l}/l) + \hat{\xi}_t, \quad (1.22)$$

gdzie $\hat{\xi}_t$ jest nowym składnikiem losowym, a ω nowym współczynnikiem dostosowania. Zakładając, że spełniony jest warunek (ii) z rozdziału 1.1 równanie (1.22) można sformułować w postaci:

$$i_t^l - i_t^{l*} = \omega(\Delta(eq - eq^*))_{t+l} + \hat{\xi}_t. \quad (1.23)$$

Na podstawie równań (1.16) i (1.23) otrzymuje się zatem nową zależność pomiędzy spreadem długookresowej stopy procentowej a spreadem inflacyjnym, spreadem krótkookresowej stopy procentowej, spreadem zwrotów z akcji oraz realnym kursem walutowym:

$$i_t^l - i_t^* = \alpha_1(\Delta(p - p^*)_{t+1}) + \alpha_2(i_t^k - i_t^{k*}) + \alpha_3(\Delta(eq - eq^*)_{t+1}) + \alpha_4 ppp_t + \xi_t, \quad (1.24)$$

gdzie α_1 , α_2 , α_3 , α_4 są nowymi współczynnikami dostosowania, ξ_t jest składnikiem losowym. Zmiennymi mierzącymi siłę przepływów kapitałowych, o które zostanie rozszerzony model kursu walutowego oparty o parytety międzynarodowe (1.16) są względne przyrosty indeksów giełdowych w kraju i zagranicą: Δeq_t i Δeq_t^* .

2 Model VEqCM

2.1 Estymacja w modelu I(1)

Model VEqCM ma postać:

$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta x_{t-k+1} + \Pi x_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

gdzie $\Delta x_t, \Delta x_{t-1}, \Delta x_{t-2}, \dots, \Delta x_{t-k+1}, x_{t-1}$ są wektorami zmiennych długości p ; D_t jest wektorem komponentów deterministycznych długości m ; $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k-1}, \Pi$ są macierzami parametrów o wymiarze $p \times p$; Φ jest macierzą parametrów o wymiarze $p \times m$; ε_t jest wektorem składników losowych długości p , $t = 1, \dots, T$ (Welfe (1998)).

Jeżeli zmienne w wektorze x_{t-1} są $I(1)$ to właściwe estymatory parametrów macierzy Π otrzymuje się w wyniku estymacji zredukowanego rzędu (ang. *reduced rank estimation*). Macierz Π ma wtedy rząd r , $0 < r < p$. Macierz Π można wówczas przedstawić w postaci: $\Pi = \alpha\beta'$, gdzie α, β są macierzami wymiaru $p \times r$, $0 < r < p$. Równanie (2.1) ma zatem postać:

$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta x_{t-k+1} + \alpha\beta' x_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad (2.2)$$

gdzie $\beta' x_{t-1}$ jest wektorem r stacjonarnych relacji kointegrujących (ang. *cointegrating relations*).

Poniżej zostanie zaprezentowana procedura estymacji parametrów w modelu (2.2). Równanie (2.2) można zapisać w skróconej postaci:

$$Z_{0t} = \alpha\beta' Z_{1t} + \Psi Z_{2t} + \varepsilon_t, \quad (2.3)$$

gdzie $Z_{0t} = \Delta x_t$, $Z_{1t} = x_{t-1}$, $Z_{2t} = [\Delta x_{t-1}, \Delta x_{t-2}, \dots, \Delta x_{t-k+1}, D_t]$, $\Psi = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k-1}, \Phi]$.

Ponieważ zmienne w Z_{1t} są $I(1)$, do estymacji parametrów modelu (2.3) zastosowany zostanie następujący algorytm Frischa-Waughy (Juselius (2003)). Oszacowanie parametru $\beta_{2,1}$ w jednorównaniowym modelu regresji $y_t = \beta_{1,1} x_{1t} + \beta_{2,1} x_{2t} + \varepsilon_t$ odbywa się w następujących krokach:

- 1a. Dokonując regresji y_t względem x_{1t} otrzymuje się reszty u_{1t} zgodnie ze wzorem: $y_t = \hat{b}_1 x_{1t} + u_{1t}$;

- 1b. Dokonując regresji x_{2t} względem x_{1t} otrzymuje się reszty u_{2t} zgodnie ze wzorem $x_{2t} = \hat{b}_2 x_{1t} + u_{2t}$;
2. Dokonując regresji u_{1t} względem u_{2t} otrzymuje się estymatory $\beta_{2,1}$ zgodnie ze wzorem $u_{1t} = \beta_{2,1} u_{2t} + u_{3t}$. Jest to model skoncentrowany (ang. *concentrated model*).

Stosując powyższy algorytm dla modelu wielorównaniowego (2.3) dokonuje się regresji pomocniczych (ang. *auxiliary regressions*):

$$Z_{0t} = \hat{B}'_1 Z_{2t} + R_{0t},$$

$$Z_{1t} = \hat{B}'_2 Z_{2t} + R_{1t},$$

gdzie \hat{B}'_1 , \hat{B}'_2 są estymatorami największej wiarygodności. Model skoncentrowany ma zatem postać:

$$R_{0t} = \alpha \beta' R_{1t} + R_{2t}. \quad (2.4)$$

Model skoncentrowany został pozbawiony oddziaływań krótkookresowych oraz komponentów deterministycznych. W równaniu (2.4) można opuścić R_{2t} i pomnożyć obie strony przez $R'_{1t} \beta$:

$$R_{0t} R'_{1t} \beta = \alpha \beta' R_{1t} R'_{1t} \beta$$

$$S_{01} \beta = \alpha \beta' S_{11} \beta,$$

gdzie $S_{ij} = T^{-1} \sum_t R_{it} R'_{jt}$. Można teraz znaleźć estymator α jako funkcję β :

$$\hat{\alpha}(\beta) = S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1}. \quad (2.5)$$

Wykorzystany zostanie fakt, że maksymalna wartość funkcji wiarygodności jest równa z dokładnością do stałej normie macierzy kowariancji reszt zależnej od α i β (Johansen (1996)):

$$L_{\max}^{-2/T}(\beta, \alpha) = |\hat{\Omega}(\beta, \alpha)| + const., \quad (2.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(\beta, \alpha) &= T^{-1} \sum_t (R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})(R_{0t} - \alpha \beta' R_{1t})' = \\ &= T^{-1} \left(\sum_t R_{0t} R'_{0t} - \sum_t R_{0t} R'_{1t} \beta \alpha' - \alpha \beta' \sum_t R_{1t} R'_{0t} + \alpha \beta' \sum_t R_{1t} R'_{1t} \beta \alpha' \right) = \\ &= S_{00} - S_{01} \beta \alpha' - \alpha \beta' S_{10} + \alpha \beta' S_{11} \beta \alpha'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aby otrzymać macierz kowariancji reszt jako funkcję β wystarczy podstawić (2.5) do (2.7):

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}(\beta) &= S_{00} - S_{01}\beta(\beta'S_{11}\beta)^{-1}\beta'S_{10} - S_{01}\beta(\beta'S_{11}\beta)^{-1}\beta'S_{10} + \\ &+ S_{01}\beta(\beta'S_{11}\beta)^{-1}\beta'S_{11}\beta(\beta'S_{11}\beta)^{-1}\beta'S_{10} = \\ &= S_{00} - S_{01}\beta(\beta'S_{11}\beta)^{-1}\beta'S_{10}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Należy teraz znaleźć taką wartość $\beta = \hat{\beta}$, dla której wartość $|\hat{\Omega}(\hat{\beta})|$ będzie minimalna. W tym celu zostanie wykorzystana następujący fakt z rachunku macierzowego (Johansen (1996)):

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C - B'A^{-1}B| = |C| \cdot |A - BC^{-1}B'|,$$

gdzie A, B, C są macierzami kwadratowymi. W przypadku macierzy (2.8) należy dokonać przyporządkowania: $S_{00} = A$, $\beta'S_{11}\beta = C$, $S_{01}\beta = B$, co daje:

$$\begin{aligned} |S_{00}| \cdot |\beta'S_{11}\beta - \beta'S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\beta| &= |\beta'S_{11}\beta| \cdot |S_{00} - S_{01}\beta(\beta'S_{11}\beta)^{-1}\beta'S_{10}| = |\beta'S_{11}\beta| \cdot \hat{\Omega}(\beta), \\ \hat{\Omega}(\beta) &= |S_{00}| \frac{|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta|}{|\beta'S_{11}\beta|}.\end{aligned}$$

Wykorzystując następnie fakt, że funkcja:

$$f(X) = \frac{|X'MX|}{|X'NX|}$$

jest maksymalizowana przez znalezienie pierwiastków charakterystycznych wielomianu charakterystycznego $|\rho N - M| = 0$, nazywane dalej rozwiązaniem zadania wartości własnej (ang. *eigenvalue problem*), wykonane zostanie podstawienie: $M = S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$, $N = S_{11}$, $X = \beta$:

$$\begin{aligned} |\rho S_{11} - S_{11} + S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}| &= 0, \\ |(1 - \rho)S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}| &= 0.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Przyjmując $\lambda = 1 - \rho$ rozwiązanie równania (2.9) daje p wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Normę macierzy kowariancji reszt można zatem wyrazić następująco:

$$|\hat{\Omega}(\hat{\beta})| = |S_{00}| \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i).\quad (2.10)$$

Uporządkowanym malejąco wartościom własnym $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_p \geq 0$ odpowiada p wektorów własnych V_1, V_2, \dots, V_p . Wielkość $\hat{\lambda}_i$ jest miarą siły stacjonarności odpowiedniej relacji kointegrującej $V_i'x_t$. Im większa wartość własna $\hat{\lambda}_i$ tym silniejsza stacjonarność, wartości własne $\hat{\lambda}_i$ bliskie zero świadczą o braku stacjonarności danej relacji (Juselius

(2003)). Wektory $\hat{\beta}_i$, $i = 1, \dots, r$ macierzy $\hat{\beta}$ otrzymuje się przez normalizację wektorów własnych V_i odpowiadających r największym wartościom własnym $\hat{\lambda}_i$. Procedura normalizacji wektorów własnych, pominięta w pracy, znajduje się w (Johansen (1996)).

2.2 Rząd kointegracji

Redukcję rzędu macierzy $\Pi = \alpha\beta'$, to znaczy znalezienie takiego r nazywanego rzędem kointegracji (ang. *cointegration rank*), dla którego relacje $\beta'x_t$ są kointegrujące i stacjonarne otrzymuje się na podstawie testu śladu (ang.: *trace test*) nazywanego też testem współczynnika wiarygodności (ang. *likelihood ratio test*). Test śladu oparty jest o model VEqCM w formie skoncentrowanej (2.4). Na podstawie równań (2.6) i (2.10) funkcja wiarygodności przyjmuje postać:

$$-2 \ln L(\beta) = T \ln |S_{00}| + T \sum_{i=1}^p \ln(1 - \lambda_i).$$

Wartości własne interpretuje się jako kwadrat współczynnika korelacji pomiędzy kombinacją liniową $\beta'_i R_{1,t-1}$ i pewną kombinacją liniową $\omega'_i R_{0t}$. W tym sensie wielkość λ_i pokazuje jak silnie wektor $\beta'_i R_{1,t-1}$ jest skorelowany z wektorem stacjonarnym R_{0t} (Juselius (2003)). Jeżeli $\lambda_i = 0$ to kombinacja liniowa $\beta'_i R_{1,t-1}$ jest niestacjonarna i mechanizm korekty błędem (ang. *error correction mechanism*) w kierunku stanu równowagi zawarty w macierzy α nie zachodzi, tzn. $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, r$. Test śladu służy odróżnieniu tych λ_i , $i = 1, \dots, r$, które odpowiadają relacjom kointegrującymi od tych λ_i , $i = r + 1, \dots, p$, którym odpowiadają relacje niestacjonarne. Ponieważ zerowe wartości własne nie zmieniają wartości funkcji wiarygodności, dlatego można ją zapisać jako:

$$L^{-2/T} = |S_{00}| \cdot \prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i).$$

Test śladu opiera się na weryfikacji następujących hipotez:

$H^0(p)$: rząd kointegracji jest równy p , nie ma pierwiastków jednostkowych (ang. *unit roots*), x_t jest stacjonarny;

$H^1(r)$: rząd kointegracji jest równy r , istnieje $p - r$ pierwiastków jednostkowych, r relacji kointegrujących, x_t jest niestacjonarny.

Funkcja wiarygodności dla takiego zespołu hipotez jest postaci:

$$L^{-2/T}(H_r / H_p) = \frac{|S_{00}|(1-\hat{\lambda}_1)\dots(1-\hat{\lambda}_r)}{|S_{00}|(1-\hat{\lambda}_1)\dots(1-\hat{\lambda}_r)\dots(1-\hat{\lambda}_p)} = \frac{1}{(1-\hat{\lambda}_{r+1})\dots(1-\hat{\lambda}_p)}$$

Weryfikacja hipotez odbywa się przez porównanie statystyki testowej:

$$\tau_{p-r} = -T \sum_{i=r+1}^p \ln(1-\hat{\lambda}_i)$$

z odpowiednią wartością krytyczną C_{p-r} wziętą z rozkładu asymptotycznego. Zakładając, że liczba relacji kointegrujących wynosi r^* , jeżeli $\tau_{p-r^*} > C_{p-r^*}$ to hipotezę o istnieniu $p-r^*$ pierwiastków jednostkowych należy odrzucić na rzecz hipotezy o istnieniu $p-r$ pierwiastków jednostkowych, $r > r^*$. Jeżeli natomiast $\tau_{p-r^*} < C_{p-r^*}$ to hipoteza o istnieniu $p-r^*$ pierwiastków jednostkowych jest przyjęta, ale może ich być więcej tzn. $r < r^*$.

Rozkłady asymptotyczne podawane w tabelach, służące do weryfikacji statystyk testowych są poprawne tylko w przypadku modelu skoncentrowanego, pozbawionego komponentów deterministycznych typu trend liniowy lub przesunięcia (ang. *shifts*). Dlatego zwykle moc testu śladu nie jest decydująca. Należy posłużyć się więc serią dodatkowych informacji przy określeniu rzędu kointegracji r (Juselius(2003)):

1. Wartości własne wielomianu charakterystycznego: dokonując regresji rzędu $r+1$ a następnie rzędu r , w przypadku, gdy $r+1$ wektor kointegrujący jest niestacjonarny, a r stacjonarny, liczba pierwiastków wielomianu charakterystycznego leżąca blisko koła jednostkowego jest mniejsza o jeden w drugim przypadku w porównaniu z pierwszym. Najlepiej zaobserwować ten fakt na podstawie wykresów macierzy pomocniczych w CATS in RATS.
2. Wykresy rekursywnie obliczonych statystyk testu śladu dla $r=1,2,\dots,p$ w CATS in RATS: ponieważ zmienna $-T_j \ln(1-\hat{\lambda}_i)$, $i=1,\dots,p$, $j=T_1,\dots,T$ rośnie liniowo w czasie jeżeli $\lambda_i \neq 0$, to rekursywnie obliczane statystyki śladu odpowiadające kolejnym wartościom własnym powinny rosnać liniowo dla $i=1,\dots,r$ oraz być stałe dla $i=r+1,\dots,p$. Szczegółowe omówienie rekursywnych testów śladu znajduje się w Dodatku B.
3. Wykresy relacji kointegrujących generowane przez CATS in RATS powinny przedstawiać proces stacjonarny dla r -tego wektora kointegrującego i proces niestacjonarny dla $r+1$ -ego wektora kointegrującego.

4. W małych układach zmiennych można zbadać ekonomiczną interpretowalność zależności kointegrujących. Dla dużych systemów, zawierających więcej niż cztery zmienne jest to praktycznie niemożliwe.

2.3 Identyfikacja struktury długookresowej

Jeżeli znany jest rząd r macierzy β , można przystąpić do identyfikacji wektorów kointegrujących (ang. *cointegrating vectors*) β_i , $1 \leq i \leq r$, które tworzą stacjonarne relacje kointegrujące $\beta_i' x_t$. Hipotezy dotyczące wektorów kointegrujących można sformułować na dwa alternatywne sposoby: albo przez wyznaczenie s_i niezwiązanych parametrów (ang. *free parameters*), albo nałożenie m_i restrykcji na β_i , $1 \leq i \leq r$. Można wyznaczyć wektory kointegrujące β_i^C w zależności od s_i niezwiązanych parametrów:

$$\beta^C = (\beta_1^C, \dots, \beta_r^C) = (H_1 \varphi_1, \dots, H_r \varphi_r),$$

gdzie φ_i jest wektorem współczynników długości s_i , H_i jest macierzą projektową (ang. *project matrix*) wymiaru $p \times s_i$, w której kolumnach umieszcza się niezwiązane parametry odpowiadające zmiennym mającym znaleźć się w β_i^C (Juselius (2003), Welfe (2000)). Podobnie można wyznaczyć macierze restrykcji (ang. *restriction matrices*) R_i wymiaru $p \times m_i$, które definiują m_i restrykcji nałożonych na β_i , $1 \leq i \leq r$:

$$\begin{aligned} R_1' \beta_1 &= 0 \\ &\vdots \\ R_r' \beta_r &= 0 \end{aligned}$$

Pomiędzy macierzami H_i i R_i zachodzi następująca zależność $R_i = H_{\perp i}$, czyli $R_i' H_i = 0$, (Juselius (2003)).

Test wyłączenia zmiennej z przestrzeni kointegrującej (ang. *test for exclusion*):

Test wyłączenia zmiennej z przestrzeni kointegrującej $\text{span}(\beta_1, \dots, \beta_r)$ nazywany jest też testem zerowego wiersza macierzy β . Jeżeli hipoteza o wyłączalności zmiennej jest przyjęta, to ta zmienna nie bierze udziału w relacjach kointegrujących z innymi zmiennymi. Nakłada się zatem jednakowe restrykcje na wszystkie β_i , $1 \leq i \leq r$ za pomocą H lub R . Testowany jest zespół hipotez:

$$H^C(r) : \beta^C = (H\varphi_1, \dots, H\varphi_r) = H\varphi$$

$$H(r) : \beta \text{ bez restrykcji, } R = 0.$$

Statystyka testu współczynnika wiarygodności służąca do testowania tego układu hipotez jest ilorzem wartości funkcji wiarygodności modelu z restrykcjami i bez restrykcji:

$$\Lambda = \frac{L_{\max}^{-2/T}(H^C(r))}{L_{\max}^{-2/T}(H(r))} = \frac{|S_{00}| \prod_{i=1}^r (1 - \hat{\lambda}_i^C)}{|S_{00}| \prod_{i=1}^r (1 - \hat{\lambda}_i)}$$

lub

$$-2 \ln \Lambda = T \sum_{i=1}^r [\ln(1 - \hat{\lambda}_i^C) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i)], \quad (2.11)$$

gdzie $\hat{\lambda}_i^C$, $1 \leq i \leq r$ to r największych wartości własnych spośród s wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ wielomianu:

$$|\lambda H' S_{11} H - H' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} H| = 0.$$

Statystyka (2.11) ma rozkład asymptotyczny $\chi^2(\nu)$, gdzie liczba swobody $\nu = rm$ wynika z nałożenia m restrykcji na r wektorów kointegrujących. Jeżeli $\hat{\lambda}_i^C$, $1 \leq i \leq r$, w wyniku nałożenia restrykcji H lub R jest równe lub bliskie zero to $\beta_i^C x_t$ staje się niestacjonarne. Jeżeli w tym przypadku macierz $\beta^C = H\varphi$ ma wiersz zerowy, to zmienna odpowiadająca temu wierszowi jest wyłączalna.

Identyfikacja s relacji kointegrujących, gdzie $1 \leq s < r$:

Najczęściej identyfikuje się relacje kointegrujące pojedynczo, stąd przyjmuje się, że $s = 1$. W tym celu macierz β dekomponuje się na macierz b wymiaru $p \times s$, której kolumny są dane i macierz bez restrykcji φ wymiaru $p \times (r - s)$ jest postaci $\beta^C = (b, \varphi)$. Testowana będzie zatem zespół hipotez:

$$H^C(r) : \beta^C = (b, \varphi)$$

$$H(r) : \beta \text{ bez restrykcji}$$

Podobnie dekomponuje się macierz $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, gdzie α_1 jest macierzą wymiaru $p \times s$, α_2 jest macierzą wymiaru $p \times (r - s)$. Model VEqCM w postaci skoncentrowanej ma zatem postać:

$$R_{0t} = \alpha_1 b' R_{1t} + \alpha_2 \varphi' R_{1t} + \varepsilon_t. \quad (2.12)$$

Stawiając hipotezę, że $b'R_t$ jest macierzą relacji kointegrujących, można ją wyłączyć z modelu i ponownie zastosować algorytm Frischa-Waugh (Rozdział 2.1):

$$\begin{aligned} R_{0t} &= \hat{B}_1 b' R_{1t} + R_{0,b,t} \\ R_{1t} &= \hat{B}_2 b' R_{1t} + R_{1,b,t} \\ R_{0,b,t} &= \alpha_2 \varphi' R_{1,b,t} + \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Model (2.13) jest formą skoncentrowaną modelu (2.12). Aby spełnić uzasadniony warunek $\varphi \notin \text{span}(b)$, należy podstawić $\varphi = b_{\perp} \psi$ (wtedy $\varphi \in \text{span}(b_{\perp})$):

$$R_{0,b,t} = \alpha_2 \psi' b_{\perp}' R_{1,b,t} + \varepsilon_t. \quad (2.14)$$

Funkcja wiarygodności modelu (2.14) ma postać:

$$L_{\max}^{-2/T} = |S_{00,b}| \prod_{i=1}^{r-s} (1 - \hat{\lambda}_i^C).$$

Można pokazać, że:

$$|S_{00,b}| = |S_{00}| \prod_{i=1}^s (1 - \hat{\rho}_i),$$

gdzie $\hat{\rho}_1 > \hat{\rho}_2 > \dots > \hat{\rho}_s > \hat{\rho}_{s+1} = \dots = \hat{\rho}_p = 0$ pochodzą z rozwiązania problemu wartości własnej:

$$|\rho S_{00} - S_{01} b (b' S_{11} b)^{-1} b' S_{10}| = 0.$$

Ostatecznie statystyka testowa ma postać:

$$\Lambda = \frac{L_{\max}^{-2/T}(H^C(r))}{L_{\max}^{-2/T}(H(r))},$$

czyli

$$-2 \ln \Lambda = T \left\{ \sum_{i=1}^s (1 - \hat{\rho}_i) + \sum_{i=1}^{r-s} (1 - \hat{\lambda}_i^C) + \sum_{i=1}^r (1 - \hat{\lambda}_i) \right\},$$

która ma rozkład $\chi^2(p-r)$, (Juselius (2003)).

Identyfikacja macierzy β , gdy nie są znane relacje kointegrujące:

W przypadku, gdy nie jest znana postać macierzy b , stosowany jest algorytm otrzymywania kolejnych wektorów kointegrujących β_i , $1 \leq i \leq r$. W celu znalezienia β_1 dekomponuje się macierz $\beta = (H_1 \varphi_1, \psi)$, gdzie H_1 jest macierzą projektową o wymiarze $p \times s_1$, φ_1 jest wektorem współczynników długości s_1 , ψ jest macierzą bez restrykcyj

wymiaru $p \times (r-1)$. Procedura testowa poszukuje najbardziej stacjonarnej kombinacji współczynników β_1 . Dana jest hipoteza zerowa:

$$H_0: \beta^C = (\beta_1^C, \beta_2) = (H_1 \phi_1, \psi),$$

wobec hipotezy alternatywnej, że β bez restrypcji

Model skoncentrowany dla takiej postaci hipotezy ma postać:

$$R_{0t} = \alpha_1 \phi_1' H_1' R_{1t} + \alpha_2 \beta_2' R_{1t} + \varepsilon_t.$$

Ponieważ żaden z wyrazów ani $\alpha_1 \phi_1' H_1' R_{1t}$, ani $\alpha_2 \beta_2' R_{1t}$ nie jest znany, więc algorytm Frischa-Waugh'a nie może zostać bezpośrednio zastosowany. Należy więc dokonać estymacji nieliniowej, zgodnie z następującym algorytmem (Juselius (2003)):

1. Przyjmuje się wartość początkową $\beta_1^C = \tilde{\beta}_1$, gdzie $\tilde{\beta}_1$ jest wystandaryzowanym wektorem własnym odpowiadającym wartości największej wartości własnej otrzymanym tak jak w Rozdziale 2.1.
2. Dla ustalonej wartości $\beta_1^C = \tilde{\beta}_1$, estymuje się $\tilde{\alpha}_2$ oraz $\tilde{\beta}_2$ w wyniku regresji zredukowanego rzędu $R_{0,\beta_1,t}$ względem $R_{1,\beta_1,t}$, gdzie $R_{0,\beta_1,t}$ i $R_{1,\beta_1,t}$ są resztami powstałymi w regresjach pomocniczych R_{0t} i R_{1t} względem $\tilde{\beta}_1' R_{1t}$ (algorytm Frischa-Waugh'a). W tym kroku otrzymuje się $\tilde{\beta}_2$ oraz $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_1)$.
3. Dla ustalonej wartości $\beta_2 = \tilde{\beta}_2$, estymuje się $\tilde{\alpha}_1$ oraz $\tilde{\phi}_1$ w wyniku regresji zredukowanego rzędu $R_{0,\beta_2,t}$ względem $H_1 R_{1,\beta_2,t}$, gdzie $R_{0,\beta_2,t}$ i $H_1 R_{1,\beta_2,t}$ są resztami powstałymi w regresjach pomocniczych R_{0t} i R_{1t} względem $\tilde{\beta}_2' R_{1t}$ (algorytm Frischa-Waugh'a). W tym kroku otrzymuje się $\tilde{\beta}_1 = H_1 \tilde{\phi}_1$ oraz $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_2)$.
4. Kroki 2 i 3 powtarza się obliczając rekursywnie $\tilde{\beta}_1$ oraz $\tilde{\beta}_2$ zanim wartość funkcji wiarygodności nie zbiegnie numerycznie do pewnej stałej wartości. Przyjmuje się, że $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_2)$ zbiega numerycznie do $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_1)$.

Mając teraz obliczone wartości $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$ oraz $\beta_2 = \tilde{\beta}_2$ należy znaleźć wartości własne

$\hat{\rho}_1 > \dots > \hat{\rho}_r$ przez rozwiązanie tożsamyh równań:

$$\left| \rho_1 S_{11} - S_{10,\beta_1} (S_{00,\beta_1})^{-1} S_{01,\beta_1} \right| = 0$$

$$\left| \rho_2 H_1' S_{11} H_1 - H_1' S_{10,\beta_2} (S_{00,\beta_2})^{-1} S_{01,\beta_2} H_1 \right| = 0.$$

Funkcja wiarygodności przyjmuje zatem postać:

$$L_{\max}^{-2/T}(H_0) = |S_{00}|(1 - \tilde{\rho}_1) \dots (1 - \tilde{\rho}_r).$$

Statystyka testowa:

$$-2 \ln \Lambda = T \left\{ \sum_{i=1}^r (\ln(1 - \hat{\rho}_i) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i)) \right\}$$

ma rozkład $\chi^2((p-r) - (s_1 - 1))$.

Identyfikacja zmiennych słabo egzogenicznych (ang. *weak exogeneity*):

Wyrazy macierzy α interpretuje się jako siłę (prędkość) dostosowywania się zmiennych do długookresowych relacji równowagi danych przez macierz β . W szczególności zostanie omówiona hipoteza słabej egzogeniczności. Hipotezę, że zmienna ma wpływ na długookresowe relacje kointegrujące w macierzy β , ale w tym samym czasie nie ulega wpływowi innych zmiennych jest nazywana hipotezą słabej egzogeniczności tej zmiennej ze względu na β (Hendry, Juselius (2001)).

Testowana będzie następująca hipoteza restrykcji nałożonych na macierz α :

$$H_{\alpha}^C(r) : \alpha = H\alpha^C,$$

gdzie α jest wymiaru $p \times r$, H jest macierzą projektową (ang. *project matrix*) wymiaru $p \times s$, α^C jest macierzą niezerowych współczynników macierzy α wymiaru $s \times r$, $s \geq r$.

Restrykcje nałożone na α można zapisać w równoważnej formie:

$$H_{\alpha}^C(r) : R'\alpha = 0,$$

gdzie $R = H_{\perp}$ jest wymiaru $p \times m$. Warunek $s \geq r$ oznacza, że liczba niezerowych wierszy w α nie może być większa od r . Zmienna, której odpowiada zerowy wiersz w macierzy α nie dostosowuje się do długookresowych relacji kointegrujących, dlatego można ją rozpatrywać jako wspólny trend wiodący dla wszystkich zmiennych układu. Maksymalna liczba wspólnych trendów wiodących w układzie jest równa $p - r$, stąd liczba restrykcji zerowego wiersza macierzy α jest równa co najwyżej $p - r$. Dla tak postawionej hipotezy $H_{\alpha}^C(r)$ rozważany jest model w formie skoncentrowanej:

$$R_{0t} = H\alpha^C\beta'R_t + \varepsilon_t.$$

Testowanie hipotezy słabej egzogeniczności opiera się na podzieleniu układu R_{0t} na dwa podukłady m endogenicznych zmiennych $\bar{H}'R_{0t}$ i $p-m$ słabo egzogenicznych zmiennych

$H'_{\perp}R_{0t}$, gdzie $\bar{H} = H(H'H)^{-1}$:

$$\bar{H}'R_{0t} = \alpha^C \beta' R_{1t} + \bar{H}'\varepsilon_t$$

$$H'_{\perp}R_{0t} = H'_{\perp}\varepsilon_t$$

Po przekształceniu układu:

$$\bar{H}'R_{0t} = \alpha^C \beta' R_{1t} + \rho H'_{\perp}R_{0t} - \rho H'_{\perp}\varepsilon_t + \bar{H}'\varepsilon_t$$

$$H'_{\perp}R_{0t} = H'_{\perp}\varepsilon_t,$$

gdzie $\rho = \omega_{12}\omega_{22}^{-1}$, ω_{12} jest macierzą kowariancji reszt pomiędzy m endogenicznymi zmiennymi $\bar{H}'R_{0t}$ i $p-m$ słabo egzogenicznymi zmiennymi $H'_{\perp}R_{0t}$, cała zmienność układu znajduje się w równaniu pierwszym. Ponieważ wyraz $H'_{\perp}R_{0t}$ jest stacjonarny można zastosować algorytm Frischa-Waugh'a pomocniczych regresji:

$$R_{0t} = \hat{B}_1 H'_{\perp}R_{0t} + R_{0,H_{\perp,t}}$$

$$R_{1t} = \hat{B}_2 H'_{\perp}R_{0t} + R_{1,H_{\perp,t}}$$

$$R_{0,H_{\perp,t}} = \alpha^C \beta' R_{1,H_{\perp,t}} + u_t. \quad (2.15)$$

Rozwiązanie zadania wartości własnej dla równania (2.15) daje $p-m$ wartości własnych $\hat{\lambda}_i^C$. Największych r wartości własnych jest użytych do testu największej wiarygodności, którego statystyka testowa dana przez:

$$-2 \ln L(H_{\alpha}^C(r)/H(r)) = -T \sum_{i=1}^r \{\ln(1 - \hat{\lambda}_i^C) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i)\},$$

ma rozkład asymptotyczny $\chi^2(rm)$, (Juselius (2003)).

Identyfikacja macierzy α , gdy część jej kolumn jest znana:

Hipoteza zerowa, dla zagadnienia, gdy część kolumn macierzy α jest znana ma postać:

$$H_0: \alpha = (a, \tau),$$

gdzie a jest macierzą wymiaru $p \times s$, $s \leq r$ o znanych wyrazach, τ jest macierzą $p \times (r-s)$.

Należy wykluczyć możliwość, że $\tau \subseteq \text{span}(a)$, dlatego przyjmuje się $\tau = a_{\perp}\psi$, gdzie a_{\perp} jest

macierzą wymiaru $p \times (p-s)$, rzędu $p-s$ ortogonalną do macierzy a tzn. zachodzi $\text{rank}(a, a_{\perp}) = p$. Model skoncentrowany dla H_0 ma postać:

$$R_{0t} = a\beta'_1 R_{1t} + a_{\perp}\psi\beta'_2 R_{1t} + \varepsilon_t, \quad (2.16)$$

gdzie $\alpha\beta' = (a\beta'_1, a_{\perp}\psi\beta'_2)$. Procedura testowania hipotez dotyczących znanej macierzy a jest podobna to testowania słabej egzogeniczności. Przyjmując $\bar{a}' = (a'a)^{-1}a'$ oraz $\bar{a}'_{\perp} = (a'_{\perp}a'_{\perp})^{-1}a'_{\perp}$ można rozbić układ (2.16) na dwa podukłady:

$$\bar{a}' R_{0t} = \beta_1 R_{1t} + \bar{a}' \varepsilon_t \quad (2.17)$$

$$\bar{a}'_{\perp} R_{0t} = \psi\beta'_2 R_{1t} + \bar{a}'_{\perp} \varepsilon_t \quad (2.18)$$

W celu umieszczenia całej zmienności układu w równaniu pierwszym dokonuje się przekształcenia:

$$\bar{a}' R_{0t} = (\beta_1 - \rho\psi\beta'_2) R_{1t} + \rho'\bar{a}'_{\perp} R_{0t} + \bar{a}' \varepsilon_t - \rho'\bar{a}'_{\perp} \varepsilon_t \quad (2.19)$$

$$\bar{a}'_{\perp} R_{0t} = \psi\beta'_2 R_{1t} + \bar{a}'_{\perp} \varepsilon_t, \quad (2.20)$$

gdzie $\rho = \omega_{12}\omega_{22}^{-1}$, ω_{12} jest macierzą kowariancji reszt otrzymanych w równaniach (2.17) i (2.18). Tym razem zmienność wpływająca na parametry ψ i β_2 znajduje się w równaniu (2.20), dlatego estymator największej wiarygodności $\hat{\beta}_2$ otrzymuje się rozwiązując zadanie wartości własnej dla (2.20):

$$|\lambda S_{11} - S_{10}\bar{a}'_{\perp}(\bar{a}'_{\perp} S_{00}\bar{a}'_{\perp})^{-1}\bar{a}'_{\perp} S_{01}| = 0.$$

Estymator $\hat{\psi}$ otrzymuje się ze wzoru:

$$\hat{\psi}(\hat{\beta}_2) = \bar{a}'_{\perp} S_{01}\beta_2(\beta'_2 S_{11}\beta_2)^{-1}.$$

Estymator $\hat{\beta}_1$ otrzymuje się z równania (2.19) po podstawieniu $\hat{\psi}$ w miejsce ψ (Hendry, Juselius (2001), Juselius(2003)).

Testowanie hipotezy H_0 odbywa się poprzez procedurę największej wiarygodności do równania skoncentrowanego uzyskanego z algorytmu Frischa-Waugh'a do równania (2.19), gdzie wyrazem stacjonarnym względem, którego dokonuje się regresji pomocniczych jest $\bar{a}' \varepsilon_t - \rho'\bar{a}'_{\perp} \varepsilon_t$. Statystyka testu największej wiarygodności ma rozkład $\chi^2(s(p-r))$, Johansen (1996).

Łączna identyfikacja struktury długookresowej:

Po dokonaniu identyfikacji poszczególnych wektorów β_i , $1 \leq i \leq r$ należy sprawdzić, czy łącznie identyfikują one strukturę długookresową modelu. Należy wykluczyć możliwość, że wektor $\beta_j \in \text{span}(\beta_i, 1 \leq i \leq r, i \neq j)$. W takim wypadku $\text{rank}(\beta) < r$. Restrykcje nałożone na β_i , $1 \leq i \leq r$ za pomocą macierzy restrykcji R_i takich, że $R_i' \beta_i = 0$ lub za pomocą macierzy projektowych H_i takich, że $\beta_i = H_i \varphi_i$, $R_i' H_i = 0$, $1 \leq i \leq r$ spełniające powyższy warunek nazywają się restrykcjami identyfikującymi (ang. *identifying restrictions*). Aby restrykcje nałożone na β_i były identyfikujące, spełniony musi być warunek:

$$\text{rank}(R_1' \beta_1, \dots, R_r' \beta_r) = \text{rank}(R_1' H_1 \varphi_1, \dots, R_r' H_r \varphi_r) = r - 1, \quad (2.21)$$

który oznacza, że $\beta_i \notin \text{span}(\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_r)$. Przez indukcję można rozszerzyć warunek (2.21) na k wektorów β_{i_k} , $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$, $k = 1, \dots, r - 1$. Zbiór restrykcji jest identyfikujący, jeżeli dla każdego $i \neq i_k$ i każdego $k = 1, \dots, r - 1$ zachodzi:

$$\text{rank}(R_i' H_{i_1} \varphi_{i_1}, \dots, R_i' H_{i_k} \varphi_{i_k}) \geq k. \quad (2.22)$$

Mając zbiór restrykcji H_i , $1 \leq i \leq r$ identyfikujący macierz β można przejść do procedury estymacji parametrów macierzy α i β . Wykorzystana zostanie tutaj dekompozycja:

$$H^C : \alpha \beta' = \alpha_1 \beta_1' + \alpha_2 \beta_2' + \dots + \alpha_r \beta_r' = \alpha_1 \varphi_1' H_1 + \alpha_2 \varphi_2' H_2 + \dots + \alpha_r \varphi_r' H_r.$$

Dla takiego rozbitcia model skoncentrowany ma postać:

$$R_{0t} = \alpha_1 \varphi_1' H_1' R_{1t} + \alpha_2 \varphi_2' H_2' R_{2t} + \dots + \alpha_r \varphi_r' H_r' R_{rt} + \varepsilon_t. \quad (2.23)$$

Estymatory $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$, $1 \leq i \leq r$ znajduje się na podstawie algorytmu estymacji nieliniowej (Juselius (2003)):

1. Przyjmuje się wartość początkową $\beta_i = \tilde{\beta}_i$, $1 \leq i \leq r - 1$, gdzie $\tilde{\beta}_i$ mogą być wystandaryzowanymi wektorami własnymi odpowiadającymi $r - 1$ największym wartościom własnym tak jak w przypadku modelu bez restrykcji, rozdział 2.1. Szybkość zbieżności nie będzie jednak duża. Można ją zwiększyć, przyjmując $\beta_i = V_i^{\max}$, gdzie V_i^{\max} jest wektorem własnym odpowiadającym największej wartości własnej rozwiązania zadania wartości własnej:

$$\left| \rho H_i' H_i - H_i' \hat{\beta}' (\hat{\beta}' \hat{\beta}) \hat{\beta}' H_i \right| = 0,$$

gdzie β jest macierzą otrzymaną z estymacji zredukowanego rzędu bez restrykcji.

2. Dla ustalonej wartości $\beta_i = \tilde{\beta}_i$, $1 \leq i \leq r-1$ estymuje się $\tilde{\alpha}_r$ oraz $\tilde{\varphi}_r$ w wyniku regresji zredukowanego rzędu R_{0r} względem $H'_r R_{1r}$, po podstawieniu $\tilde{\beta}'_i R_{1r}$, $1 \leq i \leq r-1$ do (2.22). W tym kroku otrzymuje się $\tilde{\beta}_r = H_r \tilde{\varphi}_r$ oraz $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{r-1})$.
3. Dla ustalonej wartości $\beta_i = \tilde{\beta}_i$, $2 \leq i \leq r$ estymuje się $\tilde{\alpha}_1$ oraz $\tilde{\varphi}_1$ w wyniku regresji zredukowanego rzędu R_{0r} względem $H'_1 R_{1r}$, po podstawieniu $\tilde{\beta}'_i R_{1r}$, $2 \leq i \leq r$ do (2.22). W tym kroku otrzymuje się $\tilde{\beta}_1 = H_1 \tilde{\varphi}_1$ oraz $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_r)$.
4. Kroki 2 i 3 powtarza się dla ostatnio obliczonej wartości $\tilde{\beta}_i$, $1 \leq i \leq r$, aż wartość funkcji wiarygodności $L_{\max}^{-2/T}(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{i-1}, \tilde{\beta}_{i+1}, \dots, \tilde{\beta}_r)$ zbiegnie numerycznie do pewnej stałej.

Zadanie wartości własnej polega na rozwiązywaniu dla kolejnych

$$\beta_i^* = \{\beta_1 = \tilde{\beta}_1, \dots, \beta_{i-1} = \tilde{\beta}_{i-1}, \beta_{i+1} = \tilde{\beta}_{i+1}, \dots, \beta_r = \tilde{\beta}_r\}, 1 \leq i \leq r:$$

$$|\rho_r H'_r S_{11} H_r - H'_r S_{10, \beta^*} (S_{10, \beta^*})^{-1} S_{10, \beta^*} H_r| = 0.$$

W kolejnych iteracjach oblicza się wartości własne $\hat{\rho}_i$, $1 \leq i \leq r$, aż do zbieżności numerycznej funkcji wiarygodności:

$$L_{\max}^{-2/T}(H^C) = |S_{00}| \prod_{i=1}^r (1 - \hat{\rho}_i),$$

do pewnej stałej.

Zatem statystyka testowa hipotezy, że H_i , $1 \leq i \leq r$ są identyfikujące:

$$-2 \ln \Lambda = T \sum_{i=1}^r \{\ln(1 - \hat{\rho}_i) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i)\}$$

ma rozkład asymptotyczny $\chi^2(\nu)$, gdzie

$$\nu = \sum_{i=1}^r (m_i - r + 1) = \sum_{i=1}^r \{(p - r) - (s_i - 1)\}$$

(Juselius (2003), Johansen (1996)).

2.4 Identyfikacja wspólnych trendów wodzących

Dla uproszczenia rozpatrywany będzie model VEqCM dany równaniem:

$$\Delta x_t = \alpha \beta' x_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, t = 1, \dots, T, \quad (2.24)$$

gdzie α, β są macierzami wymiaru $p \times r$, μ jest wektorem długości p . Dodatkowo rozważane będą macierze do nich ortogonalne $\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}$ o wymiarze $p \times (p-r)$ takie, że $\alpha' \alpha_{\perp} = 0$, $\beta' \beta_{\perp} = 0$ i $\text{rank}(\alpha, \alpha_{\perp}) = \text{rank}(\beta, \beta_{\perp}) = p$. Zachodzi następująca tożsamość:

$$\beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} + \alpha (\beta' \alpha)^{-1} \beta' = I, \quad (2.25)$$

poprzez którą można zdekomponować każdy wektor $v \in R^p$ na wektor $v_1 \in \text{span}(\beta_{\perp})$ i wektor $v_2 \in \text{span}(\alpha)$:

$$v = v_1 + v_2 = \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} v + \alpha (\beta' \alpha)^{-1} \beta' v$$

(Johansen (1996)). Ten wynik stosuje się do wektora x_t , tak aby wyrazić go jako liniową kombinację $\alpha'_{\perp} x_t$ oraz relacji kointegrujących $\beta' x_t$:

$$x_t = \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} x_t + \alpha (\beta' \alpha)^{-1} \beta' x_t. \quad (2.26)$$

Następnym krokiem będzie wyrażenie tak zapisanego wektora x_t jako funkcji składników losowych ε_i , $i = 1, \dots, T$, czyli w reprezentacji średnich ruchomych (ang. *moving average representation*). Mnożąc z lewej strony równanie (2.24) przez β' otrzymuje się:

$$\beta' x_t = (I + \beta' \alpha) \beta' x_{t-1} + \beta' \mu + \beta' \varepsilon_t. \quad (2.27)$$

Ponieważ, jeżeli wektor $\beta' x_t$ jest stacjonarny, to wartości własne macierzy $(I + \beta' \alpha)$ leżą wewnątrz koła jednostkowego, dlatego można wyrazić $\beta' x_t$ jako funkcję ε_i , $i = 1, \dots, T$ i stałej μ :

$$\beta' x_t = \sum_{i=0}^{\infty} (I + \beta' \alpha)^i \beta' (\varepsilon_{t-i} + \mu). \quad (2.28)$$

Podobnie reprezentację średnich ruchomych dla $\alpha'_{\perp} x_t$ można znaleźć mnożąc z lewej strony równanie (2.24) przez α'_{\perp} :

$$\alpha'_{\perp} \Delta x_t = \alpha'_{\perp} \varepsilon_t + \alpha'_{\perp} \mu. \quad (2.29)$$

Równanie to po rozwiązaniu ma postać:

$$\alpha'_{\perp} x_t = \alpha'_{\perp} x_0 + \sum_{i=1}^t \alpha'_{\perp} (\varepsilon_i + \mu). \quad (2.30)$$

Po wstawieniu (2.26) i (2.28) do (2.24) otrzymuje się:

$$x_t = Cx_0 + C \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + C\mu t + Cx_0 + \alpha (\beta' \alpha)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (I + \beta' \alpha)^i \beta' (\varepsilon_{t-i} + \mu) = C \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + \tau_1 t + \tau_0 + Y_t, \quad (2.31)$$

gdzie $C = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp}$, $\tau_1 = C\mu$ mierzy nachylenie trendu liniowego, $\tau_0 = Cx_0$ zależy od wartości początkowych, $Y_t = \alpha(\beta' \alpha)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (I + \beta' \alpha)^i \beta' (\varepsilon_{t-i} + \mu)$ na mocy (2.28) jest procesem stacjonarnym. Macierz C dla modelu VAR(k) ma postać $C = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp}$, gdzie $\Gamma = (I - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_{k-1})$ (Juselius (2003)).

Z reprezentacji średnich ruchomych (2.31) modelu VAR(1) wynika, że na niestacjonarność x_t wpływa $p-r$ kombinacji $\alpha'_{\perp} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ z wagami $\beta_{\perp}(\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1}$. Zmienne $\alpha'_{\perp} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ nazywa się wspólnymi trendami wiodącymi (ang.: common driving trends). Model VEqCM o kointegracji rzędu r ma zatem $p-r$ wspólnych trendów wiodących.

Skumulowane składniki losowe $\alpha'_{\perp} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i$ działają jak siły odpychające (ang. *pushing forces*) zmienne x_t poza atraktor rozpięty przez β_{\perp} . Agenci reagują na te zmiany dostosowując się do długookresowych relacji ekonomicznych $E(\beta' x_t)$ poprzez współczynniki dostosowania zawarte w macierzy α działające na nieoczekiwane zaburzenia $\tilde{\varepsilon}_t = \beta' x_t - E(\beta' x_t)$ - siły przyciągające (ang. *pulling forces*) (Johansen (1996)).

Przy rozpatrywaniu modelu podstawowego (ang. *basic model*) i modelu rozszerzonego (ang. *extended model*) o nowe zmienne, relacje kointegrujące $\beta' x_t$ znalezione dla modelu podstawowego zachowują się w modelu rozszerzonym. Modelowanie od szczególnego do ogólnego (ang. *from specific to general*) jest zatem uzasadnione. Natomiast nieoczekiwane zaburzenia w modelu podstawowym formujące wspólne trendy wiodące wcale nie muszą być nieoczekiwane w modelu rozszerzonym, ponieważ mogą być wyjaśnione za pomocą nowych zmiennych i opis wspólnych trendów wiodących się zmienia (Hendry (1995a), Johansen (1996)).

Macierz $C = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp}$ można zdekomponować na produkt dwóch macierzy:

$$C = \tilde{\beta}_{\perp} \alpha'_{\perp},$$

gdzie $\tilde{\beta}_{\perp} = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1}$. Macierze α_{\perp} , β_{\perp} oraz C mogą zostać obliczone, jeżeli znane są estymatory macierzy α , β , Γ . Wspólne trendy wiodące mogą być zatem policzone dla estymatorów $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ otrzymanych w estymacji bez restrykcji lub dla estymatorów $\hat{\alpha}^C$, $\hat{\beta}^C$ z nałożonymi restrykcjami. Dekompozycja macierzy $C = \tilde{\beta}_{\perp} \alpha'_{\perp}$ przypomina dekompozycję

macierzy $\Pi = \alpha\beta'$ z tą jednakże różnicą, że $\tilde{\beta}_\perp$ jest funkcją nie tylko β_\perp , ale także α_\perp . Identyfikacji macierzy $\tilde{\beta}_\perp$ i α_\perp można dokonać za pomocą macierzy Q o wymiarze $(p-r) \times (p-r)$:

$$C = \tilde{\beta}_\perp Q Q^{-1} \alpha'_\perp = \tilde{\beta}_\perp^c \alpha_\perp^c. \quad (2.33)$$

Ten rodzaj restrakcji nie prowadzi do zmiany wartości funkcji wiarygodności. Dlatego transformacje macierzy $\tilde{\beta}_\perp$ i α_\perp za pomocą Q prowadzą do dokładnej identyfikacji (ang. *just-identification*) wspólnych trendów wodzących i testowanie hipotez dotyczących restrakcji nie jest konieczne. Dalsze restrakcje na $\tilde{\beta}_\perp$ i α_\perp zmniejszają wartość funkcji wiarygodności i muszą być testowane (Juselius (2003)).

2.5 Prognozowanie w modelu VEqCM

Rozważany będzie model VAR(1) postaci:

$$x_t = Ax_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad (2.34)$$

gdzie x_t jest wektorem zmiennych długości p , A jest macierzą parametrów wymiaru $p \times p$, D_t jest wektorem komponentów deterministycznych długości m , Φ jest macierzą parametrów o wymiarze $p \times m$, x_0 jest wektorem wartości początkowych zmiennych, ε_t jest składnikiem losowym, $t = 1, 2, \dots, T$. Zgodnie z modelem (2.34) wektor zmiennych x_{T+h} w momencie następującym h okresów po ostatniej obserwacji T jest postaci (Hendry, Juselius (2001)):

$$x_{T+h} = A^h x_T + \sum_{i=0}^{h-1} A^i (\Phi D_{T+i} + \varepsilon_{T+i}). \quad (2.35)$$

Prognoza VAR dla modelu VAR(1):

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{A}^h x_T + \sum_{i=0}^{h-1} \hat{A}^i \hat{\Phi} D_{T+i}, \quad (2.36)$$

może zawierać istotne błędy, ponieważ x_t wykorzystany do estymacji macierzy A jest I(1).

Wyeliminowanie procesu pierwiastka jednostkowego w równaniu (2.34), który może powodować istotne błędy prognozy odbywa się poprzez podział (ang. *partitioning*) wektora x_t na wektor wymiaru $r \times 1$ odpowiadający r stacjonarnym relacjom kointegrującym $\beta' x_t$ oraz na wektor wymiaru $(p-r) \times 1$ odpowiadający stacjonarnym przyrostom $\beta'_\perp \Delta x_t$.

Wykluczenie możliwości, że x_t jest procesem I(2) odbywa się poprzez nałożenie warunków, że macierz $\alpha'_\perp A \beta_\perp$ jest rzędu $(p-r) \times (p-r)$ oraz macierze α_\perp i β_\perp są wymiaru

$p \times (p-r)$ i pełnego rzędu (Johansen (1992)). Podział wektora x_t jest postaci:
$$\begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp \Delta x_t \end{bmatrix}$$

Podobnie dokonuje się podziału macierzy α . Podział ten oznaczony będzie jako
$$\begin{bmatrix} \alpha_a \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_b \end{bmatrix},$$

gdzie α_a jest macierzą wymiaru $r \times r$, a α_b jest macierzą wymiaru $(p-r) \times r$.

Dla tak oznaczonego podziału wektora x_t można sformułować następujący układ (Clements, Hendry (1995)):

$$\begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp \Delta x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + \beta' \alpha) & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta' x_{t-1} \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta' \Phi \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_b \end{bmatrix} D_t + \begin{bmatrix} \beta' \varepsilon_t \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_{bt} \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

gdzie $\alpha_b = \beta'_\perp \alpha$, $\Phi_b = \beta'_\perp \Phi$ oraz $\varepsilon_{bt} = \beta'_\perp \varepsilon_t$. Układ w równaniu (2.37) w całości wyznacza warunkowe i bezwarunkowe wartości oczekiwane i wariancje dla wszystkich zmiennych stacjonarnych w nim zawartych (Clements, Hendry (1995)). Na jego podstawie

będzie można zatem dokonywać prognoz. Prognoza
$$\begin{bmatrix} \beta' \hat{x}_t \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp \Delta \hat{x}_t \end{bmatrix}$$
 przy znanym x_{t-1} jest postaci:

$$\begin{bmatrix} \beta' \hat{x}_t \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp \Delta \hat{x}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + \beta' \alpha) & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta' x_{t-1} \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp \Delta x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta' \Phi \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_b \end{bmatrix} D_t. \quad (2.38)$$

Wystarczy teraz pokazać, w jaki sposób wykorzystując równanie (2.38) otrzymać prognozę wektora \hat{x}_t . Wykorzystana zostanie w tym celu tożsamość (2.25) i wzór (2.26). Na

ich podstawie zachodzą następujące przekształcenia wektora x_t :

$$\begin{aligned} x_t &= \beta_\perp (\alpha'_\perp \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp x_t + \alpha (\beta' \alpha)^{-1} \beta' x_t = \\ &= [0; \beta_\perp (\alpha'_\perp \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp (\beta'_\perp)^{-1}] \begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp x_t \end{bmatrix} + [\alpha (\beta' \alpha)^{-1}; 0] \begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots\dots\dots \\ \beta'_\perp x_t \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\alpha (\beta' \alpha)^{-1} : \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} (\beta'_{\perp})^{-1} \right] \begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} x_t \end{bmatrix} = \\
&= \left[\alpha (\beta' \alpha)^{-1} : \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} (\beta'_{\perp})^{-1} \right] \begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} (\Delta x_t + x_{t-1}) \end{bmatrix} = \\
&= \left[\alpha (\beta' \alpha)^{-1} : \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} (\beta'_{\perp})^{-1} \right] \left(\begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \beta'_{\perp} x_{t-1} \end{bmatrix} \right) \\
&= \left[\alpha (\beta' \alpha)^{-1} : \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} (\beta'_{\perp})^{-1} \right] \begin{bmatrix} \beta' x_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta x_t \end{bmatrix} + \left[0 : \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} (\beta'_{\perp})^{-1} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \beta'_{\perp} x_{t-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Ponieważ β'_{\perp} we wzorze (2.39) nie jest macierzą kwadratową, więc $(\beta'_{\perp})^{-1}$ oznacza w tym przypadku macierz pseudo-odwrotną do macierzy β'_{\perp} nazywaną również uogólnioną odwrotnością macierzy β'_{\perp} lub odwrotnością macierzy β'_{\perp} w sensie Moora-Penrose'a. Prognoza \hat{x}_t jest zatem postaci:

$$\hat{x}_t = \left[\alpha (\beta' \alpha)^{-1} : \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp} (\beta'_{\perp})^{-1} \right] \left(\begin{bmatrix} \beta' \hat{x}_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta \hat{x}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \beta'_{\perp} x_{t-1} \end{bmatrix} \right) \tag{2.40}$$

Znając wartość wektora x_{t-1} w celu dokonania prognozy \hat{x}_t należy zatem wykonać następującą procedurę:

1. Podstawić x_{t-1} do równania (2.38) i obliczyć prognozę podziału $\begin{bmatrix} \beta' \hat{x}_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta \hat{x}_t \end{bmatrix}$.
2. Podstawić podział $\begin{bmatrix} \beta' \hat{x}_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta \hat{x}_t \end{bmatrix}$ oraz x_{t-1} do równania (2.41) i obliczyć \hat{x}_t .

W celu obliczenia prognoz na okresy \hat{x}_{t+h} , $h=1,2,\dots$ należy po kolei iterować procedurę przedstawioną powyżej.

W szczególnym przypadku $D_t = 1$ macierz Φ jest wektorem wymiaru $p \times 1$. Wektor ten przedstawia deterministyczny przyrost zmiennych znajdujących się w wektorze x_t . Powyższa procedura prognozowania ulega też znaczącemu uproszczeniu.

Na podstawie układu (2.32) można wyznaczyć długookresową równowagę dla zmiennych stacjonarnych w nim zawartych. Długookresową równowagę układu definiuje się następująco:

$$E \begin{pmatrix} \beta' x_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta x_t \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow \infty} E \begin{pmatrix} \beta' x_{T+h} \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta x_{T+h} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Przyjęte zostają oznaczenia $C = \begin{bmatrix} (I + \beta' \alpha) & 0 \\ \dots & \dots \\ \alpha_b & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \beta' \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \end{bmatrix}$. Jeżeli $\alpha \neq 0$, $D_t = 1$ oraz

pierwiastki charakterystyczne macierzy C leżą wewnątrz koła jednostkowego, to na podstawie równania (2.36) oraz (2.41) można otrzymać długookresową równowagę układu (2.37) (Clements, Hendry (1995)):

$$\begin{aligned} E \begin{pmatrix} \beta' x_t \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta x_t \end{pmatrix} &= \lim_{h \rightarrow \infty} E \begin{pmatrix} \beta' x_{T+h} \\ \dots \\ \beta'_{\perp} \Delta x_{T+h} \end{pmatrix} = \lim_{h \rightarrow \infty} (C^h x_T + \sum_{i=1}^{\infty} C^i Q \Phi) \\ &= (I - C)^{-1} Q \Phi = \begin{bmatrix} -(\beta' \alpha)^{-1} \beta' \Phi \\ \dots \\ \alpha_b (\beta' \alpha)^{-1} \beta' \Phi + \Phi_b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Istnienie kointegracji pomiędzy zmiennymi wywiera zasadnicze znaczenie na jakości i interpretację prognoz, ponieważ część zmiennych jest ze sobą związana długookresowymi zależnościami, podczas gdy pozostałe zmienne mogą dryfować „swobodnie”. Dyskusja na temat prognozowania w modelu VEqCM znajduje się w (Engle, Yoo (1987), Clements, Hendry (1998), Clements, Hendry (1999), Hendry, Juselius (2002)).

3

Analiza kursu walutowego euro – dolar amerykański

Zmiennymi zastosowanymi do analizy kursu walutowego euro – dolar amerykański (nazywanego kursem walutowym euro – dolar) są: realny kurs walutowy dolar – euro, indeksy poziomu cen konsumpcyjnych (CPI) w strefie euro i w USA, długookresowa i krótkookresowa stopa procentowa w strefie euro i w USA oraz indeksy giełdowe w strefie euro i w USA. Obliczenia zostały dokonane za pomocą pakietów ekonometrycznych: CATS in RATS (Hansen, Juselius (1994)) oraz PC GIVE / GIVE WIN (Doornik, Hendry (1998)).

3.1 Dane, oznaczenia i analiza wykresów

Źródłem danych użytych w modelu jest wyszukiwarka EcoWin Pro Data Base, baza: OECD MEI. Dane mają częstotliwość miesięczną (M) i uwzględniają 11 z 12 państw strefy euro oraz USA. Okres obserwacji to 1994.1 – 2004.5. Szeregi czasowe zostały przedstawione w Dodatku D. Dla okresów przed 2002.1, czyli przed wprowadzeniem euro do obrotu publicznego, zastosowane są szeregi czasowe zagregowane i ujednolicone z danymi późniejszymi przez OECD. Próba zawiera 125 obserwacji.

Stosowane będą następujące oznaczenia:

s_t – logarytm naturalny nominalnego kursu walutowego spot euro – dolar;

Δs_t – względny przyrost nominalnego kursu walutowego spot euro – dolar;

ppp_t – parytet siły nabywczej jak w równaniu (1.2), czyli logarytm naturalny realnego kursu walutowego dolar – euro deflowany $peu_t - pus_t$;

Δppp_t – względny wzrost realnego kursu walutowego dolar – euro;

peu_t – logarytm naturalny wskaźnika poziomu cen konsumpcyjnych (CPI) dla strefy euro;

Δpeu_t – inflacja miesięczna w strefie euro;

pus_t – logarytm naturalny wskaźnika poziomu cen konsumpcyjnych (CPI) dla USA;

Δpus_t – inflacja miesięczna w USA;

beu_t – roczne oprocentowanie 10-letnich obligacji skarbowych (ang. 10-years government bond yield) w strefie euro / 1200 (długookresowa stopa procentowa w strefie euro);

bus_t – roczne oprocentowanie 10-letnich obligacji skarbowych w USA / 1200 (długookresowa stopa procentowa w USA);

oeu_t – oprocentowanie stopy depozytu overnight (O/N) (ang.: overnight rate) w strefie euro w skali roku / 1200 (krótkookresowa stopa procentowa w strefie euro);

ous_t – oprocentowanie stopy depozytu overnight (O/N) w USA w skali roku / 1200 (krótkookresowa stopa procentowa w USA);

seu_t – logarytm naturalny poziomu indeksu giełdowego dla strefy euro (DJEurStoxx);

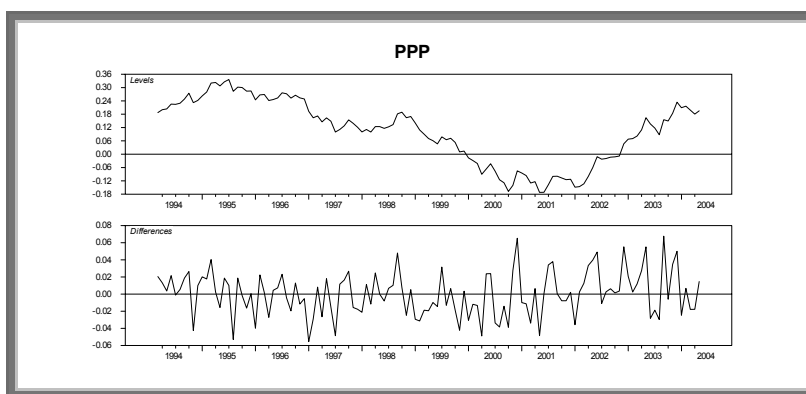
Δseu_t – względny miesięczny zwrot z inwestycji w indeks DJEurStoxx;

sus_t – logarytm naturalny poziomu indeksu giełdowego w USA (DJIA);

Δsus_t – względny miesięczny zwrot z inwestycji w indeks DJIA.

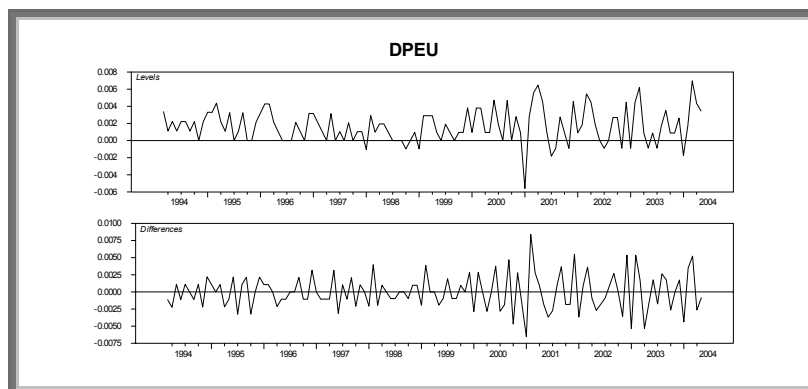
Poniżej przedstawione zostały wykresy poziomów oraz różnic kolejnych zmiennych wraz z wstępną analizą stacjonarności.

1. Wykres szeregu czasowego realnego kursu walutowego dolar - euro - ppp_t

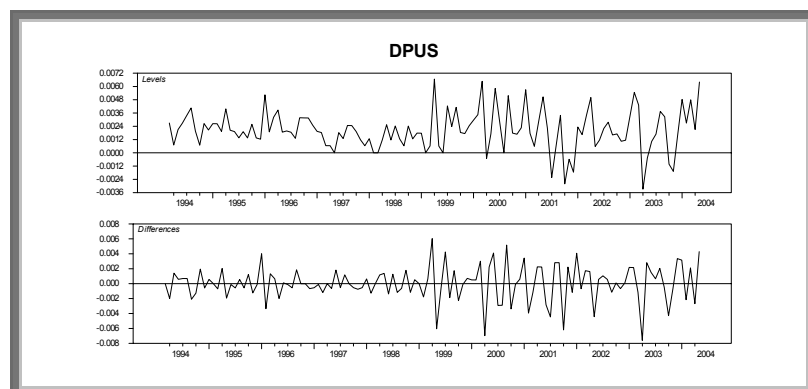


Szereg czasowy realnego kursu walutowego dolar – euro ppp_t nie jest stacjonarny. Szereg pierwszego przyrostu Δppp_t jest natomiast stacjonarny. Analiza szeregu czasowego nominalnego kursu walutowego euro – dolar s_t (wykres nieprzedstawiony w pracy) pokazuje, że dopiero druga różnica kursu walutowego euro – dolar $\Delta^2 s_t$ jest stacjonarna. Zastosowanie w modelu VAR poziomów kursu realnego ppp_t zamiast przyrostów kursu nominalnego Δs_t (oba szeregi o podobnych właściwościach stacjonarności) nie spowoduje utraty informacji dotyczącej poziomów kursu walutowego.

2. Wykres szeregu czasowego przyrostów wskaźnika CPI dla strefy euro - Δpeu_t

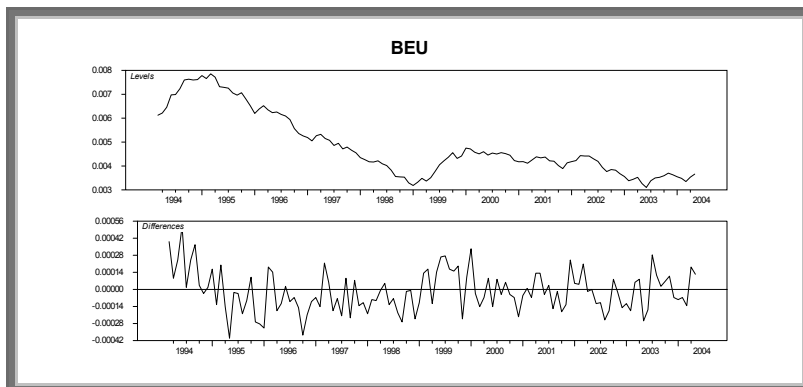


3. Wykres szeregu czasowego przyrostów wskaźnika CPI w USA - Δpus_t



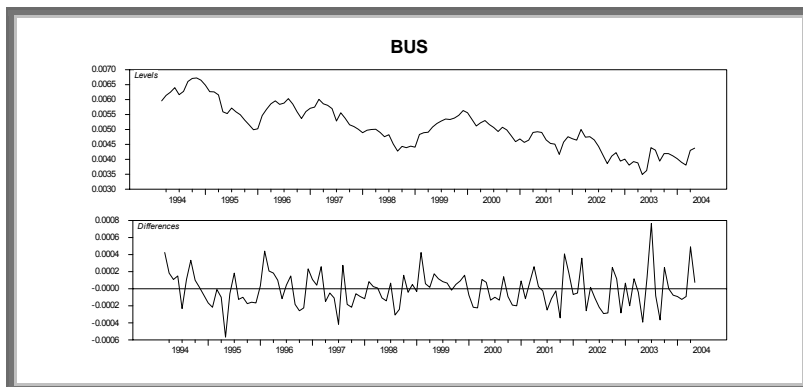
Nie można jednoznacznie stwierdzić, czy przyrost cen (inflacja) w strefie euro Δpeu_t i w USA Δpus_t jest stacjonarny. Drugie przyrosty, odpowiednio $\Delta^2 peu_t$ i $\Delta^2 pus_t$, są natomiast stacjonarne. Warto zauważyć, że są również heteroskedastyczne.

4. Wykres szeregu czasowego oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro - beu_t

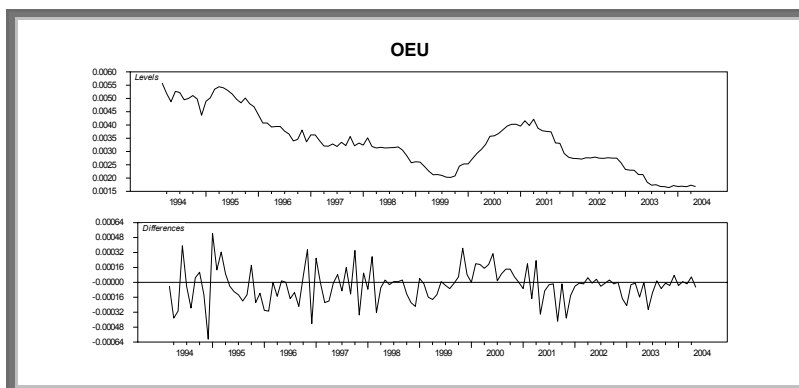


Długookresowe stopy procentowe beu_t oraz bus_t są I(1). Zmiany długookresowych stóp procentowych mogą być związane ze zmianami kursu walutowego. Obie zmienne nie mogą być kontrolowane bezpośrednio przez banki centralne (zakładając brak interwencji na rynku walutowym i obligacji). Mogą to być natomiast zmienne, które wpływają na pozostałe zmienne w układzie VAR.

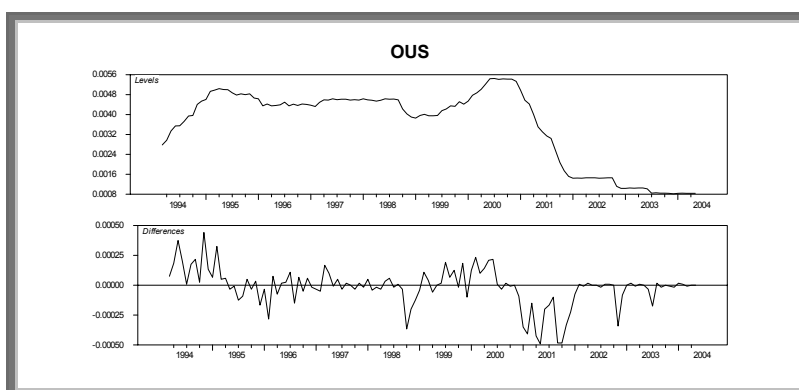
5. Wykres szeregu czasowego oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA - bus_t



6. Wykres szeregu czasowego oprocentowania depozytu overnight (O/N) w strefie euro - oeu_t



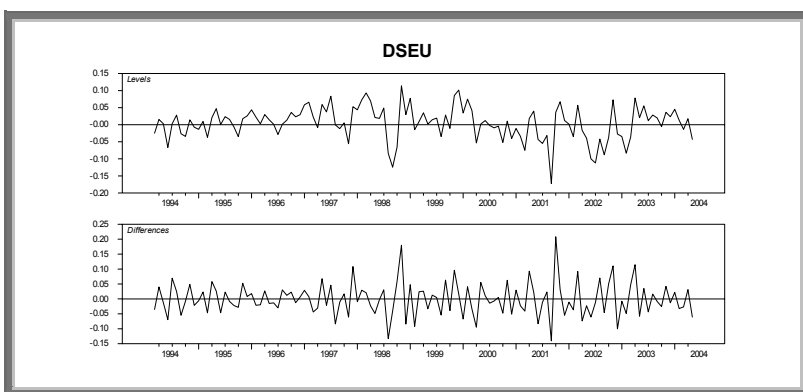
7. Wykres szeregu czasowego oprocentowania depozytu overnight (O/N) w USA - ous_t



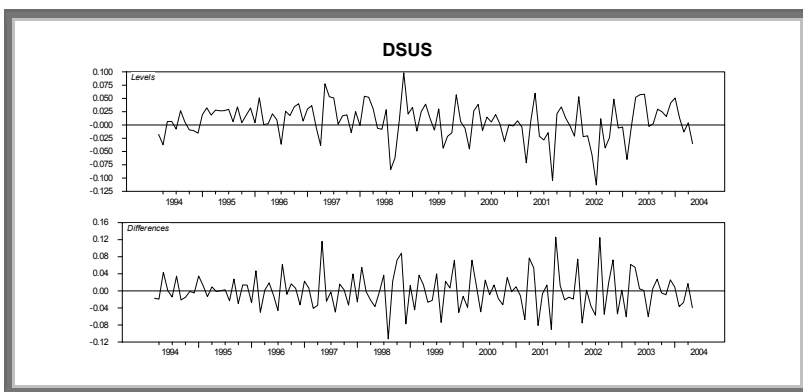
Stopy procentowe depozytu overnight oeu_t oraz ous_t są I(1). Różnice w wykresach stóp krótkookresowych, kontrolowanych przez banki centralne i stóp długookresowych, wskazują na brak możliwości skutecznego wpływania na te drugie przez władze monetarne. Dodatkowo różnice w wykresach krótkookresowych stóp procentowych dla strefy euro oeu_t i USA ous_t odzwierciedlają znaczące różnice w ich polityce monetarnej. Większe zdecydowanie w prowadzeniu polityki pieniężnej wykazuje tutaj FED w porównaniu z ECB (lub europejskie banki centralne), przez co szereg czasowy Δous_t jest mniej stacjonarny niż

szereg czasowy Δoe_{it} . Struktura terminowa stóp overnight różni się znacząco od struktury krótkoterminowych stóp procentowych jednomiesięcznych (1M) i trzymiesięcznych (3M) (nie zaprezentowane w pracy), które przypominają strukturę stóp procentowych 10-letnich (10Y). Ponadto zastosowanie stóp overnight może pozwolić zidentyfikować zjawisko bańki spekulacyjnej (ang. *speculation bubble*) na rynku giełdowym w USA poprzez zweryfikowanie hipotezy, czy inwestycje giełdowe były finansowane pożyczkami na rynku pieniężnym overnight (ang. *leveraged one day trading*).

8. Wykres szeregu czasowego przyrostów indeksu giełdowego w strefie euro - Δse_{it}



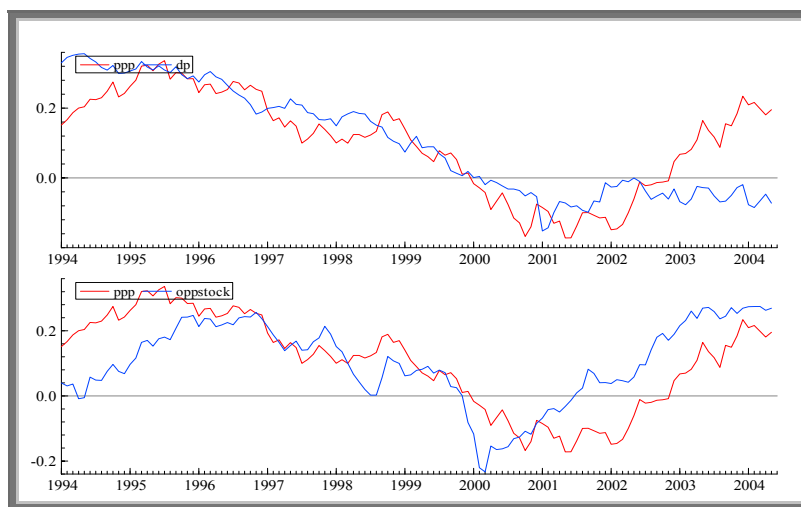
9. Wykres szeregu czasowego przyrostów indeksu giełdowego w USA - Δsus_{it}



Przyrosty indeksów giełdowych, czyli zwroty z inwestycji w akcje w strefie euro Δseu_t oraz w USA Δsus_t są stacjonarne. Może to oznaczać, że ceny akcji w strefie euro i w USA są I(1). W bardziej dokładnych badaniach należałoby zająć się bańką spekulacyjną, jaka miała miejsce na rynkach giełdowych w USA i w mniejszym stopniu w Europie w drugiej połowie lat 90. Można sformułować hipotezę, że indeksy giełdowe w okresie bańki spekulacyjnej są jednocześnie przyrosto- i trendostacjonarnym procesem błędzenia losowego. Natomiast w okresie większej niepewności na rynkach finansowych w danych giełdowych pojawia się więcej białego szumu. Chociaż zjawisko bańki spekulacyjnej miało miejsce w okresie, którego dotyczy analiza, to wykresy Δseu_t oraz Δsus_t nie dają wystarczającego uzasadnienia, aby bliżej przyglądać się temu zjawisku.

Na podstawie statystycznych właściwości zmiennych odczytanych z wykresów można spróbować odgadnąć potencjalne relacje kointegrujące pomiędzy nimi. Na Wykresie 10 pokazana są kombinacje pewnych zmiennych z równania (1.24) z zastosowaniem funkcji wystandaryzowanej średniej i zakresu (ang. *mean, range*) w pakiecie GIVE WIN. Możliwymi relacjami kointegrującymi wyznaczonymi na takiej podstawie są: kombinacja spreadu inflacyjnego $\Delta peu_t - \Delta pus_t$ i realnego kursu walutowego dolar – euro ppp_t oraz kombinacja realnego kursu walutowego dolar – euro ppp_t i spreadu cen akcji $\Delta sus_t - \Delta seu_t$.

10. Wykresów zmiennych $ppp_t, \Delta deu_t - \Delta dus_t, \Delta sus_t - \Delta seu_t$ w GIVE WIN identyfikujące możliwe relacje kointegrujące



Podobnie można próbować odgadnąć wspólne trendy wiodące. Postępując analogicznie do (Juselius, MacDonald (2000)) można oczekiwać istnienia trzech wspólnych dla układu VAR trendów wiodzących. Można postawić hipotezę, że pierwszym z nich jest proces stochastyczny długookresowej stopy procentowej w USA. Podobnie, drugi trend wiodący może być procesem stochastycznym długookresowej stopy procentowej w strefie euro. Z własności trendów wiodzących, zaburzenia poziomów długookresowych stóp procentowych w strefie euro i w USA powinny jednocześnie zaburzać pozostałe zmienne w układzie. Trzeci wspólny trend wiodący może być związany ze zmianami nominalnego lub realnego kursu walutowego.

$$\begin{bmatrix} s_t \\ peu_t \\ pus_t \\ beu_t \\ bus_t \\ oeu_t \\ ous_t \\ \Delta seu_t \\ \Delta sus_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \sum u_{1i} \\ \sum \sum u_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} \\ c_{81} & c_{82} & c_{83} \\ c_{91} & c_{92} & c_{93} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum u_{i1} \\ \sum u_{i2} \\ \sum u_{i3} \end{bmatrix} + \dots \quad (3.1)$$

Równanie (3.1) stanowi próbę identyfikacji stochastycznych procesów błędzenia losowego opisujących ruch zmiennych modelu. Zgodnie z obserwacjami poczynionymi na podstawie wykresów, zmienną s_t można utożsamić z procesem I(2). Podobnie do (Juselius, MacDonald (2003)) wyróżnione będą dwa trendy stochastyczne (ang. *stochastic trends*) I(2): $\sum \sum u_{1i}$, gdzie u_{1i} to stacjonarne zaburzenia na rachunku bieżącym oraz $\sum \sum u_{2i}$, gdzie u_{2i} to stacjonarne zaburzenia wynikające ze zmiany popytu i podaży na rynku dóbr konsumpcyjnych i inwestycyjnych. Te trendy stochastyczne w równaniu (3.1) wpływają na s_t , peu_t oraz pus_t . Równanie (3.1) uwzględnia również trendy I(1): $\sum u_{1i}$, gdzie u_{1i} oznacza stacjonarne zaburzenia poziomu długookresowej stopy procentowej, $\sum u_{2i}$, gdzie u_{2i} oznacza stacjonarne zaburzenia oczekiwanego poziomu krótkookresowych i długookresowych stóp procentowych oraz $\sum u_{3i}$, gdzie u_{3i} oznacza stacjonarne zaburzenia poziomu depozytów krótkookresowych wywołane działaniami banku centralnego. W równaniu (3.1) zmienna s_t została zastąpiona przez ppp_t :

$$\begin{bmatrix}
 p e u_t - p u s_t - s_t \\
 p e u_t \\
 p u s_t \\
 b e u_t \\
 b u s_t \\
 o e u_t \\
 o u s_t \\
 \Delta s e u_t \\
 \Delta s u s_t
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} \\
 d_{21} & d_{22} \\
 d_{31} & d_{32} \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \sum \sum u_{i1} \\
 \sum \sum u_{i2}
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} \\
 c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
 c_{31} & c_{32} & c_{33} \\
 c_{41} & c_{42} & c_{43} \\
 c_{51} & c_{52} & c_{53} \\
 c_{61} & c_{62} & c_{63} \\
 c_{71} & c_{72} & c_{73} \\
 c_{81} & c_{82} & c_{83} \\
 c_{91} & c_{92} & c_{93}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \sum u_{i1} \\
 \sum u_{i2} \\
 \sum u_{i3}
 \end{bmatrix}
 + \dots \quad (3.2)$$

gdzie $a_{11} = d_{21} - d_{31} - d_{11}$, $a_{12} = d_{22} - d_{32}$, $b_{11} = c_{21} - c_{31} - c_{11}$, $b_{12} = c_{22} - c_{32} - c_{12}$,

$b_{13} = c_{23} - c_{33} - c_{13}$. Przyjmuje się hipotezę, że $\sum \sum u_{i1}$ i $\sum \sum u_{i2}$ są skointegrowane

CI(2,1), ponieważ ppp_t jest I(1).

3.2 Model VEqCM

Wektor zmiennych modelu podstawowego x , w którym są nieuwzględnione przepływy kapitałowe oraz wektor zmiennych modelu rozszerzonego o wskaźniki giełdowe x^S mają odpowiednio postać:

$$x = \begin{bmatrix}
 ppp_t \\
 \Delta p e u_t \\
 \Delta p u s_t \\
 b e u_t \\
 b u s_t \\
 o e u_t \\
 o u s_t
 \end{bmatrix}$$

oraz

$$x^S = \begin{bmatrix}
 ppp_t \\
 \Delta p e u_t \\
 \Delta p u s_t \\
 b e u_t \\
 b u s_t \\
 o e u_t \\
 o u s_t \\
 \Delta s e u_t \\
 \Delta s u s_t
 \end{bmatrix}$$

Ponieważ większość zmiennych w wektorach x i x^S nie jest stacjonarna, dlatego model $\text{VAR}(k)$ zostanie sformułowany w postaci VEqCM :

$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \Gamma_2 \Delta x_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta x_{t-k+1} + \Pi x_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t,$$

gdzie

$$D_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{dummy} - 2001.01 \\ \text{dummy} - 2003.07 \\ \text{dummy} - 1994.12 \\ \text{dummy} - 2003.04 \end{bmatrix}$$

jest wektorem komponentów deterministycznych. Zmienne przełącznikowe $\text{dummy} - 2001.01$, $\text{dummy} - 2003.07$, $\text{dummy} - 1994.12$, $\text{dummy} - 2003.04$ mają charakter niepodtrzymany (ang. *impulse dummies*).

W celu wyznaczenia długości opóźnienia k zastosowane są kryteria informacyjne AIC, SC, HQ, test korelacji śladu oraz procedura największej wiarygodności. Konstrukcja testów długości opóźnienia znajduje się w Dodatku A. Wyniki tych testów dla modelu podstawowego przedstawia Tabela 1, a dla modelu rozszerzonego Tabela 2.

Tabela 1. Test długości opóźnienia: model podstawowy

Model podstawowy	AIC	S.C.	HQ	test korelacji śladu	$\ln\left(\left \hat{\Omega}\right \right)$
$k = 1$	-83.211	-99.4888	-101.6745	0.4257	-105.7876
$k = 2$	-83.431	-98.5743	-101.4405	0.5063	-101.8435

Kryteria informacyjne SC, HQ oraz test największej wiarygodności dla modelu podstawowego wskazują na $k = 1$, natomiast kryterium AIC i test korelacji śladu na $k = 2$.

Tabela 2. Test długości opóźnienia: model rozszerzony

Model rozszerzony	AIC	S.C.	HQ	test korelacji śladu	$\ln\left(\left \hat{\Omega}\right \right)$
$k = 1$	-91.278	-111.6225	-114.6772	0.4538	-120.4253
$k = 2$	-91.386	-109.9652	-114.1416	0.5413	-122.0146

Podobnie w modelu rozszerzonym kryteria informacyjne SC, HQ oraz test największej wiarygodności dla modelu podstawowego wskazują na $k = 1$, a kryterium AIC i test korelacji

ślądu na $k = 2$. Wartość statystyki testu korelacji ślądu zwiększa się w modelu rozszerzonym, z czego można wnioskować, że model rozszerzony lepiej objaśnia zmienność.

Z powodu niezbyt długiej liczby obserwacji (125) i stosunkowo dużej liczby zmiennych (9), za właściwą długość opóźnienia zostaje uznane $k = 1$. Modele podstawowy i rozszerzony VAR(1) w postaci korekty błędem są zdefiniowane odpowiednio:

$$\begin{bmatrix} \Delta ppp_t \\ \Delta^2 pe_u_t \\ \Delta^2 pus_t \\ \Delta be_u_t \\ \Delta bus_t \\ \Delta oe_u_t \\ \Delta ous_t \end{bmatrix} = \Pi \begin{bmatrix} ppp_{t-1} \\ \Delta pe_u_{t-1} \\ \Delta pus_{t-1} \\ be_u_{t-1} \\ bus_{t-1} \\ oe_u_{t-1} \\ ous_{t-1} \end{bmatrix} + \Phi D_t + \varepsilon_t$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \Delta ppp_t \\ \Delta^2 pe_u_t \\ \Delta^2 pus_t \\ \Delta be_u_t \\ \Delta bus_t \\ \Delta oe_u_t \\ \Delta ous_t \\ \Delta^2 se_u_t \\ \Delta^2 sus_t \end{bmatrix} = \tilde{\Pi} \begin{bmatrix} ppp_{t-1} \\ \Delta pe_u_{t-1} \\ \Delta pus_{t-1} \\ be_u_{t-1} \\ bus_{t-1} \\ oe_u_{t-1} \\ ous_{t-1} \\ \Delta se_u_{t-1} \\ \Delta sus_{t-1} \end{bmatrix} + \tilde{\Phi} D_t + \tilde{\varepsilon}_t$$

3.3 Analiza reszt w modelu VEqCM

Tabele 3 i 4 przedstawiają macierze Π oraz $\tilde{\Pi}$ powstałe z oszacowania parametrów metodą największej wiarygodności bez nakładania restrikcji (ang. *unrestricted maximum likelihood estimation*). Macierze te są takie same jak w przypadku estymacji uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów (ang. *generalized least squares estimation*). W nawiasach podano wartości statystyk t-studenta. Pogrubione zostały te parametry, dla których wartości statystyk t-studenta $|t| \geq 1,5$:

Tabela 3. Macierz Π dla modelu podstawowego

	PPP	DPEU	DPUS	BUS	BEU	OUS	OEU
DPPP	-0.0345 (-1.7843)	-0.7353 (-0.5110)	-2.3966 (-1.8606)	-3.1780 (-0.4895)	8.3295 (1.5379)	-5.1924 (-2.6699)	-1.5754 (-0.3731)
DDPEU	-0.0027 (-2.2443)	-0.9607 (-10.8278)	0.1179 (1.4843)	-0.4903 (-1.2249)	0.6743 (2.0190)	-0.0424 (-0.3537)	-0.2788 (-1.0708)
DDPUS	0.0003 (0.1987)	0.1558 (1.5402)	-0.9022 (-9.9638)	-0.0949 (-0.2079)	0.4305 (1.1307)	0.0454 (0.3322)	-0.5431 (-1.8297)
DBUS	0.0004 (2.3015)	0.0307 (2.6536)	-0.0077 (-0.7451)	0.0366 (0.7028)	-0.0967 (-2.2228)	-0.0095 (-0.6086)	0.0725 (2.1383)
DBEU	0.0001 (0.5516)	0.0202 (2.2450)	0.0032 (0.4008)	0.2298 (5.6486)	-0.1409 (-4.1521)	-0.0514 (-4.2166)	0.0721 (2.7255)
DOUS	0.0002 (1.6077)	0.0013 (0.1712)	-0.0019 (-0.2764)	0.1723 (4.9794)	0.0007 (0.0259)	-0.0213 (-2.0593)	-0.0675 (-2.9984)
DOEU	-0.0005 (-3.8482)	0.0008 (0.0818)	0.0036 (0.4254)	0.0142 (0.3281)	0.1216 (3.3770)	0.0313 (2.4203)	-0.1535 (-5.4684)

Tabela 4. Macierz $\tilde{\Pi}$ dla modelu rozszerzonego

	PPP	DPEU	DPUS	BUS	BEU	OUS	OEU	DSUS	DSEU
DPPP	-0.0294 (-1.4968)	-0.7290 (-0.5083)	-2.4818 (-1.9442)	-4.7232 (-0.7196)	8.8096 (1.6394)	-5.1199 (-2.6220)	-1.2237 (-0.2878)	-0.1567 (-1.6453)	0.0816 (1.0986)
DDPEU	-0.0024 (-2.0000)	-0.9592 (-10.7823)	0.1139 (1.4381)	-0.5476 (-1.3450)	0.6916 (2.0750)	-0.0371 (-0.3060)	-0.2692 (-1.0205)	-0.0064 (-1.0914)	0.0030 (0.6537)
DDPUS	0.0005 (0.3302)	0.1632 (1.6034)	-0.9056 (-9.9956)	-0.0628 (-0.1347)	0.4179 (1.0958)	0.0601 (0.4334)	-0.5712 (-1.8929)	-0.0006 (-0.0875)	-0.0018 (-0.3391)
DBUS	0.0003 (2.1735)	0.0294 (2.5380)	-0.0075 (-0.7246)	0.0249 (0.4689)	-0.0926 (-2.1316)	-0.0117 (-0.7429)	0.0787 (2.2917)	-0.0005 (-0.6924)	0.0006 (1.0612)
DBEU	0.0000 (0.3753)	0.0190 (2.1060)	0.0036 (0.4477)	0.2212 (5.3458)	-0.1378 (-4.0685)	-0.0536 (-4.3571)	0.0775 (2.8907)	-0.0002 (-0.3997)	0.0005 (1.0013)
DOUS	0.0002 (1.4406)	0.0007 (0.0942)	-0.0017 (-0.2418)	0.1692 (4.7910)	0.0019 (0.0662)	-0.0225 (-2.1398)	-0.0651 (-2.8465)	-0.0000 (-0.0159)	0.0002 (0.4266)
DOEU	-0.0004 (-3.3899)	0.0029 (0.3067)	0.0027 (0.3202)	0.0241 (0.5535)	0.1178 (3.3038)	0.0355 (2.7398)	-0.1618 (-5.7360)	-0.0001 (-0.1618)	-0.0006 (-1.1191)
DDSUS	0.0609 (2.2501)	2.4418 (1.2345)	-2.5048 (-1.4228)	-11.1218 (-1.2285)	7.0170 (0.9468)	6.0626 (2.2512)	-8.6788 (-1.4799)	-1.0092 (-7.6814)	0.0976 (0.9530)
DDSEU	0.0802 (2.3497)	3.4300 (1.3759)	-4.9457 (-2.2289)	9.3514 (0.8196)	-2.0267 (-0.2170)	7.6850 (2.2642)	-13.7966 (-1.8666)	-0.0520 (-0.3141)	-0.7988 (-6.1880)

Kolumny macierzy Π i $\tilde{\Pi}$ przedstawiają wpływ, jaki dana zmienna opóźniona wywiera na przyrosty kolejnych zmiennych w modelu. W wierszach natomiast znajduje się informacja dotycząca, w jaki sposób zmienność przyrostu danej zmiennej w modelu jest wyjaśniana przez kolejne zmienne opóźnione. Szczegółowa analiza macierzy Π oraz $\tilde{\Pi}$ została pominięta.

Dalej sprawdzane będą założenia normalności rozkładów reszt w modelu VAR(1) w postaci korekty błędem. Konstrukcja zastosowanych testów została przedstawiona w Dodatku A. Tabele 5 i 6 przedstawiają statystyki testu Ljunga-Boxa autokorelacji reszt oraz test LM dla pierwszego i czwartego rzędu autokorelacji odpowiednio w modelu podstawowym oraz rozszerzonym. Testy te nie wykazują istotnej autokorelacji reszt w żadnym z modeli.

Tabela 5. Testy autokorelacji reszt: model podstawowy

Jung-Box(30)	ChiSqr(1421) = 2383.8716	P-value = 0.000
LM(1)	ChiSqr(49) = 89.4747	P-value = 0.000
LM(4)	ChiSqr(49) = 66.6687	P-value = 0.047

Tabela 6. Testy autokorelacji reszt: model rozszerzony

Jung-Box(30)	ChiSqr(2349) = 3729.6423	P-value = 0.000
LM(1)	ChiSqr(81) = 120.8433	P-value = 0.003
LM(4)	ChiSqr(81) = 101.881	P-value = 0.058

W Dodatku C znajdują się diagramy reszt powstałych z oszacowania parametrów modelu rozszerzonego VAR(1) wygenerowane przez CATS in RATS. Jedyną zmienną, dla której występuje zauważalna autokorelacja reszt jest ous_t .

Wartości statystyk testów normalności wielowymiarowego rozkładu reszt (ang. *multivariate normality tests*) dla modelu podstawowego i rozszerzonego podane w Tabeli 7 są akceptowalne. Wartości statystyk testów ulegają jednak pogorszeniu w modelu rozszerzonym.

Tabela 7. Test wielowymiarowej normalności

model podstawowy	ChiSqr(14) = 14.6695	P-value = 0.401
model rozszerzony	ChiSqr(18) = 25.0606	P-value = 0.123

W Tabelach 8 i 9 przedstawione są wartości statystyk testów normalności rozkładów reszt dla każdej zmiennej osobno.

Tabela 8. Testy normalności: model podstawowy

	ARCH(1)	Normalność	Skośność	Kurtoza	Jarq-Berra(2)
Δppp_t	0.1794	0.1678	0.0340	2.6796	0.80
$\Delta^2 peu_t$	0.1114	2.2278	0.2848	2.7706	0.39
$\Delta^2 pus_t$	0.0898	3.4898	0.2390	3.5716	0.19
Δbeu_t	0.7881	0.3718	0.1279	2.8347	0.81
Δbus_t	0.0010	0.6775	0.1348	2.6715	0.66
Δoe_u_t	0.4706	2.8677	0.3523	3.2866	0.20
Δous_t	9.3823	4.8847	-0.3776	3.7355	0.04

Tabela 9. Testy normalności: model rozszerzony

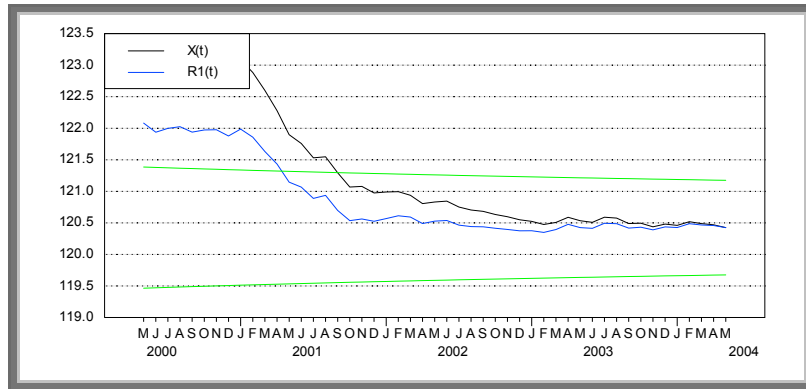
	ARCH(1)	Normalność	Skośność	Kurtoza	Jarq-Berra(2)
Δppp_t	0.3069	0.6332	0.0492	2.5516	0.82
$\Delta^2 peu_t$	0.0060	1.9240	0.2373	2.6589	0.44
$\Delta^2 pus_t$	0.0966	3.6485	0.2233	3.5989	0.18
Δbeu_t	8.8479	4.7896	-0.3415	3.7371	0.89
Δbus_t	0.1005	0.2525	0.0687	2.6863	0.78
Δoe_u_t	0.8324	3.0179	0.3710	3.2420	0.19
Δous_t	8.8479	4.7896	-0.3415	3.7371	0.05
$\Delta^2 seu_t$	3.2117	3.9182	-0.2025	3.6394	0.17
$\Delta^2 sus_t$	0.2940	4.4977	-0.3925	3.6509	0.05

Na podstawie tych wyników można stwierdzić znaczny efekt ARCH dla Δbeu_t i Δous_t . Poza tym reszty w modelu bardzo dobrze spełniają założenia normalności rozkładu reszt. Wartości statystyk testów jednowymiarowej i wielowymiarowej normalności rozkładów reszt dla modelu VAR(2) (nieprzedstawione w pracy) albo nie są znacząco lepsze, albo ulegają pogorszeniu w porównaniu z zaprezentowanymi powyżej wynikami dla modelu VAR(1). Analiza reszt nie daje zatem podstaw, aby wydłużyć opóźnienie w modelu VAR z $k = 1$ do $k = 2$.

3.4 Testy stabilności parametrów

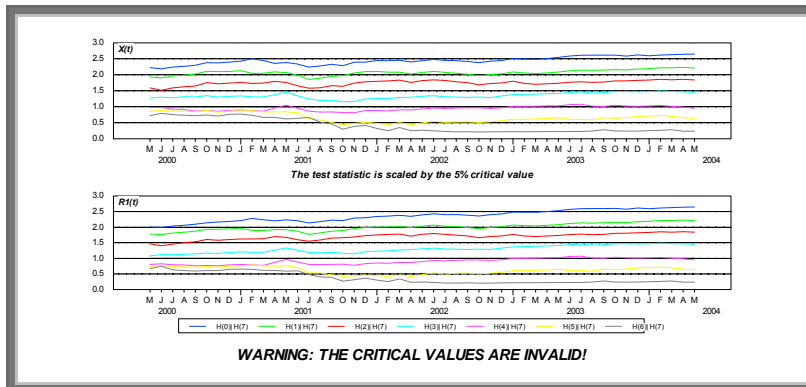
Konstrukcja niżej zaprezentowanych testów stabilności parametrów (ang. *parameter constancy tests*) została przedstawiona w Dodatku B. Wyznaczonym arbitralnie okresem bazowym dla obliczania statystyk stabilności parametrów modelu jest okres między marcem 1994 r., a majem 2000 r. Poniższe wykresy prezentują wizualizacje wyników rekursywnych testów stabilności „w przód” dla modelu zidentyfikowanego w rozdziale 3.7. Wykresy podane są dla modelu rozszerzonego, z wyjątkiem Wykresu 12 rekursywnie obliczanych statystyk testu śladu, podanego dla modelu podstawowego, niedostępnego dla układu 9 zmiennych.

11. Wykres wartości funkcji wiarygodności dla $X(t)$ oraz $R(t)$: model rozszerzony



Wykres 11 przedstawia rekursywnie obliczaną wartość funkcji wiarygodności dla postaci pełnej modelu $X(t)$ oraz skoncentrowanej $R(t)$ wraz z zaznaczonym przedziałem ufności. Wartość funkcji wiarygodności znajdująca się w przedziale ufności może świadczyć o braku zmiany strukturalnej w parametrach modelu. Możliwą zmianę strukturalną parametrów w porównaniu z okresem bazowym można zauważyć w okresie od maja 2000 do maja 2001 r.

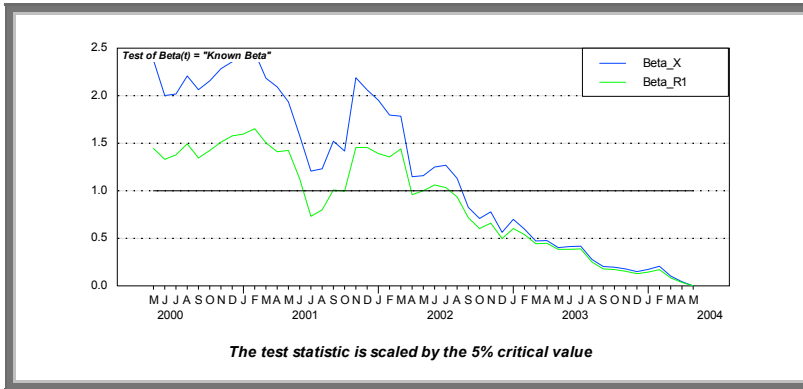
12. Wykres rekursywnie obliczonych statystyk testu śladu: model podstawowy



Wykres 12 przedstawia wizualizację stabilności i siły relacji kointegrujących w modelu podstawowym w obu postaciach $X(t)$ oraz $R(t)$. Linie zaprezentowane na wykresie

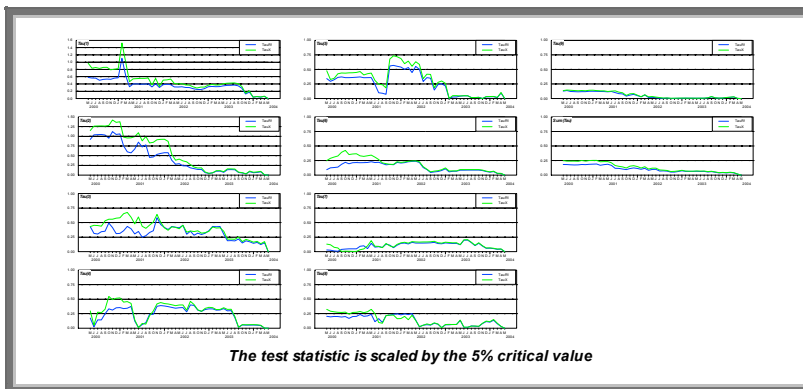
odpowiadają wartościom testu śladu liczonego dla kolejnych wartości własnych. Linie te nie przecinają się i przypominają wykres funkcji liniowej, co świadczy o dużej sile i stabilności relacji kointegrujących modelu.

13. Wykres rekursywnego testu β dla X(t) i R(t): model rozszerzony



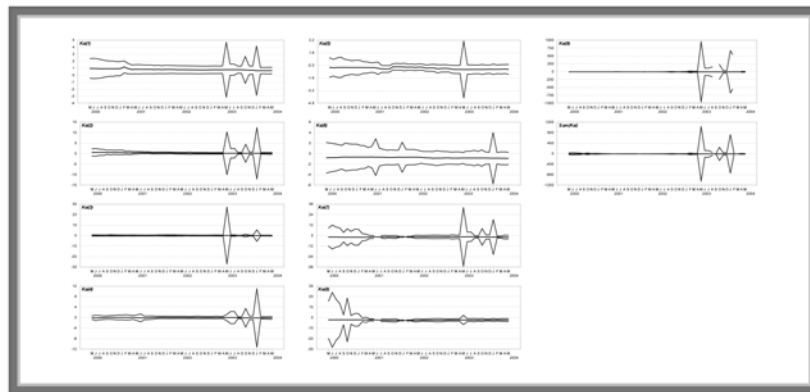
Wykres 13 przedstawia rekursywnie obliczone wartości testu β dla modelu pełnego X(t) i skoncentrowanego R(t) wraz z przedziałem ufności. Test ten sprawdza, czy obliczona dla próby do okresu t macierz $\beta_t \subseteq span(\beta_{t_0})$, gdzie t_0 oznacza próbę bazową. Niestabilność relacji kointegrujących widać w okresie od maja 2000 do czerwca 2002 r. Wraz z wydłużaniem próby testowej stabilność parametrów macierzy β wzrasta.

14. Wykres rekursywnego testu tau: model rozszerzony

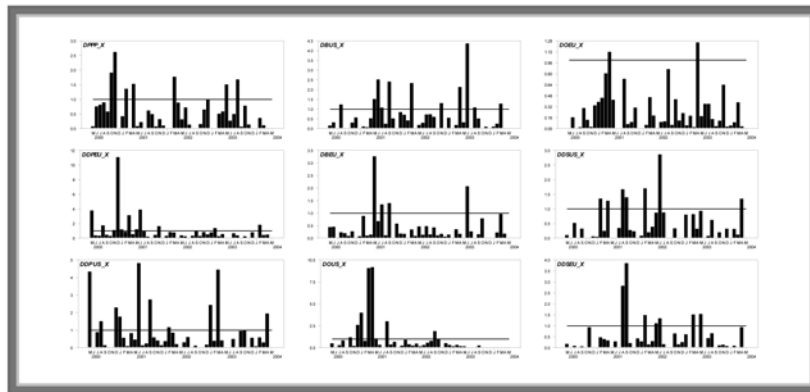


Wykres 14 przedstawia wartości rekursywnego testu τ stabilności parametrów macierzy β . Test ten sprawdza stabilność wartości własnych powstałych z dekompozycji macierzy Π , czyli stabilność rzędu kointegracji. Wykres 15 przedstawia fluktuację wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym z Wykresu 14. Test τ nie wykazuje zmian strukturalnych parametrów macierzy β wynikających ze zmian rzędu kointegracji. Test fluktuacji wektorów własnych, choć wykazuje pewną niestabilność w końcowym okresie próby, to łącznie z testem τ nie stanowi o niestabilności parametrów.

15. Wykres fluktuacji wektorów własnych: model rozszerzony

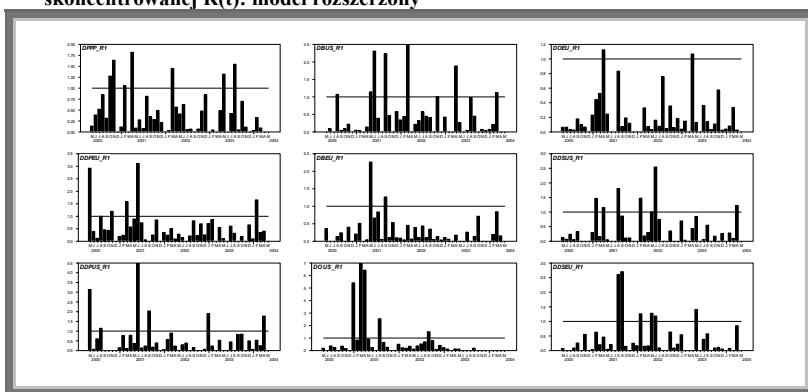


16. Wykres testu błędów predykcji na jeden okres dla kolejnych zmiennych w postaci pełnej $X(t)$: model rozszerzony

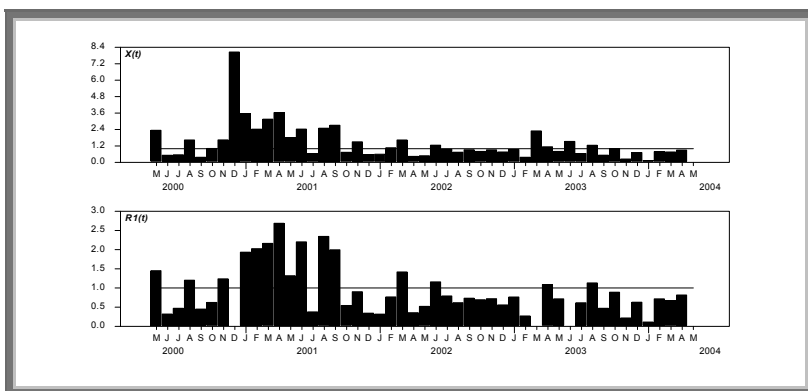


Wykres 16 przedstawia rekursywny test błędów predykcji w modelu pełnym $X(t)$ wraz z przedziałem ufności. Prognoza wartości kolejnych zmiennych w okresie $t + 1$ obliczona na podstawie parametrów zmiennych oszacowanych na podstawie próby do okresu t choć czasami okazuje się błędna, to błąd ten nie ma charakteru strukturalnego. Wnioski płynące z Wykresu 17 błędów predykcji dla modelu w postaci skoncentrowanej $R(t)$ są analogiczne.

17. Wykres testu błędów predykcji na jeden okres dla kolejnych zmiennych w postaci skoncentrowanej $R(t)$: model rozszerzony



18. Wykres testu błędów predykcji na jeden okres dla całego układu: model rozszerzony



Wykres 18 przedstawia wyniki testu predykcji na jeden okres dla całego układu w postaciach $X(t)$ i $R(t)$. Błędy predykcji występują tylko dla okresu 2000.6 - 2001.6 i są

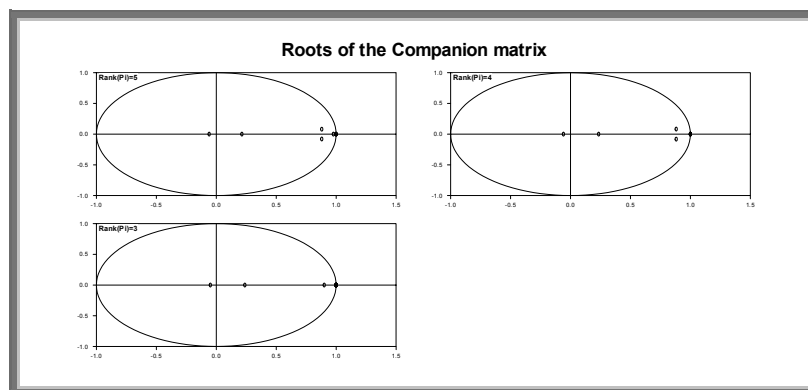
silniejsze w modelu postaci $R(t)$, co przeczy ustaleniom z Dodatku B, że błędy predykcji z reguły są silniejsze w modelu pełnym $X(t)$. Obie postaci modelu $X(t)$ i $R(t)$ wykazują dobre walory prognostyczne dla okresu 2000.7 - 2004.5.

Podsumowując wyniki powyżej przedstawionych testów stabilności parametrów, w okresie 2001.1 - 2001.11 zachodzi zmiana strukturalna w macierzy α powstałej z dekompozycji macierzy $\Pi = \alpha\beta'$. Parametry macierzy β są natomiast stabilne. Krótki okres niestabilności parametrów i brak zmiany strukturalnej w okresie 2000.12 - 2004.5 pozwala nie wprowadzać modyfikacji do modelu VEqCM oraz do identyfikacji relacji kointegrujących w macierzy β .

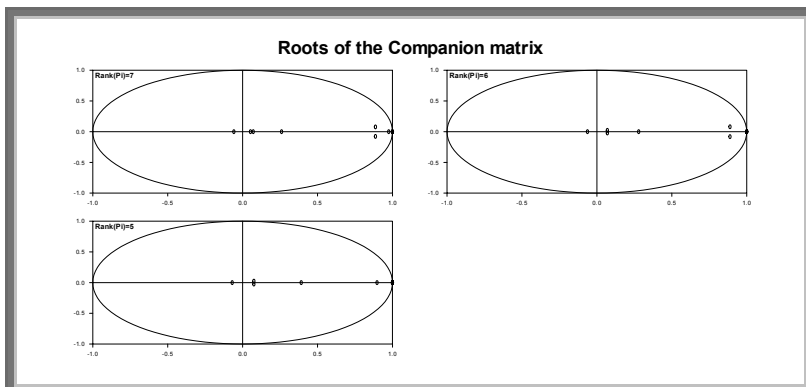
3.5 Rząd kointegracji

Wykresy 19 i 20 pierwiastków macierzy stowarzyszonych (ang.: roots of the companion matrix) generowanych przez CATS in RATS pokazują istnienie procesu niestacjonarnego w modelu VEqCM. Korzystnym zjawiskiem jest skupienie pierwiastków albo w pobliżu zera, albo w pobliżu jedności, w wyniku czego niestacjonarność tę można wyeliminować przez nałożenie na model restrykcji zredukowanego rzędu (ang. *reduced rank restrictions*).

19. Pierwiastki macierzy stowarzyszonej: model podstawowy



20. Pierwiastki macierzy stowarzyszonej: model rozszerzony



Nałożenie restrykcji na macierze Π oraz $\tilde{\Pi}$ powoduje zredukowanie rzędu tych macierzy odpowiednio do r , oraz \tilde{r} ($r < 7$, $\tilde{r} < 9$). Model VEqCM można sformułować w postaci:

$$\Delta x_t = \alpha \beta' x_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t,$$

gdzie α jest macierzą $p \times r$, β' jest macierzą $r \times p$. Wektor D_t nie zawiera zmiennych przełącznikowych podtrzymanych (ang. *shift dummies*), dlatego nie wpływa na ilość oraz postać r relacji kointegrujących $\beta' x_{t-1}$ powstałych w wyniku nałożenia restrykcji zredukowanego rzędu (Juselius (2003)).

Tabele 10 i 11 przedstawiają statystyki testu śladu dla modelu podstawowego oraz rozszerzonego. Wyniki testu śladu pozwalają wywnioskować, że w modelu podstawowym jest $r=4$ relacji kointegrujących, a w modelu rozszerzonym jest $\tilde{r}=6$ relacji kointegrujących.

Tabela 10: Test śladu dla modelu podstawowego

$p-r$	r	Eig. Value	Trace	Trace*	Frac95	P-Value
4	3	0.3060	78.3730	77.1889	53.9446	0.0001
3	4	0.1544	33.4357	33.0744	35.0704	0.0754
2	5	0.0828	12.8092	12.7249	20.1637	0.3876

Tabela 11: Test śladu dla modelu rozszerzonego

$p-r$	r	Eig. Value	Trace	Trace*	Frac95	P-Value
4	5	0.2878	75.2309	74.0942	53.9446	0.0002
3	6	0.1556	33.4769	33.1151	35.0704	0.0747
2	7	0.0811	12.6707	12.5873	20.1637	0.3991

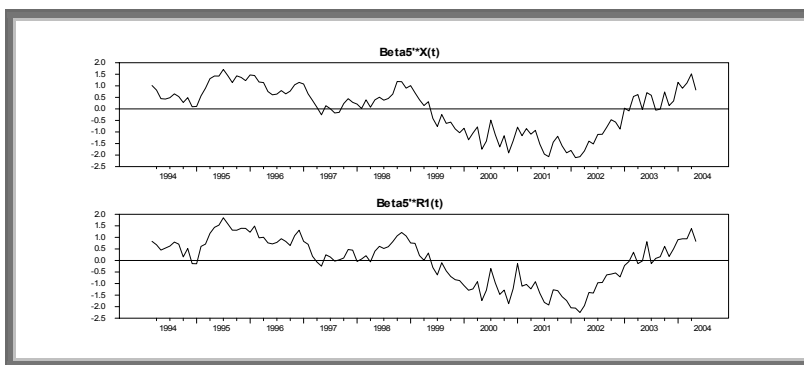
Moc testu śladu nie jest wysoka dla pierwiastków w pobliżu koła jednostkowego, dlatego w celu sprawdzenia liczby relacji kointegrujących należy posłużyć się serią mniej formalnych testów dodatkowych (Juselius (2003)).

Obserwacja Wykresów 19 i 20 pierwiastków macierzy pomocniczej pokazuje, że wraz ze zwiększeniem rzędu macierzy Π z $r=4$ do $r=5$ zwiększa się liczba pierwiastków jednostkowych (ang. *unit roots*). Podobnie dla macierzy $\tilde{\Pi}$ zwiększenie rzędu z $\tilde{r}=6$ do $\tilde{r}=7$ daje jeden dodatkowy pierwiastek w okolicy koła jednostkowego. Zatem rząd kointegracji wynosi odpowiednio $r=4$ oraz $\tilde{r}=6$.

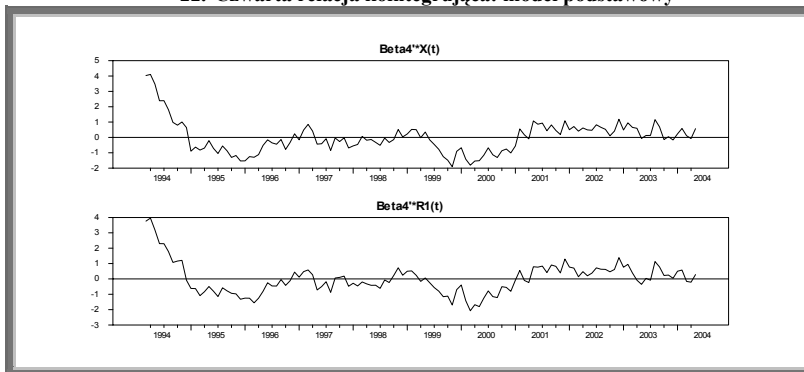
Wykresy 21 – 24 prezentujące stabilność wektorów $\beta^1 x_{t-1}$ oraz $\tilde{\beta}^1 x_{t-1}^S$ pokazują, że relacje kointegrujące stają się stacjonarne, gdy zmniejsza się liczbę wektorów kointegrujących z $r=5$ do $r=4$ oraz z $\tilde{r}=7$ do $\tilde{r}=6$. Stad rząd kointegracji wynosi zatem $r=4$ oraz $\tilde{r}=6$.

3

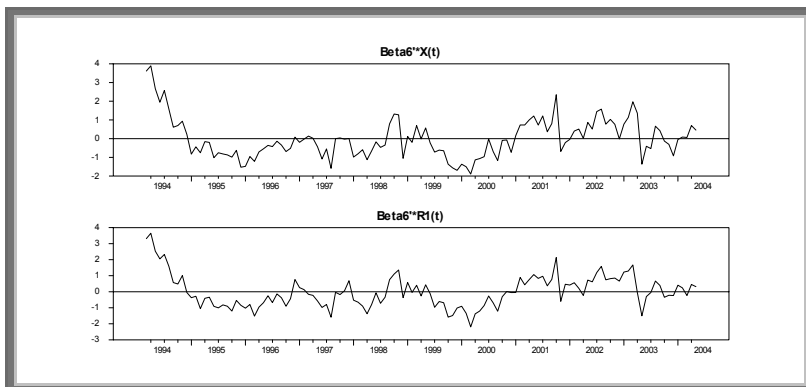
21. Piąta relacja kointegrująca: model podstawowy



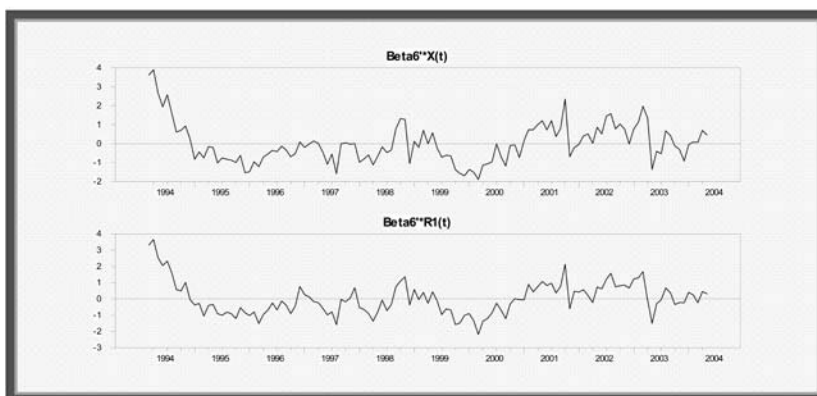
22. Czwarta relacja kointegrująca: model podstawowy



23. Siódma relacja kointegrująca: model rozszerzony



24. Szósta relacja kointegrująca: model rozszerzony.



Wykres 12 rekursywnego testu śladu dla modelu podstawowego siedmiu zmiennych pokazuje cztery liniowo rosnące linie i trzy stałe. Potwierdza to stwierdzenie, że $r = 4$. Wykres rekursywnego testu śladu nie jest dostępny w CATS in RATS dla dziewięciu zmiennych.

Macierze β' , $\Pi = \alpha\beta'$ dla $r = 4$ oraz $\tilde{\beta}$, $\Pi = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}'$ dla $r = 6$ uzyskane w wyniku estymacji zredukowanego rzędu modelu I(1) podane są w Tabelach 12 – 15. Prezentacja macierzy α i $\tilde{\alpha}$ została pominięta. Pogrubione zostały te parametry, dla których wartości statystyki t-studenta $|t| \geq 1,5$:

Tabela 12: Macierz β' otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu

	PPP	DPEU	DPUS	BUS	BEU	OUS	OEU
Beta1	1.0000	386.3701	-224.4220	337.6564	-277.7477	-3.2496	42.9115
Beta2	0.0017	1.0000	4.0280	16.1601	-5.4398	-1.0464	-1.1412
Beta3	0.0008	0.7822	1.0000	-5.3704	-1.1537	0.8811	2.9724
Beta4	0.0014	-0.0334	0.0377	1.0000	-0.9724	-0.4600	0.9185

Tabela 13: Macierz $\tilde{\beta}'$ otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu

	PPP	DPEU	DPUS	BUS	BEU	OUS	OEU	DSUS	DSEU
Beta1	1.0000	361.6824	-225.1405	413.0088	-251.1306	17.2434	-49.6145	3.4401	-4.7996
Beta2	-0.0101	1.0000	3.6141	12.0146	-6.8210	-1.3566	2.5967	0.2407	-0.0553
Beta3	0.0117	0.8720	1.0000	3.6682	-1.2042	-0.7584	0.3940	-0.2721	0.1765
Beta4	-0.0000	-0.1028	0.0330	1.0000	0.2451	0.0814	-0.8399	0.0055	-0.0164
Beta5	-0.0005	0.4326	0.4406	-3.3850	1.0000	1.2502	-0.5899	-0.0080	-0.0195
Beta6	-0.0041	-0.0008	-0.2267	-2.2733	2.5241	1.0000	-2.3399	0.0024	0.0136

Na macierze β' , $\tilde{\beta}'$ składają się znormalizowane wektory własne otrzymanymi w wyniku estymacji zredukowanego rzędu. Każdy z wektorów macierzy zawiera współczynniki pewnej kombinacji liniowej zmiennych modelu. Każda taka kombinacja powinna być stacjonarna. Dlatego macierze β' , $\tilde{\beta}'$ interpretuje się jako macierze relacji długookresowych pomiędzy zmiennymi modelu.

Tabela 14: Macierz Π otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu

	PPP	DPEU	DPUS	BUS	BEU	OUS	OEU
DPPP	0.0085 (1.2896)	-0.8415 (-0.5664)	-2.8441 (-2.1585)	3.1163 (0.5042)	-2.8516 (-0.6810)	-3.0939 (-1.6301)	3.9766 (0.9913)
DDPEU	-0.0022 (-5.4577)	-0.9400 (-10.5452)	0.1428 (1.8064)	-0.7189 (-1.9383)	0.9189 (3.6574)	-0.0819 (-0.7189)	-0.3600 (-1.4957)
DDPUS	0.0005 (1.1635)	0.1694 (1.6786)	-0.8805 (-9.8356)	-0.3182 (-0.7577)	0.6674 (2.3460)	0.0005 (0.0041)	-0.6329 (-2.3223)
DBUS	0.0001 (2.5349)	0.0312 (2.6834)	-0.0077 (-0.7464)	0.0346 (0.7157)	-0.0657 (-2.0059)	-0.0131 (-0.8813)	0.0562 (1.7907)
DBEU	0.0002 (4.9021)	0.0227 (2.4926)	0.0054 (0.6650)	0.2150 (5.6757)	-0.1310 (-5.1047)	-0.0521 (-4.4803)	0.0721 (2.9349)
DOUS	0.0000 (0.2471)	-0.0006 (-0.0769)	-0.0041 (-0.6026)	0.1907 (5.9051)	-0.0066 (-0.3029)	-0.0199 (-2.0100)	-0.0683 (-3.2588)
DOEU	-0.0001 (-3.3632)	0.0029 (0.2975)	0.0048 (0.5458)	0.0155 (0.3792)	0.0901 (3.2495)	0.0375 (2.9844)	-0.1321 (-4.9754)

Tabela 15: Macierz $\tilde{\Pi}$ otrzymana w wyniku estymacji zredukowanego rzędu

	PPP	DPEU	DPUS	BUS	BEU	OUS	OEU	DSUS	DSEU
DPPP	0.0159 (2.28)	-0.7884 (-0.5322)	-2.8521 (-2.1859)	1.4946 (0.2394)	-2.3758 (-0.5816)	-3.1084 (-1.6235)	4.3946 (1.0912)	-0.1593 (-1.6125)	0.0707 (0.9185)
DDPEU	-0.0020 (-4.1394)	-0.9398 (-10.5038)	0.1400 (1.7762)	-0.7797 (-2.0683)	0.9441 (3.8273)	-0.0764 (-0.6607)	-0.3563 (-1.4649)	-0.0055 (-0.9261)	0.0025 (0.5417)
DDPUS	0.0008 (1.5368)	0.1764 (1.7344)	-0.8830 (-9.8597)	-0.2864 (-0.6685)	0.6391 (2.2795)	0.0204 (0.1551)	-0.6510 (-2.3552)	0.0001 (0.0212)	-0.0021 (-0.3984)
DBEU	0.0002 (3.7597)	0.0215 (2.3490)	0.0061 (0.7532)	0.2061 (5.3422)	-0.1281 (-5.0747)	-0.0543 (-4.5919)	0.0776 (3.1176)	-0.0001 (-0.2118)	0.0004 (0.8040)
DBUS	0.0001 (2.589)	0.0301 (2.5789)	-0.0075 (-0.7269)	0.0221 (0.4494)	-0.0611 (-1.9016)	-0.0155 (-1.0297)	0.0619 (1.9528)	-0.0006 (-0.7077)	0.0007 (1.0998)
DOEU	-0.0001 (-1.7427)	0.0050 (0.5148)	0.0042 (0.4903)	0.0267 (0.6464)	0.0850 (3.1442)	0.0418 (3.2969)	-0.1398 (-5.2450)	0.0000 (0.0174)	-0.0007 (-1.3369)
DOUS	0.0000 (0.4639)	-0.0009 (-0.1219)	-0.0040 (-0.5819)	0.1875 (5.7083)	-0.0072 (-0.3336)	-0.0209 (-2.0757)	-0.0648 (-3.0561)	-0.0001 (-0.1962)	0.0002 (0.5764)
DDSEU	0.0472 (3.5388)	3.4108 (1.3718)	-4.8292 (-2.2053)	6.5839 (0.6285)	4.2342 (0.6177)	6.5856 (2.0495)	-17.1121 (-2.5316)	-0.0543 (-0.3276)	-0.7901 (-6.1120)
DDSUS	0.0594 (5.6332)	2.5477 (1.2966)	-2.3197 (-1.3405)	-13.1089 (-1.5834)	9.5050 (1.7545)	5.6331 (2.2183)	-9.7083 (-1.8175)	-1.0038 (-7.6602)	0.0961 (0.9407)

Interpretacja wyników estymacji zredukowanego rzędu została pominięta.

3.6 Testy pewnych właściwości zmiennych modelu

Poniżej będą omówione pewne właściwości zmiennych modelu: wyłączalność z przestrzeni kointegrującej, stacjonarność i słaba egzogeniczność. Hipotezę, że dana zmienna wpływa na długookresowe relacje kointegrujące zawarte w macierzy β , ale w tym samym czasie nie ulega wpływowi innych zmiennych układu nazywa się hipotezą słabej egzogeniczności tej zmiennej (Juselius (2003)).

Tabela 16: Testy właściwości zmiennych modelu: model podstawowy

	R	stopnie swobody	ppp_t	$\Delta p_{eu,t}$	$\Delta p_{us,t}$	beu_t	bus_t	oeu_t	ous_t
wyłączalność	4	4	7.36	100.06	78.72	26.19	45.35	26.39	26.09
stacjonarność	4	3	25.44	13.58	6.82	39.00	38.20	41.72	31.19
słaba egzog.	4	4	8.25	73.22	59.87	27.80	9.05	20.58	39.34

Zmienne słabo egzogeniczne wpływają na pozostałe zmienne w układzie, w tym na długookresowe relacje równowagi pomiędzy nimi. To od nich pochodzą wspólne trendy

wodzące. Wyniki testów dotyczące modelu podstawowego pokazane w Tabelach 16 i 17 pokazują, że ppp_t i bus_t są zmiennymi słabo egzogenicznymi dla relacji kointegrujących podanych w Tabelach 19 i 21 (rozdział 3.7).

Tabela 17: Testy właściwości zmiennych modelu: model rozszerzony

	r	stop. swob.	ppp_t	Δpeu_t	Δpus_t	beu_t	bus_t	oeu_t	ous_t	Δseu_t	Δsus_t
wyłącz.	6	6	11.03	102.89	83.95	27.35	49.15	32.50	30.57	61.09	56.46
stacjon.	6	3	25.21	13.01	6.21	35.13	36.69	40.16	31.14	11.54	11.78
sł. egz.	6	6	10.80	74.47	59.41	28.43	10.22	23.68	40.01	50.47	57.89

Zmienne wyłączalne mogą być wykluczone z przestrzeni kointegrującej, tzn. nie wchodzą w żadne istotne relacje kointegrujące z pozostałymi zmiennymi. Jedyną taką zmienną jest ppp_t .

Zmiennymi stacjonarnymi w modelu podstawowym są Δpeu_t , Δpus_t (Tabela 16) oraz dodatkowo w modelu rozszerzonym Δseu_t , Δsus_t (Tabela 17). Zmienne te nie są wyłączalne. Wchodzą one w relacje długookresowe z innymi zmiennymi.

3.7 Testowanie relacji kointegrujących

Wyniki testów wybranych hipotez relacji kointegrujących przedstawionych w rozdziale 1 zaprezentowane są w Tabeli 18. Hipotezy oparte na parytetach międzynarodowych zostały jednak dla modelu kursu walutowego euro – dolar odrzucone. W H_1 zaprezentowany jest test stacjonarności spreadu inflacyjnego $\beta'_{H_1} x_t = b_1(\Delta peu_t - \Delta pus_t)$, jeden niezwiązany parametr $s_{H_1} = 1$. W H_2 testowana jest długookresowa równowaga pomiędzy spreadem inflacyjnym i spreadem długookresowej stopy procentowej $\beta'_{H_2} x_t = b_2(-\Delta peu_t + \Delta pus_t) + b_3(beu_t - bus_t)$, $s_{H_2} = 2$. Hipoteza H_3 sprawdza stacjonarność zależności pomiędzy spreadem inflacyjnym a spreadem krótkookresowej stopy procentowej $\beta'_{H_3} x_t = b_4(-\Delta peu_t + \Delta pus_t) + b_5(oeu_t - ous_t)$, $s_{H_3} = 2$. Hipotezy H_1 , H_2 , H_3 powinny zostać zasadniczo odrzucone na podstawie p-value. Relacja podana przez H_2 została jednak włączona do przestrzeni kointegrującej ze względu na swoją interpretację ekonomiczną.

Tabela 18: Testowanie hipotez dotyczących relacji kointegrujących: model podstawowy

	ppp_t	Δpeu_t	Δpus_t	beu_t	bus_t	oeu_t	ous_t	$\chi^2(v)$	p -value
H_1		1	-1					4.13(2)	0.1263
H_2		-6.25	6.25	1	-1			4.13(2)	0.1263
H_3		-6.85	6.85			1	-1	4.26(2)	0.1186
H_4		-1		1		-0.96		2.87(2)	0.2375
H_5			-1		1		-0.50	0.78(2)	0.6741
H_6	0.0003			-0.61		1	-0.35	0 DGF	no test

Pozostałe hipotezy H_4 , H_5 , H_6 zostały znalezione za pomocą wyszukiwarki relacji kointegrujących CATS in RATS. O ile dla relacji przedstawionych w H_4 $\beta'_{H_4} x_t = b_6(-\Delta peu_t + beu_t) + b_7(-oeu_t)$, $s_{H_4} = 2$ iw H_5 $\beta'_{H_5} x_t = b_8(-\Delta pus_t + bus_t) + b_9(-ous_t)$, $s_{H_5} = 2$ można znaleźć interpretacje ekonomiczną, to relacja H_6 $\beta'_{H_6} x_t = b_{10}ppp_t + b_{11}(-beu_t) + b_{12}oeu_t + b_{13}(-ous_t)$, $s_{H_6} = 4$ jest generyczna (ang. *generic cointegrating relation*).

Tabela 19: Relacje równowagi: model podstawowy

	ppp_t	Δpeu_t	Δpus_t	beu_t	bus_t	oeu_t	ous_t
β_1		-6.83	6.83	1	-1		
β_2		-1		1		-0.96	
β_3			-1		1		-0.50
β_4	0.0003			-0.61		1	-0.35

Test współczynnika wiarygodności dla łącznego testu z restrykcjami: H_2 , H_4 , H_5 , H_6 jest akceptowalny: p-value statystyki $\chi^2(7.10(6))$ jest równe 0.31. Macierz $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ relacji długookresowych w modelu podstawowym podana jest w Tabeli 19.

Tabela 20: Testowanie hipotez dotyczących relacji kointegrujących: model rozszerzony

	ppp_t	Δpeu_t	Δpus_t	beu_t	bus_t	oeu_t	ous_t	Δseu_t	Δsus_t	$\chi^2(v)$	p.val.
H_7								1	-1	4.32(3)	0.22
H_8						7.03	-7.03	1	-1	1.66(2)	0.43
H_9				7.89	-7.89			1	-1	0.78(2)	0.67
H_{10}	-0.06								1	0.12(2)	0.93
H_{11}						1.44		1.00		1.47(2)	0.47

Relacje kointegrujące znalezione dla modelu podstawowego zachowują się w modelu rozszerzonym. Tabela 20 przedstawia próby znalezienia dwóch dodatkowych relacji kointegrujących po włączeniu Δseu_t i Δsus_t do przestrzeni kointegrującej. Hipoteza H_8 przedstawia długookresową zależność pomiędzy spreadem krótkookresowej stopy procentowej i spreadem zwrotów z akcji $\tilde{\beta}'_{H_8} x_t = b_{14}(oeu_t - ous_t) + b_{15}(\Delta seu_t - \Delta sus_t)$, $s_{H_8} = 2$. Podobnie hipoteza H_9 przedstawia długookresową zależność pomiędzy spreadem długookresowej stopy procentowej i spreadem zwrotów z akcji $\tilde{\beta}'_{H_9} x_t = b_{16}(beu_t - bus_t) + b_{17}(\Delta seu_t - \Delta sus_t)$, $s_{H_9} = 2$. Również hipotezy stacjonarnej zależności H_{10} $\tilde{\beta}'_{H_{10}} x_t = b_{18}ppp_t + b_{19}\Delta sus_t$, $s_{H_{10}} = 2$ oraz H_{11} $\tilde{\beta}'_{H_{11}} x_t = b_{20}oeu_t + b_{21}\Delta seu_t$, $s_{H_{11}} = 2$ mogą zostać zaakceptowane.

Tabela 21: Relacje równowagi: model rozszerzony

	ppp_t	Δseu_t	Δsus_t	beu_t	bus_t	oeu_t	ous_t	Δseu_t	Δsus_t
$\tilde{\beta}_1$		-1	1	0.12	-0.12			-0.37	
$\tilde{\beta}_2$		1		-1		0.91			
$\tilde{\beta}_3$			1		-1		0.52		
$\tilde{\beta}_4$	0.0005			-0.61		1	-37		
$\tilde{\beta}_5$	-0.05								1
$\tilde{\beta}_6$						1.81		1.00	

Ze względu na wartość testu największej wiarygodności dla całej macierzy $\tilde{\beta}$ wybrane zostają relacje kointegrujące przedstawione w hipotezach H_{10} i H_{11} : p-value statystyki testowej wynosi 0.63 zatem jest akceptowalna. Macierz $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6)$ przedstawia Tabela 21.

3.8 Analiza struktury długookresowej

Po wyznaczeniu rzędu kointegracji i znalezieniu właściwych relacji kointegrujących w macierzach β i $\tilde{\beta}$ można wyznaczyć zidentyfikowane macierze Π i $\tilde{\Pi}$. Macierze α i $\tilde{\alpha}$, zawierają wyrazy, które interpretuje się jako siłę (prędkość) korekty wartości zmiennych w kierunku stanów równowagi zadanych przez kolejne wektory macierzy β i $\tilde{\beta}$. Macierze α i

β dla modelu podstawowego podane są w Tabelach 22 i 23. Macierze $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ dla modelu rozszerzonego podane są w Tabelach 24 i 25. Pogrubione zostały te wyrazy, dla których wartość statystyki t-studenta $|t| \geq 1,5$:

Tabela 22: Macierz β' zawierająca zidentyfikowane wektory kointegrujące

	PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
Beta1	0.0000	-6.8364	6.8364	1.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
Beta2	0.0000	-1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.9669	0.0000
Beta3	0.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-0.5065
Beta4	-0.0003	0.0000	0.0000	-0.6160	0.0000	1.0000	-0.3514

Tabela 23: Macierz α

	Alpha1	Alpha2	Alpha3	Alpha4
DPPP	0.2437 (0.2253)	-1.0985 (-0.1468)	4.5545 (0.6394)	4.6361 (0.6737)
DDPEU	-0.0815 (-1.2310)	1.4698 (3.2115)	-0.6878 (-1.5786)	1.2555 (2.9830)
DDPUS	-0.1949 (-2.6396)	1.1757 (2.3027)	-0.4364 (-0.8978)	0.5359 (1.1413)
DBEU	0.0369 (5.5445)	-0.2747 (-5.9668)	0.2475 (5.6471)	-0.2026 (-4.7839)
DBUS	0.0024 (0.2736)	-0.0436 (-0.7322)	0.0225 (0.3967)	-0.0108 (-0.1967)
DOEU	0.0067 (0.9020)	-0.0547 (-1.0587)	0.0433 (0.8806)	-0.1470 (-3.0922)
DOUS	0.0325 (5.7365)	-0.2211 (-5.6426)	0.2255 (6.0465)	-0.2778 (-7.7102)

Na podstawie macierzy β' (Tabela 22) można sformułować równania zależności długookresowych pomiędzy zmiennymi. W równaniach tych podano również statystycznie istotne stałe (ang. *intercepts*). Pierwszy wektor kointegrujący przedstawia następującą zależność:

$$(beu_t - bus_t) = 6.8364(\Delta peu_t - \Delta pus_t) + 0.0021 + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

ε_t jest składnikiem losowym. Wzrost wielkości spreadu inflacji pomiędzy strefą euro i USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost wielkości spreadu oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych pomiędzy strefą euro i USA o 6.8385 p.p. w ciągu tego samego miesiąca.

Na podstawie drugiego wektora kointegrującego można sformułować następującą zależność:

$$beu_t = \Delta p e u_t + 0.9667 o e u_t + \varepsilon_t. \quad (3.4)$$

Na podstawie równania (3.4) zmiana cen w strefie euro o 1% w ciągu miesiąca powoduje zmianę oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. w ciągu tego samego miesiąca. Ponadto wzrost oprocentowania depozytu overnight o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost długookresowej stopy procentowej o 0.9667 p.p. w tym samym miesiącu. Ta zależność jest potwierdzeniem sformułowanej w równaniach (1.5) i (1.6) hipotezy oczekiwań dla struktury terminowej stopy procentowej w strefie euro.

Trzeci wektor kointegrujący przedstawia podobną zależność dla USA:

$$bus_t = \Delta p u s_t + 0.5065 o u s_t + 0.0011 + \varepsilon_t. \quad (3.5)$$

Tutaj podobnie, inflacja rzędu 1% miesięcznie powoduje wzrost długookresowej stopy procentowej o 1 p.p. miesięcznie. Natomiast wzrost oprocentowania depozytu overnight o 1 p.p. miesięcznie powoduje wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 0.5076 p.p. miesięcznie. W przypadku USA hipoteza oczekiwań dla struktury terminowej stopy procentowej nie jest spełniona.

Czwarty wektor kointegrujący przedstawia następującą zależność:

$$o e u_t = 0.0003 p p p_t + 0.6160 b e u_t + 0.3514 o u s_t - 0.0010 + \varepsilon_t \quad (3.6)$$

Wzrost logarytmu realnego kursu walutowego dolar - euro o 1 w ciągu danego miesiąca powoduje spadek oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 0.07 p.p. w ciągu tego samego miesiąca. Ponadto wzrost długookresowej stopy procentowej w strefie euro o 1 p.p. miesięcznie powoduje miesięczny wzrost krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro o 0.5160 p.p. w ciągu tego samego miesiąca. Natomiast wzrost oprocentowania depozytu overnight w USA o 1 p.p. miesięcznie powoduje wzrost oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 0.2514 p.p. miesięcznie.

Na podstawie macierzy α można wnioskować, że inflacja w strefie euro - $\Delta p e u_t$, oraz w USA - $\Delta p u s_t$ i długookresowe stopy procentowe w strefie euro - $b e u_t$, oraz krótkookresowe stopy procentowe w USA - $o u s_t$, po wystąpieniu ewentualnych zaburzeń silnie korygują wartości tych zmiennych w kierunku stanów równowagi wyznaczonych przez wektory macierzy β . Inaczej mówiąc wszelkie zaburzenia dotyczące tych zmiennych będą szybko zredukowane i zmienne dostosują się do poziomów wyznaczonych przez równowagi długookresowe. Natomiast realny kurs walutowy dolar – euro - $p p p_t$, oraz długookresowa

stopa procentowa w USA - bus_t , nie dostosowują się do długookresowych stanów równowagi. To pozostałe zmienne dostosowują się do zmian ppp_t i bus_t . Zatem ppp_t i bus_t są kandydatami na te zmienne, które będą identyfikować wspólne trendy wodzące. Ciekawym spostrzeżeniem jest, że o ile długookresowe stopy procentowe w USA - bus_t , nie ulegają wpływowi zaburzeń innych zmiennych, to długookresowe stopy procentowe w strefie euro - beu_t , silnie dostosowują się do wszelkich zaburzeń w układzie.

Tabela 24: Macierz $\tilde{\beta}$ zawierająca zidentyfikowane wektory kointegrujące

	PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS	DSEU	DSUS
Beta1	0.0000	-1.0000	1.0000	0.1228	-0.1228	0.0000	0.0000	-0.0372	0.0000
Beta2	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	0.9066	0.0000	0.0000	0.0000
Beta3	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	0.5234	0.0000	0.0000
Beta4	-0.0005	0.0000	0.0000	-0.6128	0.0000	1.0000	-0.3765	0.0000	0.0000
Beta5	-0.0520	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
Beta6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.8195	0.0000	1.0000	0.0000

Tabela 25: Macierz $\tilde{\alpha}$

	Alpha1	Alpha2	Alpha3	Alpha4	Alpha5	Alpha6
DPPP	-0.8102 (-0.1109)	-1.3303 (-0.1792)	-2.2195 (-0.3149)	6.7589 (0.9697)	-0.1418 (-1.4453)	0.0186 (0.0691)
DDPEU	-0.6572 (-1.4596)	-1.5691 (-3.4311)	0.7829 (1.8028)	1.3099 (3.0504)	-0.0055 (-0.9163)	-0.0225 (-1.3553)
DDPUS	-1.2931 (-2.5638)	-1.1306 (-2.2068)	0.3971 (0.8164)	0.4591 (0.9543)	-0.0008 (-0.1141)	-0.0492 (-2.6512)
DBEU	0.2437 (5.3934)	0.2656 (5.7863)	-0.2388 (-5.4803)	-0.1811 (-4.2011)	-0.0002 (-0.3232)	0.0095 (5.7090)
DBUS	0.0118 (0.2022)	0.0383 (0.6449)	-0.0178 (-0.3163)	0.0070 (0.1259)	-0.0006 (-0.8066)	0.0012 (0.5812)
DOEU	0.0484 (0.9597)	0.0596 (1.1638)	-0.0470 (-0.9671)	-0.1610 (-3.3486)	0.0001 (0.1782)	0.0009 (0.4828)
DOUS	0.2179 (5.6348)	0.2169 (5.5228)	-0.2215 (-5.9407)	-0.2640 (-7.1590)	-0.0000 (-0.0224)	0.0082 (5.7860)
DDSEU	-1.4477 (-0.1156)	1.2773 (0.1004)	-3.0178 (-0.2499)	-22.1351 (-1.8537)	-0.0776 (-0.4619)	-0.8041 (-1.7454)
DDDSUS	-17.0381 (-1.7440)	-14.6800 (-1.4793)	14.6058 (1.5500)	4.5734 (0.4908)	-1.0124 (-7.7212)	-0.5276 (-1.4676)

Wektory kointegrujące macierzy $\tilde{\Pi}$: drugi, trzeci i czwarty są (być może z dokładnością do współczynników i stałej) takie same jak w przypadku macierzy Π . Zmianie ulega natomiast pierwszy wektor kointegrujący. Przedstawia on następującą zależność:

$$(\Delta peu_t - \Delta pus_t) = 0.1228(beu_t - bus_t) + 0.0372\Delta sus_t + \varepsilon_t. \quad (3.7)$$

W porównaniu z równaniem (3.3) w tym przypadku zmienność spreadu inflacyjnego pomiędzy strefą euro i USA została objaśniona nie tylko spreadem długookresowej stopy procentowej pomiędzy strefą euro i USA, ale także zmianą indeksu giełdowego DJIA w USA. Zmiany w spreadzie długookresowej stopy procentowej o 1 p.p. miesięcznie powodują zmianę spreadu inflacyjnego rzędu 0.1228 p.p. miesięcznie. Ponadto wzrost indeksu DJIA o 1% miesięcznie powoduje wzrost spreadu inflacyjnego pomiędzy strefą euro i USA o 0.0372 p.p. miesięcznie. Zmiany indeksów giełdowych w strefie euro nie wpływają na spread inflacyjny.

Na podstawie piątego wektora kointegrującego macierzy $\tilde{\beta}$ zachodzi następująca długookresowa zależność pomiędzy logarytmem realnego kursu walutowego dolar – euro a indeksem giełdowym DJIA w USA:

$$\Delta sus_t = 0.0520 ppp_t + \varepsilon_t. \quad (3.8)$$

Na podstawie równania (3.8) miesięczna zmiana logarytmicznego realnego kursu walutowego dolar – euro o 1 powoduje miesięczną zmianę indeksu DJIA o 5.20%. Ze względu na w zasadzie akceptowalną wartość statystyki t-studenta równą -1.45 dla parametru odpowiadającego sile oddziaływania realnego kursu walutowego na zmiany piątego wektora kointegrującego, równanie (3.8) można zapisać w postaci:

$$ppp_t = 19.2308 \Delta sus_t + \varepsilon_t. \quad (3.9)$$

Równanie (3.9) jest potwierdzeniem hipotezy postawionej w pracy, że przepływy kapitałowe mierzone zmianami indeksów giełdowych wpływają na kurs walutowy. W przypadku analizy realnego kursu walutowego dolar – euro tylko indeks giełdowy w USA wpływa na ten kurs. Zmiana miesięczna indeksu DJIA o 1% powoduje zmianę logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro o 0.1923.

Na podstawie szóstego wektora kointegrującego macierzy $\tilde{\beta}$, pomiędzy krótkookresową stopą procentową w strefie euro i indeksem giełdowym w strefie euro zachodzi długookresowa zależność:

$$\Delta seu_t = 1.8195 oeu_t + \varepsilon_t. \quad (3.10)$$

Wzrost oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. miesięcznie powoduje wzrost indeksu giełdowego w strefie euro o 1.8195% miesięcznie.

Do macierzy $\tilde{\beta}$ nie zostały włączone dwie ważne i pojedynczo akceptowalne relacje kointegrujące zawierające zwroty z indeksów giełdowych (Tabela 20):

$$(\Delta se_{it} - \Delta sus_{it}) = -7.03(oe_{it} - ous_{it}) + \varepsilon_{it} \quad (3.11)$$

oraz

$$(\Delta se_{it} - \Delta sus_{it}) = -7.89(be_{it} - bus_{it}) + \varepsilon_{it} \quad (3.12)$$

Na podstawie równania (3.11) spadek spreadu stopy overnight pomiędzy w strefą euro i USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca oznacza wzrost spreadu zwrotu z indeksów giełdowych w strefie euro i USA o 7.03 p.p. miesięcznie. Ponadto na podstawie równania (3.12) spadek spreadu długookresowej stopy procentowej pomiędzy strefą euro i USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca oznacza wzrost spreadu zwrotu z indeksów giełdowych pomiędzy strefą euro i USA o 7.89 p.p. miesięcznie. Ten wynik stanowi w pewnym sensie potwierdzenie zjawiska zagadki premii akcyjnej oraz zagadki zmienności cen akcji i obligacji sformułowanych w rozdziale 1.2.

W przypadku macierzy $\tilde{\alpha}$ wartości Δsus_{it} po wystąpieniu ewentualnych zaburzeń wracają z dużą siłą do stanu równowagi ustalonego przez wektory kointegrujące: pierwszy, trzeci i piąty. Natomiast Δse_{it} koryguje w kierunku równowag zadanych przez wektory kointegrujące: czwarty i szósty. Zwroty z indeksów giełdowych są zmiennymi silnie dostosowującymi się do poziomu długookresowej równowagi wyznaczonego przez zmienne układu. Zaburzenia dotyczące Δse_{it} i Δsus_{it} nie powinny mieć długookresowego wpływu na ich poziom. Natomiast zaburzenia dotyczące pozostałych zmiennych rozpinających przestrzeń kointegrującą w macierzy $\tilde{\beta}$ zmieniają długookresową równowagę układu. Zmienne Δse_{it} oraz Δsus_{it} będą się szybko dostosowywać się do tej nowej równowagi.

Dla zidentyfikowanych macierzy α , β , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ w Tabelach 26 i 27 podane są macierze $\Pi = \alpha\beta'$ oraz $\tilde{\Pi} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}'$. Dodatkowo podano w tych tabelach wektory stałych Φ' oraz $\tilde{\Phi}'$. Obok pogrubionych wyrazów, dla których wartość statystyki t-studenta $|t| \geq 1,5$, wyróżniony został także parametr przy Δsus_{it} , dla którego statystyka $t = -1.4453$. Wobec występowania ppp_t i Δsus_{it} w tej samej zależności kointegrującej należy uznać ten parametr za istotny.

Tabela 26: Zidentyfikowana macierz Π . Wektor stałej Φ' .

	PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
DPPP	-0.0016 (-0.6737)	-0.5676 (-0.3911)	-2.8884 (-2.1800)	-3.7104 (-1.1039)	4.3108 (0.7111)	5.6982 (1.6393)	-3.9359 (-2.0565)
DDPEU	-0.0004 (-2.9830)	-0.9129 (-10.2865)	0.1309 (1.6153)	0.6150 (2.9915)	-0.6063 (-1.6354)	-0.1656 (-0.7792)	-0.0928 (-0.7928)
DDPUS	-0.0002 (-1.1413)	0.1565 (1.5802)	-0.8958 (-9.9093)	0.6507 (2.8373)	-0.2415 (-0.5839)	-0.6009 (-2.5335)	0.0327 (0.2505)
DBEU	0.0001 (4.7839)	0.0224 (2.5090)	0.0048 (0.5906)	-0.1131 (-5.4661)	0.2106 (5.6464)	0.0631 (2.9492)	-0.0542 (-4.6020)
DBUS	0.0000 (0.1967)	0.0275 (2.3809)	-0.0064 (-0.6054)	-0.0346 (-1.2938)	0.0201 (0.4173)	0.0314 (1.1346)	-0.0076 (-0.4994)
DOEU	0.0000 (3.0922)	0.0086 (0.8621)	0.0028 (0.3010)	0.0426 (1.8329)	0.0366 (0.8738)	-0.0941 (-3.9182)	0.0297 (2.2467)
DOUS	0.0001 (7.7102)	-0.0011 (-0.1420)	-0.0034 (-0.4846)	-0.0175 (-0.9921)	0.1930 (6.0815)	-0.0640 (-3.5193)	-0.0166 (-1.6578)
WEKTOR Φ'							
DPPP	-0.0010 (-0.0538)	0.0024 (2.2335)	0.0016 (1.3184)	-0.0006 (-5.4937)	-0.0000 (-0.3297)	-0.0002 (-1.8156)	-0.0006 (-6.8666)

Tabela 27: Zidentyfikowana macierz $\tilde{\Pi}$. Wektor stałej $\tilde{\Phi}'$.

	PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS	DSEU	DSUS
DPPP	0.0037 (0.6581)	-0.5201 (-0.3600)	-3.0297 (-2.3155)	-2.9108 (-0.8386)	2.3190 (0.3760)	5.5866 (1.5594)	-3.7064 (-1.9274)	0.0487 (0.6451)	-0.1418 (-1.4453)
DDPEU	-0.0004 (-1.2101)	-0.9120 (-10.2450)	0.1257 (1.5596)	0.6858 (3.2068)	-0.7022 (-1.8480)	-0.1536 (-0.6958)	-0.0835 (-0.7044)	0.0020 (0.4246)	-0.0055 (-0.9163)
DDPUS	-0.0002 (-0.5345)	0.1625 (1.6297)	-0.8960 (-9.9219)	0.6906 (2.8825)	-0.2384 (-0.5600)	-0.6555 (-2.6512)	0.0350 (0.2638)	-0.0011 (-0.2184)	-0.0008 (-0.1141)
DBEU	0.0001 (3.0991)	0.0219 (2.4490)	0.0049 (0.6009)	-0.1247 (-5.8111)	0.2089 (5.4784)	0.0770 (3.4764)	-0.0568 (-4.7800)	0.0004 (0.9286)	-0.0002 (-0.3232)
DBUS	0.0000 (0.6448)	0.0265 (2.2905)	-0.0060 (-0.5742)	-0.0411 (-1.4818)	0.0164 (0.3320)	0.0440 (1.5358)	-0.0120 (-0.7785)	0.0008 (1.3428)	-0.0006 (-0.8066)
DOEU	0.0001 (2.0764)	0.0112 (1.1248)	0.0014 (0.1504)	0.0450 (1.8796)	0.0411 (0.9656)	-0.1053 (-4.2628)	0.0360 (2.7145)	-0.0009 (-1.7340)	0.0001 (0.1782)
DOUS	0.0001 (4.8036)	-0.0010 (-0.1258)	-0.0037 (-0.5312)	-0.0284 (-1.5454)	0.1948 (5.9694)	-0.0524 (-2.7632)	-0.0165 (-1.6265)	0.0001 (0.3346)	-0.0000 (-0.0224)
DDSEU	0.0160 (1.6559)	2.7250 (1.1009)	-4.4655 (-1.9922)	12.1088 (2.0363)	3.1955 (0.3024)	-22.4402 (-3.6563)	6.7547 (2.0503)	-0.7503 (-5.8020)	-0.0776 (-0.4619)
DDSUS	0.0501 (6.6490)	2.3581 (1.2208)	-2.4323 (-1.3905)	9.7858 (2.1088)	-12.5140 (-1.5177)	-9.6961 (-2.0245)	5.9224 (2.3037)	0.1057 (1.0476)	-1.0124 (-7.7212)
WEKTOR $\tilde{\Phi}'$									
DPPP	0.0051 (0.2830)	0.0025 (2.2791)	0.0016 (1.2579)	-0.0006 (-5.1954)	-0.0000 (-0.1629)	-0.0002 (-1.9506)	-0.0006 (-6.7130)	-0.0180 (-0.5842)	0.0294 (1.2239)

Interpretacja wyników zawartych w macierzach Π oraz $\tilde{\Pi}$ została przedstawiona w rozdziale 3.10.

3.9 Analiza *impulse – response* i wspólne trendy wodzące

Reprezentacja średnich ruchomych (ang. *moving average representation*) modelu VEqCM dana jest równaniem:

$$x_t = C \sum \varepsilon_i + x_0^*$$

gdzie $C = \tilde{\beta}_\perp \alpha'_\perp = \beta_\perp (\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp$ jest macierzą wymiaru $p \times p$, $x_0^* = Cx_0$ i x_0 jest wektorem wartości początkowych. Macierze $\alpha_\perp, \tilde{\beta}_\perp, C$ oraz $\tilde{\alpha}_\perp, \tilde{\beta}_\perp, \tilde{C}$ można najpierw wyznaczyć dla zidentyfikowanych w rozdziale 3.8 macierzy α, β oraz $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ (Tabela 28 – 35):

Tabela 28: Niezidentyfikowana macierz α_\perp

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
-0.0172	0.0427	0.0663	1.0000	0.0429	-0.5957	-0.3816
0.0048	0.0173	-0.0063	0.3477	0.0878	1.0000	-0.6396
-0.0029	0.0323	0.0065	-0.0200	1.0000	-0.0199	0.0960

Określając rząd kointegracji w modelu podstawowym $r = 4$ ustalono liczbę $p - r = 3$ wspólnych trendów wodzących. Wyrazy macierzy α_\perp wskazują, z jaką siłą poszczególne zmienne wpływają na dekompozycję tych trendów. Liczba wspólnych trendów wodzących w modelu rozszerzonym nie zmienia się.

Tabela 29: Macierz $\tilde{\beta}_\perp$

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
-37.2627	0.2059	0.1882	0.0512	-0.0699	-0.1601	-0.5097
38.6587	0.3792	0.2948	0.7256	0.1482	0.3583	-0.2893
-45.6501	-0.3990	-0.4197	0.8519	0.7110	1.2937	2.2321

Tabela 30: Macierz C dla niezidentyfikowanej macierzy α_{\perp}

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
0.9607	-2.3949	-3.0121	-22.9063	-43.8554	61.7681	-14.8878
-0.0005	0.0025	0.0087	0.3458	-0.3569	0.2645	-0.3594
-0.0006	-0.0004	0.0079	0.2991	-0.3857	0.1910	-0.3006
0.0001	0.0422	0.0043	0.2864	0.9178	0.6782	-0.4019
-0.0002	0.0225	-0.0010	-0.0327	0.7210	0.1757	0.0001
0.0007	0.0411	-0.0045	-0.0614	1.3183	0.4278	-0.0439
0.0008	0.0452	-0.0175	-0.6550	2.1849	-0.0302	0.5937

Tabela 31: Wartości statystyki t-studenta dla macierzy C z Tabeli 30

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
33.0942	-0.9864	-1.5604	-0.7978	-0.6565	1.7637	-0.8691
-6.4708	0.3530	1.5518	4.1539	-1.8429	2.6049	-7.2366
-7.7524	-0.0629	1.5691	3.9894	-2.2110	2.0883	-6.7198
0.6098	2.2551	0.2902	1.2931	1.7811	2.5103	-3.0412
-1.2238	2.0851	-0.1137	-0.2557	2.4263	1.1277	0.0016
2.9757	2.0762	-0.2867	-0.2624	2.4199	1.4979	-0.3143
2.4160	1.5408	-0.7514	-1.8862	2.7042	-0.0713	2.8656

Wyrazy umieszczone w kolumnach macierzy C w Tabeli 31 mierzą całkowity długookresowy wpływ skumulowanych zaburzeń (ang. *cumulated shocks*) dotyczących wartości danej zmiennej na wszystkie pozostałe zmienne w układzie. Rzędy macierzy C pokazują natomiast, które ze zmiennych wpływają na trend stochastyczny odpowiadający zmiennej z tego rzędu (Juselius, MacDonald (2004)). Na podstawie Tabeli 31 zmiennymi, których zaburzenia najbardziej wpływają na pozostałe zmienne w modelu są ppp_t , bus_t oraz oeu_t .

Tabela 32: Niezidentyfikowana macierz $\tilde{\alpha}_{\perp}$

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS	DSEU	DSUS
1.0000	-4.8038	-5.0333	-114.4343	1.9977	-34.4220	87.5636	0.0393	-0.0971
-0.9593	1.0000	2.8702	30.5929	-9.4175	-78.7670	9.4627	0.0559	0.1129
-0.4626	3.6074	1.0000	6.4700	100.1830	-9.0312	2.8802	0.0973	-0.0281

Tabela 33: Macierz $\tilde{\beta}_\perp$

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS	DSEU	DSUS
-0.0730	-0.0040	-0.0035	-0.0041	-0.0001	-0.0001	0.0065	0.0001	-0.0038
-0.7111	-0.0014	-0.0002	-0.0083	-0.0032	-0.0076	-0.0058	0.0139	-0.0370
-0.6879	-0.0039	-0.0049	0.0080	0.0070	0.0131	0.0227	-0.0238	-0.0357

Tabela 34: Macierz \tilde{C} dla niezidentyfikowanej macierzy $\tilde{\alpha}_\perp$

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS	DSEU	DSUS
0.9274	-2.8420	-2.3614	-17.8499	-62.3689	64.7355	-15.1032	-0.1095	-0.0538
-0.0009	0.0038	0.0123	0.3893	-0.3837	0.2798	-0.3731	-0.0006	0.0003
-0.0010	-0.0011	0.0120	0.3612	-0.4938	0.1827	-0.3222	-0.0006	0.0005
0.0002	0.0400	0.0046	0.2626	0.8685	0.7195	-0.4106	0.0002	-0.0008
-0.0002	0.0225	-0.0018	-0.0433	0.7333	0.1953	-0.0185	0.0005	-0.0006
0.0012	0.0399	-0.0084	-0.1397	1.3812	0.4850	-0.0413	0.0008	-0.0012
0.0015	0.0450	-0.0265	-0.7728	2.3445	0.0241	0.5802	0.0021	-0.0019
-0.0022	-0.0726	0.0153	0.2542	-2.5131	-0.8824	0.0751	-0.0015	0.0022
0.0482	-0.1477	-0.1227	-0.9275	-3.2409	3.3639	-0.7848	-0.0057	-0.0028

Tabela 35: Wartości statystyki t-studenta dla macierzy \tilde{C} z Tabeli 34

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS	DSEU	DSUS
16.3442	-1.0922	-1.0594	-0.5458	-0.8046	1.7083	-0.8024	-0.6816	-0.3336
-5.2223	0.4897	1.8505	4.0030	-1.6650	2.4835	-6.6671	-1.2772	0.7130
-6.0786	-0.1380	1.8390	3.7598	-2.1688	1.6412	-5.8283	-1.3243	0.9503
0.5009	2.2419	0.3035	1.1718	1.6353	2.7711	-3.1833	0.1397	-0.6913
-0.9517	2.0623	-0.1958	-0.3157	2.2553	1.2284	-0.2347	0.7384	-0.8192
2.7209	1.9955	-0.4911	-0.5558	2.3184	1.6651	-0.2853	0.6823	-0.9840
2.2096	1.4436	-0.9919	-1.9714	2.5234	0.0530	2.5719	1.1138	-0.9927
-2.7209	-1.9955	0.4911	0.5558	-2.3184	-1.6651	0.2853	-0.6823	0.9840
16.3442	-1.0922	-1.0594	-0.5458	-0.8046	1.7083	-0.8024	-0.6816	-0.3336

Na podstawie Tabel 34 i 35 nowe zmienne w modelu rozszerzonym Δse_{it} i Δsus_{it} , nie wpływają na żaden ze wspólnych stochastycznych trendów wodzących. To potwierdza wcześniejsze ustalenia, że zmienne Δse_{it} i Δsus_{it} są stacjonarne (Tabela 19). Zatem nie zachodzą w ich reprezentacji średnich ruchomych podtrzymane zaburzenia (ang.: permanent shocks), które mogłyby mieć wpływ na poziom pozostałych zmiennych. Szczegółowa analiza macierzy C oraz \tilde{C} znajduje się w rozdziale 3.10.

Za pomocą macierzy Q wymiaru $(p-r) \times (p-r)$ dokonuje się identyfikacji macierzy C i jej rozkładu na:

$$C = \beta_{\perp}^c \alpha_{\perp}^c = \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} Q Q^{-1} \alpha'_{\perp},$$

gdzie $\beta_{\perp}^c = \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} Q$, $\alpha_{\perp}^c = Q^{-1} \alpha'_{\perp}$. Ta dekompozycja służy identyfikacji wspólnych trendów wodzących w macierzy α_{\perp}^c wymiaru $(p-r) \times p$, gdzie $p-r$ jest liczbą wspólnych trendów wodzących. Zidentyfikowana macierz α_{\perp}^c modelu podstawowego znajduje się w Tabeli 36.

Tabela 36: Zidentyfikowana macierz α_{\perp}^c

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
0.0000	0.0307	0.0279	1.0000	0.3520	1.0477	-1.1292
0.0000	-0.0032	-0.0029	-0.1043	1.0000	-0.1093	0.1178
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Na podstawie Tabeli 16 i 17 zmienne ppp_t oraz bus_t są słabo egzogeniczne w układzie podstawowym i rozszerzonym. Zmienne słabo egzogeniczne nie ulegają wpływowi zaburzeń innych zmiennych, natomiast zaburzenia ich samych wpływają na wartości pozostałych zmiennych w układzie. Zmienne słabo egzogeniczne są zatem naturalnymi kandydatami na te zmienne, które mogą w całości identyfikować wspólne trendy wodzące. Wartości 1.00 przy ppp_t oraz bus_t w zidentyfikowanej macierzy α_{\perp}^c przyporządkowują dwa trendy wodzące właśnie tym zmiennym. Trzeci trend wodzący jest kombinacją liniową zmiennych beu_t , oeu_t , ous_t i w mniejszym stopniu bus_t . Odpowiadająca macierzy α_{\perp}^c macierz wag β_{\perp}^c znajduje się w Tabeli 37.

Tabela 37: Macierz β_{\perp}^c

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
0.0000	0.2324	0.1973	0.4643	0.1006	0.2387	-0.2104
-0.0000	-0.4002	-0.4318	1.2909	0.9646	1.7414	3.0381
1.0000	-0.0005	-0.0005	0.0004	-0.0000	0.0009	0.0011

Macierz C wraz z wartościami statystyki t -studenta uzyskana z tak zidentyfikowanych macierzy α_{\perp}^c i β_{\perp}^c znajduje się w Tabelach 38 i 39.

Tabela 38: Macierz C dla zidentyfikowanej macierzy α_{\perp}^c

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-0.0005	0.0084	0.0076	0.2742	-0.3184	0.2873	-0.3096
-0.0005	0.0074	0.0068	0.2423	-0.3623	0.2539	-0.2737
0.0004	0.0101	0.0092	0.3296	1.4543	0.3454	-0.3722
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0009	0.0018	0.0016	0.0571	1.8254	0.0598	-0.0644
0.0011	-0.0162	-0.0147	-0.5273	2.9640	-0.5524	0.5954

Tabela 39: Macierz statystyk t-studenta dla macierzy C z Tabeli 38

PPP	DPEU	DPUS	BEU	BUS	OEU	OUS
36.0044	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000
-4.7935	1.4341	1.4137	3.4309	-1.2611	2.5934	-6.7723
-5.2417	1.2887	1.2704	3.0832	-1.4590	2.3306	-6.0860
1.0515	0.4841	0.4772	1.1581	1.6173	0.8754	-2.2860
-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	1.8066	0.0000	0.0000
2.1823	0.0741	0.0730	0.1773	1.7945	0.1340	-0.3499
1.7685	-0.4348	-0.4286	-1.0402	1.8509	-0.7863	2.0534

Analiza macierzy C uzyskanej dla zidentyfikowanej macierzy α_{\perp} została przedstawiona w rozdziale 3.10. Ponieważ ustalono, że zmienne Δseu_t i Δsus_t nie wpływają na dekompozycję wspólnych trendów wodzących, dlatego identyfikacja macierzy $\tilde{\alpha}_{\perp}$ została w tej pracy pominięta.

3.10 Wnioski

Realny kurs walutowy dolar – euro

Szereg czasowy realnego kursu walutowego dolar – euro jest I(1) (Wykres 1, Tabela 16, Tabela 17). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy Π (Tabela 26) można sformułować następujące zależności dla Δppp_t :

$$\Delta ppp_t = -2.8884\Delta pus_{t-1} + 5.6982oeu_{t-1} - 3.9359ous_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.13)$$

gdzie ε_t oznacza składnik losowy. Na podstawie równania (3.13) wzrost cen w USA o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek realnego kursu walutowego dolar - euro (umocnienie się dolara wobec euro) o 2.8884% w ciągu następnego miesiąca. Wzrost miesięcznego oprocentowania rachunku overnight w strefie euro o 1 p.p. powoduje wzrost realnego kursu

walutowego dolar – euro (osłabienie dolara wobec euro) o 5.6982% w ciągu następnego miesiąca. Podobnie wzrost miesięcznego oprocentowania rachunku overnight w USA o 1 p.p. powoduje spadek realnego kursu walutowego dolar – euro o 3.9359% w ciągu następnego miesiąca.

Podobną zależność można sformułować dla macierzy $\tilde{\Pi}$ (Tabela 29):

$$\Delta ppp_t = -3.0297\Delta pus_{t-1} + 5.5866oeu_{t-1} - 3.7064ous_{t-1} - 0.1418\Delta sus_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.14)$$

Na podstawie równania (3.14) wzrost cen w USA o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek realnego kursu walutowego o 3.0297% w ciągu następnego miesiąca. Wzrost miesięcznego oprocentowania na rachunku overnight w strefie euro o 1 p.p. powoduje wzrost realnego kursu walutowego dolar – euro o 5.5866% w ciągu następnego miesiąca. Wzrost miesięcznego oprocentowania rachunku overnight w USA o 1 p.p. powoduje spadek realnego kursu walutowego dolar – euro o 3.7064% w ciągu następnego miesiąca. Ponadto miesięczny wzrost indeksu giełdowego w USA o 1% powoduje spadek realnego kursu walutowego dolar – euro o 0.1418% w ciągu następnego miesiąca. Ta ostatnia zależność potwierdza postawioną w pracy hipotezę, że zmiany cen akcji powodują znaczne przepływy kapitałowe i co za tym idzie zmianę kursu walutowego. Wzrost indeksu akcji w USA powoduje umocnienie dolara wobec euro. Odwrotnie, spadek cen akcji w USA powoduje osłabienie dolara. Podobna zależność pomiędzy indeksami giełdowymi w strefie euro a realnym kursem walutowym dolar – euro jednak nie zachodzi. Być może przyczyną tego jest słabszy i mniej skoncentrowany rynek giełdowy w strefie euro, przez co przepływy kapitałowe są mniej skoncentrowane i nie znajdują odzwierciedlenia w indeksach giełdowych. Silniej za to na realny kurs walutowy dolar – euro oddziałuje rynek obligacji i depozytów pieniężnych w strefie euro niż w USA.

Na podstawie macierzy C (Tabela 30-31) bez identyfikacji wspólnych trendów wodzących, można sformułować równanie *impulse – response* dla realnego kursu walutowego dolar – euro:

$$ppp_t = 0.9607\sum \varepsilon_{ppp} - 3.0121\sum \varepsilon_{\Delta pus} + 61.7681\sum \varepsilon_{oeu} + ppp_0^* \quad (3.15)$$

Na jego podstawie można określić te zmienne, których zaburzenia wywierają długookresowy wpływ na poziom logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro. Zaburzenia poziomu logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro zostają podtrzymane i wywierają długookresowy wpływ na tą zmienną. Znaczny wpływ na poziom logarytmu kursu walutowego dolar – euro mają także zaburzenia poziomu inflacji w USA. Logarytm realnego kursu walutowego dolar – euro reaguje jednak najszybciej na zaburzenia krótkookresowej

stopy procentowej w strefie euro. Dostosowanie logarytmu realnego kursu walutowego do nowego poziomu wyznaczonego przez stopę jest natychmiastowe. Ten fakt jest prawdopodobnie konsekwencją możliwości dokonywania arbitrażu na rynkach depozytów pieniężnych i walutowym.

W macierzy \tilde{C} dla modelu rozszerzonego (Tabele 34-35) znika wpływ zaburzeń inflacyjnych w USA, zwiększa się natomiast wpływ zaburzeń oprocentowania overnight w strefie euro na logarytm realnego kursu walutowego dolar – euro:

$$ppp_t = 0.9274 \sum \varepsilon_{ppp} + 64.7355 \sum \varepsilon_{oeu} + ppp_0^* \quad (3.16)$$

Identyfikacja macierzy α_{\perp} (Tabela 36) powoduje wyeliminowanie wpływu zaburzeń stopy oprocentowania overnight w strefie euro na logarytm realnego kursu walutowego dolar – euro:

$$ppp_t = \sum \varepsilon_{ppp} + ppp_0^* \quad (3.17)$$

Identyfikacja α_{\perp} została oparta na hipotezie, że realny kurs walutowy dolar – euro jest słabo egzogeniczny (Tabele 16-17). Zmienna słabo egzogeniczna nie ulega wpływom zaburzeń pozostałych zmiennych modelu, dlatego w wyniku identyfikacji wyeliminowano inne źródła zmienności realnego kursu walutowego. Wyciągnięcie praktycznych wniosków z analizy *impulse – response* dla tej zmiennej powinno jednak uwzględniać równania (3.15) i (3.16).

Inflacja w strefie euro

Na podstawie Tabel 16 i 17 należy uznać, że inflacja w strefie euro jest stacjonarna. Ceny w strefie euro są I(1). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy Π (Tabela 26) można sformułować następujące równanie dla zmiennej $\Delta^2 peu_t$, którą interpretuje się jako miesięczną zmianę poziomu inflacji:

$$\begin{aligned} \Delta^2 peu_t = & -0.0004 ppp_{t-1} - 0.9129 \Delta peu_{t-1} + 0.1309 \Delta pus_{t-1} \\ & + 0.6150 beu_{t-1} - 0.6063 bus_{t-1} + 0.0024 + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.18)$$

Wzrost logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro o 1 w ciągu miesiąca powoduje wzrost inflacji w strefie euro w następnym miesiącu o 0.20 p.p.. Wzrost cen w strefie euro o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek inflacji w strefie euro o 0.6729 p.p. w ciągu następnego miesiąca. Natomiast wzrost cen w USA o 1% w ciągu miesiąca powoduje wzrost inflacji w strefie euro o 0.3709 p.p. w następnym miesiącu. Na poziom inflacji w strefie euro wpływają także długookresowe stopy procentowe. Wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost inflacji o

0.9150 p.p. w miesiącu następnym. Wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje spadek inflacji w strefie euro o 0.3663 p.p. w następnym miesiącu.

Podobnie dla zidentyfikowanej macierzy $\tilde{\Pi}$ (Tabela 27) można sformułować następujące równanie:

$$\Delta^2 peu_t = -0.9120\Delta peu_{t-1} + 0.1257\Delta pus_{t-1} + 0.6858beu_{t-1} - 0.7022bus_{t-1} + 0.0025 + \varepsilon_t \quad (3.19)$$

Na jego podstawie można wnioskować, że miesięczna inflacja w strefie euro rzędu 1% oznacza, że w kolejnym miesiącu będzie ona niższa o 0.6620 p.p.. Natomiast miesięczna inflacja w USA wysokości 1% powoduje wzrost inflacji w strefie euro w następnym miesiącu o 0.3757 p.p.. Z kolei wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost inflacji o 0.9358 p.p. w następnym miesiącu. Wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje spadek inflacji w strefie euro o 0.4522 p.p. w następnym miesiącu.

Na podstawie macierzy C (Tabele 30-31) modelu podstawowego można sformułować następujące równanie *impulse – response* dla inflacji w strefie euro:

$$\Delta peu_t = -0.0005 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0087 \sum \varepsilon_{\Delta pus} + 0.3458 \sum \varepsilon_{beu} - 0.3569 \sum \varepsilon_{bus} + 0.2645 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.3594 \sum \varepsilon_{ous} + \Delta peu_0^* \quad (3.20)$$

Wpływ zaburzeń logarytmu realnego kursu walutowego oraz inflacji w USA i w strefie euro jest niewielka. Czas reakcji na jednostkową podtrzymaną zmianę jednej z tych zmiennych jest mierzony bardziej w latach niż miesiącach. Ponadto na poziom inflacji w strefie euro nie mają wpływu zaburzenia w poziomie cen w strefie euro. Inflacja w strefie euro ulega silnym dostosowaniom do poziomu innych zmiennych w układzie, w szczególności do krótko- i długookresowych stóp procentowych. Te dostosowania redukują długookresowy wpływ skumulowanych zaburzeń cen w strefie euro na długookresowy poziom inflacji w strefie euro. Szybkie dostosowanie do nowego poziomu inflacji w strefie euro można natomiast uzyskać poprzez zaburzenia wielkości krótko- i długookresowych stóp procentowych w strefie euro i USA. Podtrzymane dodatnie zaburzenie długookresowej stopy procentowej w strefie euro o 1 p.p. miesięcznie oznacza, że dostosowanie cen do poziomu wyższego o 1% potrwa około 3 miesiące. Podtrzymany wzrost długookresowej stopy procentowej w USA o 1 p.p. oznacza, że dostosowanie cen do poziomu niższego o 1% potrwa również około 3 miesiące. Podtrzymane zaburzenie oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. oznacza, że po okresie około 4 miesięcy ceny wzrosną o około 1%. Natomiast podtrzymany wzrost stopy oprocentowania overnight w USA oznacza, że po okresie około 3 miesięcy ceny w

strefie euro spadną o 1%. Warto zauważyć w strefie euro antyinflacyjny wpływ działania podwyżek stóp procentowych w USA, choć nie odpowiada za to żaden klasyczny mechanizm transmisyjny. Ciekawy jest natomiast odwrotny do przewidywanego wpływ zaburzeń długookresowej, a szczególnie krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro, które przyspieszają wzrost inflacji w strefie euro zamiast ją obniżyć. Wyjaśnieniem tego faktu, może być okres wyrównywania się poziomu cen w strefie euro zarówno przed jak i po wprowadzeniu unii monetarnej. Efekt wyrównywania cen, zwany też prawem jednej ceny, był silniejszy i niezależny od wysokości stóp procentowych w strefie euro. Oznaczać to też może, że lepszym celem prowadzenia polityki monetarnej Europejskiego Banku Centralnego (ECB) powinien być wzrost gospodarczy niż poziom inflacji, na którą według przedstawionego modelu nie ma on wpływu. Być może powodem takiej interpretacji wyników jest umieszczenie w modelu specyficznych stóp overnight a nie np. 1M.

Interpretacja macierzy \tilde{C} dla modelu rozszerzonego (Tabele 34-35) nie zmienia się znacząco. Skróceniu ulegają okresy reakcji poziomu cen na wprowadzone do układu zaburzenia:

$$\Delta peu_t = -0.0009 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0123 \sum \varepsilon_{\Delta pus} + 0.3893 \sum \varepsilon_{beu} - 0.3837 \sum \varepsilon_{bus} + 0.2798 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.3731 \sum \varepsilon_{ous} + \Delta peu_0^* \quad (3.21)$$

W równaniu *impulse – response* dla zidentyfikowanej macierzy C (Tabele 38-39) pozostają cztery zmienne, których zaburzenia powodują długookresową reakcję inflacji w strefie euro:

$$\Delta peu_t = -0.0005 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.2742 \sum \varepsilon_{beu} + 0.2873 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.3096 \sum \varepsilon_{ous} + \Delta peu_0^* \quad (3.22)$$

Oprócz niewielkiego wpływu logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro, znaczący wpływ na inflację w strefie euro mają długookresowa stopa procentowa w strefie euro oraz krótkookresowe stopy procentowe w strefie euro i USA.

Inflacja w USA

Na podstawie Tabel 16 i 17 inflacja w USA jest stacjonarna, ceny w USA są I(1). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy Π (Tabela 26) można sformułować równanie dla zmiany poziomu inflacji $\Delta^2 pus_t$:

$$\Delta^2 pus_t = 0.1565 \Delta peu_{t-1} - 0.8958 \Delta pus_{t-1} + 0.6507 beu_{t-1} - 0.6009 oeu_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.23)$$

Miesięczna inflacja w strefie euro rzędu 1% powoduje, że w kolejnym miesiącu inflacja w USA będzie niższa o 0.1565 p.p.. Natomiast miesięczna inflacja w USA w wysokości 1%

powoduje spadek tej inflacji w następnym miesiącu o 0.8958 p.p.. Wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost inflacji w USA o 0.6507 p.p. w miesiącu następnym. Wzrost oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje spadek inflacji w USA o 0.6009 p.p. w następnym miesiącu.

Podobnie dla zidentyfikowanej macierzy $\tilde{\Pi}$ (Tabela 27) zachodzą zależności:

$$\Delta^2 pus_t = 0.1625\Delta pe_{t-1} - 0.8960\Delta pus_{t-1} + 0.6906be_{t-1} - 0.6555oe_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.24)$$

Interpretacja tego równania jest podobna do interpretacji równania (3.23) Zmianie ulegają jedynie współczynniki.

Na podstawie macierzy C (Tabele 30-31) modelu rozszerzonego równanie impulse – response dla inflacji w USA ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \Delta pus_t = & -0.0006 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0079 \sum \varepsilon_{\Delta pus} + 0.2991 \sum \varepsilon_{beu} - 0.3857 \sum \varepsilon_{bus} \\ & + 0.1910 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.3006 \sum \varepsilon_{ous} + \Delta pus_0^* \end{aligned} \quad (3.25)$$

Na jego podstawie niewielki wpływ na inflację w USA mają zaburzenia realnego kursu walutowego dolar – euro. Równie nieznaczące jest długookresowe oddziaływanie zaburzeń cen w USA na długookresowy poziom inflacji. Wszelkie zaburzenia tej zmiennej nie mają charakteru trwałego, a inflacja w USA dostosowuje się do stanów równowagi wyznaczonych przez pozostałe zmienne w modelu, czyli krótko- i długookresowe stopy procentowe w strefie euro i USA. Kolejno, dodatnie zaburzenie oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro w wysokości 1 p.p. powoduje, że po okresie niewiele ponad 3 miesiące inflacja w USA wzrośnie do poziomu 1% miesięcznie. Natomiast wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 1 p.p. miesięcznie oznacza, że po niecałych 3 miesiącach inflacja w USA spadnie o 1 p.p. miesięcznie. Podobnie wzrost stopy oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. miesięcznie oznacza 5 miesięczny okres dostosowania cen w USA do poziomu wyższego o 1%. Dodatkowo zaburzenie oprocentowania stóp depozytu overnight w USA oznacza ujemne zaburzenie o sile 3 razy niższej dotyczące poziomu inflacji w USA. W przeciwieństwie do strefy euro, wzrost krótko- i długookresowych stop procentowych w USA ma efekt antyinflacyjny, przy czym efekt antyinflacyjny dla długookresowych stóp procentowych jest silniejszy. Odwrotnie, spadek krótko- i długookresowych stóp procentowych w USA ma skutek antydeflacyjny.

Sformułowanie równania *impulse – response* w modelu rozszerzonym na podstawie macierzy \tilde{C} (Tabele 34-35) jest następujące:

$$\Delta pus_t = -0.0010 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0120 \sum \varepsilon_{\Delta pus} + 0.3612 \sum \varepsilon_{beu} - 0.4938 \sum \varepsilon_{bus}$$

$$+0.1827 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.3222 \sum \varepsilon_{ous} + \Delta pus_0^* \quad (3.26)$$

W porównaniu z równaniem (3.26) czas okres po jakim ceny w USA spadną o 1% w wyniku podniesienia długookresowych stóp procentowych w USA o 1 p.p. w skali miesiąca uległ skróceniu z trzech miesięcy do dwóch.

Natomiast dla macierzy zidentyfikowanej C (Tabele 38-39), w równaniu *impulse – response* dla inflacji w USA znikają zaburzenia długookresowej stopy procentowej w USA:

$$\Delta pus_t = -0.0005 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.2423 \sum \varepsilon_{beu} + 0.2539 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.2737 \sum \varepsilon_{ous} + \Delta pus_0^* \quad (3.27)$$

Nadal jednak długookresowy wpływ na poziom inflacji w USA mają długookresowe stopy procentowe w strefie euro oraz krótkookresowe stopy procentowe w strefie euro i USA. Zależność pomiędzy zaburzeniami krótko- i długookresowych stóp procentowych w strefie euro i inflacją w USA może być natomiast pozorna.

Stopa oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro

Stopa oprocentowania 10-letnich obligacji w strefie euro jest I(1) (Wykres 4, Tabela 16 i 17). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy Π (Tabela 26) można sformułować następujące zależności dla przyrostu miesięcznej stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro:

$$\begin{aligned} \Delta beu_t = & 0.0001ppp_{t-1} + 0.0224\Delta peu_{t-1} - 0.113lbeu_{t-1} + 0.2106bus_{t-1} \\ & + 0.0631oeu_{t-1} - 0.0542ous_{t-1} - 0.0006 + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.28)$$

Wzrost logarytmu realnego kursu walutowego o 1 w ciągu miesiąca powoduje spadek przyrostu miesięcznej stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 0.05 p.p. Wzrost cen w strefie euro o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek przyrostu miesięcznej stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 0.0376 p.p. w następnym miesiącu. Wzrost miesięcznej stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. powoduje spadek przyrostu tejże stopy o 0.1737 p.p. w kolejnym miesiącu. Wzrost miesięcznej stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 1 p.p. powoduje wzrost przyrostu stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 0.1506 p.p. w kolejnym miesiącu. Podobnie, wzrost oprocentowania miesięcznej stopy depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. powoduje wzrost przyrostu tego oprocentowania o 0.0031 p.p. w ciągu następnego miesiąca. Wzrost oprocentowania miesięcznego depozytu overnight w USA o 1 p.p. powoduje spadek przyrostu oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 0.1142 w następnym miesiącu.

Co interesujące, wzrost długookresowej stopy procentowej w strefie euro powoduje spadek dynamiki tego przyrostu w kolejnym okresie, natomiast wzrost krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro powoduje przyspieszenie dynamiki tego przyrostu w kolejnym okresie. Zmiany długo- i krótkookresowych stóp procentowych w USA wpływają na dynamikę przyrostu długookresowej stopy procentowej w USA z przeciwnym znakiem w porównaniu ze zmianami tych stóp w strefie euro.

Dla zidentyfikowanej macierzy $\tilde{\Pi}$ (Tabela 27) zachodzi następujące równanie:

$$\begin{aligned} \Delta beu_t = & 0.0001ppp_{t-1} + 0.0219\Delta peu_{t-1} - 0.1247beu_{t-1} + 0.2089bus_{t-1} \\ & + 0.0770oeu_{t-1} - 0.0568ous_{t-1} - 0.0006 + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.29)$$

Jego interpretacja jest analogiczna do interpretacji równania (3.28).

Na podstawie macierzy C (Tabele 30-31) modelu rozszerzonego można sformułować następujące równanie *impulse – response* dla oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro:

$$beu_t = 0.0422 \sum \varepsilon_{\Delta peu} + 0.9178 \sum \varepsilon_{bus} + 0.6782 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.4019 \sum \varepsilon_{ous} + beu_0^* \quad (3.30)$$

Skumulowane zaburzenia dotyczące inflacji w strefie euro mają umiarkowany wpływ na poziom oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro. Warto zauważyć brak wpływu skumulowanych zaburzeń długookresowej stopy procentowej na poziom tej stopy. To potwierdza wcześniejsze ustalenia (Tabele 23 i 25), że beu_t jest zmienną silnie dostosowującą się do stanów równowagi wyznaczonych przez relacje kointegrujące i w konsekwencji niewrażliwą na zaburzenia siebie samej. Silny wpływ na poziom długookresowej stopy procentowej w strefie euro wywierają natomiast skumulowane zaburzenia długookresowej stopy procentowej w USA. Zaburzenie długookresowej stopy procentowej w USA o 1 p.p. miesięcznie spowoduje niemal taką samą reakcję długookresowej stopy procentowej w strefie euro, czyli zmianę w wysokości 0.9178 p.p. w tym samym miesiącu. Słabszy, choć nadal silny jest wpływ skumulowanych zaburzeń dotyczących krótkookresowych stóp procentowych w strefie euro i w USA na poziom stóp procentowych w strefie euro, przy czym wpływ krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro jest dodatni a wpływ krótkookresowej stopy procentowej w USA jest ujemny.

Ustalenia dotyczące długookresowej stopy procentowej w strefie euro w modelu rozszerzonym (Tabele 34-35) oznaczają zmianę współczynników w odniesieniu do równania (3.30):

$$beu_t = 0.0400 \sum \varepsilon_{\Delta peu} + 0.8685 \sum \varepsilon_{bus} + 0.7195 \sum \varepsilon_{oeu} - 0.4106 \sum \varepsilon_{ous} + beu_0^* \quad (3.31)$$

W równaniu (3.31) został zmniejszony wpływ skumulowanych zaburzeń długookresowej stopy procentowej w USA na długookresową stopę procentową w strefie euro. Zwiększeniu uległ natomiast wpływ krótkookresowych skumulowanych zaburzeń dotyczących stopy overnight w strefie euro. Zaburzenie tej stopy w wysokości 1 p.p. miesięcznie oznacza, że po okresie około półtora miesiąca miesięczna stopa oprocentowania 10-letnich obligacji również wzrośnie o 1 p.p..

W równaniu *impulse – response* dla zidentyfikowanej macierzy C (Tabele 38-39) wpływ na poziom długookresowych stóp procentowych w strefie euro mają tylko skumulowane zaburzenia długookresowych stóp procentowych w USA (dodatni) oraz krótkookresowych stóp procentowych w USA (ujemny):

$$beu_t = 1.4543 \sum \varepsilon_{bus} - 0.3722 \sum \varepsilon_{ous} + beu_0^* \quad (3.32)$$

Zaburzenia długookresowej stopy procentowej w USA w wysokości 1 p.p. miesięcznie powodują wzrost długookresowej stopy procentowej o 1.4543 p.p. miesięcznie. Natomiast skumulowane zaburzenie krótkookresowej stopy procentowej w USA o 1 p.p. miesięcznie oznacza, że po okresie niecałych 3 miesięcy długookresowa stopa procentowa w strefie euro spadnie o 1 p.p..

Stopa oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA

Stopa oprocentowania 10-letnich obligacji w USA jest I(1) (Wykres 5, Tabela 18 i 19). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy Π (Tabela 28) można sformułować następujące równanie dla przyrostu miesięcznej stopy oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA:

$$\Delta bus_t = 0.0275 \Delta pe_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.33)$$

Zmienność przyrostu stopy oprocentowania długookresowej stopy procentowej w USA jest objaśniana w tym modelu tylko przez jedną zmienną, mianowicie wzrost cen w strefie euro. Wzrost cen w strefie euro o 1% powoduje wzrost przyrostu oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 0.0275 p.p. w następnym miesiącu.

W modelu rozszerzonym (Tabela 29) pojawia się dodatkowa zmienna objaśniająca:

$$\Delta bus_t = 0.0265 \Delta pe_{t-1} + 0.0440 oe_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.34)$$

Wzrost cen w strefie euro o 1% powoduje wzrost przyrostu oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 0.0265 p.p. w następnym miesiącu. Dodatkowo wzrost miesięcznego oprocentowania depozytu overnight o 1 p.p. powoduje wzrost przyrostu oprocentowania długookresowych obligacji skarbowych w USA o 0.0440 p.p.

Na podstawie macierzy C (Tabele 30-31) dla modelu podstawowego można sformułować następujące równanie *impulse – response* dla długookresowej stopy procentowej w USA:

$$bus_t = 0.0225 \sum \varepsilon_{\Delta peu} + 0.7210 \sum \varepsilon_{bus} + bus_0^* \quad (3.35)$$

Wpływ na poziom długookresowej stopy procentowej w strefie euro mają skumulowane zaburzenia inflacji w strefie euro (bardzo słaby) oraz skumulowane zaburzenia długookresowej stopy procentowej w USA (bardzo silny). Zależności te nie ulegają zmianie w modelu rozszerzonym (Tabele 34-35):

$$bus_t = 0.0225 \sum \varepsilon_{\Delta peu} + 0.7333 \sum \varepsilon_{bus} + bus_0^* \quad (3.36)$$

Ponieważ znaczący wpływ na poziom długookresowej stopy procentowej w USA mają jedynie skumulowane zaburzenia jej samej. Uzasadnione jest zatem przyporządkowanie jednego wspólnego trendu wiodącego procesowi skumulowanych zaburzeń właśnie tej zmiennej. Na podstawie takiej identyfikacji (Tabele 38-39) równanie *impulse – response* dla długookresowej stopy procentowej w USA jest postaci:

$$bus_t = \sum \varepsilon_{bus} + bus_0^* \quad (3.37)$$

Fakt, że długookresowa stopa procentowa w USA nie ulega wpływowi skumulowanych zaburzeń innych zmiennych potwierdza interpretację macierzy α i $\tilde{\alpha}$ (Tabele 23 i 25). Brak wpływu skumulowanych zaburzeń krótkookresowej stopy procentowej w USA na stopę długookresową może stanowić argument kwestionujący występowanie hipotezy oczekiwania dla struktury terminowej stopy procentowej w USA.

Stopa depozytu overnight w strefie euro

Stopa oprocentowania depozytu overnight w strefie euro jest I(1) (Wykres 6, Tabela 16 i 18). Na podstawie Tabeli 26 można sformułować następujące zależności dla zmiany przyrostu miesięcznego oprocentowania depozytu overnight w strefie euro:

$$\Delta oe_t = 0.0426 beu_{t-1} - 0.0941 oe_{t-1} + 0.0297 ous_{t-1} - 0.0002 + \varepsilon_t \quad (3.38)$$

Wzrost długookresowej stopy procentowej w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost przyrostu oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 0.0226 w kolejnym miesiącu. Wzrost miesięcznej stopy depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. powoduje spadek wzrostu tejże stopy o 0.1141 p.p. w kolejnym miesiącu. Wzrost miesięcznej stopy depozytu overnight w USA o 1 p.p. powoduje zwiększony przyrost stopy oprocentowania depozytu overnight w miesiącu następnym o 0.0097 p.p.

W modelu rozszerzonym (Tabela 27) oprócz zmiennych objaśniających w modelu podstawowym znajduje się również przyrost indeksu giełdowego w strefie euro:

$$\Delta oeu_t = 0.0450beu_{t-1} - 0.1053oeu_{t-1} + 0.0360ous_{t-1} - 0.0009\Delta seu_{t-1} + 0.0002 + \varepsilon_t \quad (3.39)$$

Spadek indeksu giełdowego w strefie euro o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek miesięcznego oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 0.0209 p.p. w kolejnym miesiącu.

Na podstawie macierzy C (Tabele 30-31) można sformułować następujące równanie *impulse – response* dla krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro:

$$oeu_t = 0.0007 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0411 \sum \varepsilon_{\Delta peu} + 1.3183 \sum \varepsilon_{bus} + 0.4278 \sum \varepsilon_{oeu} + oeu_0^* \quad (3.40)$$

Wpływ skumulowanych zaburzeń dotyczących realnego kursu walutowego dolar – euro oraz inflacji w strefie euro na krótkoterminowe stopy procentowe w strefie euro jest niewielki. Natomiast wpływ skumulowanych zaburzeń długookresowych stóp procentowych w USA na krótkookresowe stopy procentowe w strefie euro jest bardzo duży. Dodatkowo poziom krótkookresowych stóp procentowych w strefie euro zależy od skumulowanych zaburzeń tych stóp, ale jest to zależność ponad 3-krotnie słabsza od wpływu skumulowanych zaburzeń długookresowej stopy procentowej w USA.

W modelu rozszerzonym (Tabele 34-35) powyższe wnioski nie ulegają zmianie:

$$oeu_t = 0.0012 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0399 \sum \varepsilon_{\Delta peu} + 1.3812 \sum \varepsilon_{bus} + 0.4850 \sum \varepsilon_{oeu} + oeu_0^* \quad (3.41)$$

Zwiększa się jedynie wpływ skumulowanych zaburzeń krótkookresowej stopy procentowej na nią samą. Wzrost skumulowanych zaburzeń dotyczących tej stopy. Zmniejsza się natomiast wpływ skumulowanych zaburzeń długookresowej stopy procentowej w USA na krótkookresową stopę procentową w strefie euro.

Na podstawie zidentyfikowanej macierzy C (Tabele 38-39) można sformułować następującą zależność:

$$oeu_t = 0.0009 \sum \varepsilon_{ppp} + 1.8254 \sum \varepsilon_{bus} + oeu_0^* \quad (3.42)$$

Jedyną znaczącą zmienną, której skumulowane zaburzenia wpływają na poziom oprocentowania rachunku overnight w strefie euro jest stopa oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA.

Stopa depozytu overnight w USA

Miesięczne oprocentowanie depozytu overnight w USA jest I(1) (Wykres 7, Tabela 16 i 17). Na podstawie macierzy Π z Tabeli 28 można sformułować następujące równanie objaśniające zmienność przyrostu oprocentowania depozytu overnight w USA:

$$\Delta ous_t = 0.0001ppp_{t-1} + 0.1930bus_{t-1} - 0.0640oeu_{t-1} - 0.0166ous_{t-1} - 0.0006 + \varepsilon_t \quad (3.43)$$

Na podstawie równania (3.41) wzrost logarytmu realnego kursu walutowego o 1 w ciągu miesiąca powoduje spadek przyrostu oprocentowania depozytu overnight w kolejnym miesiącu o 0.05 p.p.. Wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji amerykańskich o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost oprocentowania depozytu overnight w USA większy o 0.1330 p.p. w kolejnym miesiącu. Wzrost oprocentowania depozytu overnight w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje spadek przyrostu oprocentowania depozytu overnight w USA o 0.1240 p.p. w miesiącu kolejnym. Ponadto wzrost oprocentowania depozytu overnight w USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje spadek przyrostu tegoż oprocentowania w następnym miesiącu o 0.0766 p.p.

W modelu rozszerzonym opartym o macierz $\tilde{\Pi}$ z Tabeli 27 sformułować można następujące równanie:

$$\Delta ous_t = 0.0001ppp_{t-1} - 0.0284beu_{t-1} + 0.1948bus_{t-1} - 0.0524oeu_{t-1} - 0.0165ous_{t-1} - 0.0006 + \varepsilon_t \quad (3.44)$$

W porównaniu z (3.43) w równaniu (3.44) znajduje się dodatkowa zmienna objaśniająca - długookresowa stopa procentowa w strefie euro. Jej miesięczny spadek o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost stopy depozytu overnight o 0.0884 p.p. większy w miesiącu kolejnym.

Na podstawie macierzy C (Tabele 30-31) dla modelu podstawowego można sformułować następujące równanie *impulse – response* dotyczące krótkookresowej stopy procentowej w USA:

$$ous_t = 0.0008 \sum \varepsilon_{ppp} + 0.0452 \sum \varepsilon_{\Delta speu} - 0.6560 \sum \varepsilon_{beu} + 2.1849 \sum \varepsilon_{bus} - 0.5937 \sum \varepsilon_{ous} + ous_0^* \quad (3.45)$$

Nieznaczny wpływ na krótkookresowe stopy procentowe w USA mają skumulowane zaburzenia realnego kursu walutowego oraz inflacji w strefie euro. Znaczący wpływ na poziom krótkookresowych stóp procentowych w USA mają skumulowane zaburzenia długookresowej stopy procentowej w strefie euro oraz skumulowane zaburzenia krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro, a szczególnie skumulowane zaburzenia długookresowej stopy procentowej w USA. Zaburzenie dotyczące długookresowej stopy procentowej w USA w

wysokości 1 p.p. miesięcznie oznacza, że krótkookresowa stopa procentowa w USA zwiększy się o 1 p.p. już po okresie pół miesiąca.

W modelu rozszerzonym (Tabele 34-35) wpływ zaburzeń długookresowych stóp procentowych na stopy krótkookresowe jest jeszcze silniejszy:

$$ous_t = 0.0015 \sum \varepsilon_{ppp} - 0.7728 \sum \varepsilon_{beu} + 2.3445 \sum \varepsilon_{bus} - 0.5802 \sum \varepsilon_{ous} + ous_0^* \quad (3.46)$$

Natomiast wpływ skumulowanych zaburzeń długookresowej stopy procentowej w strefie euro i krótkookresowej stopy procentowej w USA jest ujemny. Zaburzenia każdej z tych zmiennych o 1 p.p. w ciągu miesiąca oznaczają, że po niecałych dwóch miesiącach poziom krótkookresowej stopy procentowej spadnie o 1 p.p..

W modelu zidentyfikowanym (Tabele 38-39) zwiększeniu ulega wpływ skumulowanych zaburzeń długookresowej stopy procentowej w USA na stopy krótkookresowe:

$$ous_t = 0.0011 \sum \varepsilon_{ppp} + 2.9640 \sum \varepsilon_{bus} - 0.5954 \sum \varepsilon_{ous} + ous_0^* \quad (3.47)$$

Analiza równań (3.45) – (3.46) pozwala na kolejną dygresję dotyczącą hipotezy oczekiwań dla terminowej struktury stopy procentowej. Zgodnie z tą hipotezą (równanie (1.5)) długookresowa stopa procentowa jest średnią ważoną krótkookresowych stóp procentowych (znanych dzisiejszych i oczekiwanych przyszłych). Analiza *impulse – response* pozwala stwierdzić, że długookresowa stopa procentowa w USA zachowuje się dosyć autonomicznie w stosunku do zachowania krótkookresowej stopy procentowej w USA. Ponadto, zaburzenia długookresowej stopy procentowej wpływają silnie na poziom krótkookresowej stopy procentowej w USA. Może to świadczyć o bardzo stabilnych oczekiwaniach dotyczących przyszłej wysokości stóp procentowych w USA, niezależnych od aktualnej wysokości krótkookresowych stóp procentowych.

Wskaźnik giełdowy DJEurStoxx w strefie euro (kompozycja wskaźników głównych giełd w strefie euro)

Miesięczny względny wzrost wskaźnika giełdowego w strefie euro jest stacjonarny (Wykres 8, Tabele 16 i 17). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy $\tilde{\Pi}$ w modelu rozszerzonym (Tabela 27) można sformułować następującą tożsamość dla zmiennej $\Delta^2 seu_t$, czyli wzrostu zwrotu z inwestycji w indeks akcji europejskich:

$$\begin{aligned} \Delta^2 seu_t = & 0.0160 ppp_{t-1} - 4.4655 \Delta pus_{t-1} + 12.1088 beu_{t-1} - 22.4402 oeu_{t-1} \\ & + 6.7547 ous_{t-1} - 0.7503 \Delta seu_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.48)$$

Na podstawie równania (3.48) wzrost logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro o 1 w ciągu miesiąca powoduje wzrost zwrot z inwestycji w indeks akcji europejskich w kolejnym miesiącu o 1.06 p.p. Wzrost cen w USA o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek zwrotu z inwestycji w indeks cen akcji w strefie euro o 4.4655 pp. w ciągu następnego miesiąca. Wzrost wskaźnika CPI w USA o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek zwrotu z inwestycji w indeks giełdowy w strefie euro o 4.4655 p.p. Silnie na indeksy giełdowe w strefie euro oddziałują stopy procentowe zarówno w strefie euro jak i USA. Wzrost miesięcznego oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. powoduje wzrost zwrotu z inwestycji w indeks giełdowy w strefie euro o 12.1088 p.p. w następnym miesiącu. Natomiast wzrost oprocentowania depozytu overnight w strefie euro działa na dynamikę zwrotu z inwestycji w akcje w przeciwnym kierunku. Wzrost tych stóp o 1 p.p. miesięcznie spowoduje spadek rentowności inwestycji w akcje o 22.4402 p.p.. Z kolei wzrost oprocentowania depozytu overnight w USA o 1 p.p. miesięcznie spowoduje wzrost zysku z inwestycji w indeks akcji w strefie euro o 6.7547 p.p. w kolejnym miesiącu. Wzrost indeksu akcji w strefie euro o 1% miesięcznie powoduje spadek rentowności z inwestycji w ten indeks w kolejnym miesiącu o 0.7503 p.p.

Macierzy \tilde{C} modelu rozszerzonego (Tabele 34-35) pozwala sformułować następujące równanie *impulse – response* dla zwrotów z inwestycji w indeks akcji w strefie euro:

$$\Delta seu_t = -0.0022 \sum \varepsilon_{ppp} - 0.0726 \sum \varepsilon_{\Delta peu} - 2.5131 \sum \varepsilon_{bus} - 0.8824 \sum \varepsilon_{oeu} + \Delta seu_0^* \quad (3.49)$$

Na podstawie równania (3.49) można stwierdzić negatywny wpływ skumulowanych zaburzeń dotyczących realnego kursu walutowego dolar – euro i inflacji w strefie euro na poziom zwrotu z inwestycji w indeks giełdowy w strefie euro. Spadek inflacji oraz spadek realnego kursu walutowego dolar – euro, oznaczający wzmocnienie euro w stosunku do dolara, wpływa na wzrost indeksów giełdowych w strefie euro. Silniejszy wpływ na wzrost indeksów giełdowych w strefie euro ma spadek długookresowych stóp procentowych w USA oraz spadek krótkookresowych stóp procentowych w strefie euro. Miesięczny spadek długookresowej stopy procentowej w USA o 1 p.p. oznacza wzrost indeksu giełdowego w strefie euro o 2.5% miesięcznie. Natomiast spadek krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro o 1 p.p. miesięcznie oznacza, że indeks giełdowy w strefie euro wzrośnie o 0.8824% w ciągu miesiąca.

Wskaźnik giełdowy DJIA w USA

Miesięczny względny wzrost indeksu giełdowego w USA jest stacjonarny (Wykres 9, Tabela 18 i 19). Na podstawie zidentyfikowanej macierzy $\tilde{\Pi}$ w modelu rozszerzonym (Tabela 29) można sformułować następującą tożsamość dla zmiennej $\Delta^2 sus_t$, czyli wzrost zwrotu z inwestycji w indeks DJIA w USA:

$$\begin{aligned} \Delta^2 sus_t = & 0.0501ppp_{t-1} + 0.7858beu_{t-1} - 12.5140bus_{t-1} - 9.6961oeu_{t-1} \\ & + 5.9224ous_{t-1} - 1.0124\Delta sus_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.50)$$

Na podstawie równania (3.50) wzrost logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro o 1 w ciągu miesiąca powoduje wzrost zwrotu z inwestycji w indeks DJIA o 5.01 p.p. w ciągu następnego miesiąca. Ponadto wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje wzrost rentowności inwestycji w indeks DJIA o 0.7858 p.p. w ciągu następnego miesiąca. Wzrost oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA o 1 p.p. w ciągu miesiąca powoduje spadek rentowności inwestycji w indeks DJIA o 12.514 p.p. w następnym miesiącu. Zmiany poziomu krótkookresowych stóp procentowych w strefie euro i USA wywierają natomiast wpływ przeciwny na wzrost rentowności inwestycji w indeks DJIA w porównaniu do stóp długookresowych w strefie euro i USA. Wzrost miesięcznego oprocentowania stopy overnight w strefie euro o 1 p.p. powoduje spadek rentowności inwestycji we wskaźnik DJIA o 9.6961 p.p. w kolejnym miesiącu. Wzrost miesięcznego oprocentowania depozytu overnight w USA o 1 p.p. powoduje wzrost zwrotu z inwestycji w akcje amerykańskie o 5.9224 p.p. w ciągu następnego miesiąca. Wzrost indeksu DJIA o 1% w ciągu miesiąca powoduje spadek dynamiki wzrostu tego indeksu o 1.0124 p.p. w ciągu następnego miesiąca.

Na podstawie macierzy \tilde{C} (Tabele 34-35) dla modelu rozszerzonego można stwierdzić, że wpływ na wzrost indeksów giełdowych w USA mają skumulowane zaburzenia dotyczące realnego kursu walutowego dolar – euro oraz skumulowane zaburzenia dotyczące krótkookresowej stopy procentowej w strefie euro:

$$\Delta sus_t = 0.0482 \sum \varepsilon_{ppp} + 3.3639 \sum \varepsilon_{oeu} + \Delta sus_0^* \quad (3.51)$$

Wpływ skumulowanych zaburzeń logarytmu realnego kursu walutowego dolar – euro na zmianę indeksu giełdowego w USA nie jest duży. Choć wpływ skumulowanych zaburzeń dotyczących krótkoterminowej stopy procentowej w strefie euro jest bardzo silny, to interpretacja ekonomiczna wyjaśniająca taką zależność nie jest oczywista.

Zakończenie

Model VEqCM pozwolił zweryfikować szereg hipotez dotyczących długo- i krótkookresowych zależności pomiędzy realnym kursem walutowym dolar – euro, inflacją, długo- i krótkookresowymi stopami procentowymi oraz indeksami giełdowymi w strefie euro i USA. Poniżej zostaną w skrócie przedstawione najważniejsze wnioski przeprowadzonej analizy, które powinny zainteresować przede wszystkim ekonomistów i uczestników rynku kapitałowego i dać impuls do dalszych badań ekonometrycznych.

Postawiona we wstępie hipoteza, że przepływy kapitałowe mierzone zmianami indeksów giełdowych wpływają na zmiany kursu walutowego euro – dolar znajduje swoje potwierdzenie w szeregach czasowych tych zmiennych. W szczególności pomiędzy poziomem logarytmu realnego kursu walutowego a przyrostami indeksu DJIA występuje silna długookresowa zależność (równania (3.8), (3.9)). Ponadto, opóźnione o jeden miesiąc przyrosty indeksu DJIA wywierają silny wpływ na przyrosty realnego kursu walutowego dolar – euro (równanie (3.14)). Jeżeli poziomy inflacji w strefie euro i USA są zbliżone, to realny kurs walutowy jest dokładnym przybliżeniem nominalnego kursu walutowego dolar – euro. Oznacza to, że wszelkie zmiany rentowności inwestycji giełdowych na amerykańskiej giełdzie NYSE znajdują swe odzwierciedlenie w zmianie poziomu nominalnego kursu walutowego dolar-euro. Wysoka rentowność inwestycji na NYSE oznacza spadek nominalnego kursu walutowego dolar – euro, czyli umocnienie dolara wobec euro. Pozostałymi zmiennymi mającymi istotny wpływ na przyrosty realnego kursu walutowego dolar – euro są inflacja w USA oraz rentowność depozytów overnight w strefie euro i USA (równania (3.13), (3.14)).

W analizowanym modelu nie znaleziono natomiast zależności pomiędzy zwrotami z indeksu giełd strefy euro DJEurStoxx a realnym kursem walutowym dolar – euro. Istnieje natomiast długookresowa zależność pomiędzy przyrostami indeksu giełd strefy euro a rentownością depozytu overnight w strefie euro (równanie (3.10)). Wzrost rentowności depozytu overnight oznacza spadek rentowności inwestycji na giełdach europejskich. Długookresowe zależności występują także pomiędzy spreadem zwrotów z inwestycji w indeks giełdowy pomiędzy strefą euro i USA a spreadem długo- i krótkookresowej stopy procentowej pomiędzy strefą euro i USA (równania (3.11), (3.12)). Spadek spreadu stopy procentowej oznacza zawsze wzrost spreadu przyrostu indeksów giełdowych. Ponadto wpływ

na dynamikę rentowności indeksu giełdowego w strefie euro mają opóźnione o miesiąc: realny kurs walutowy dolar – euro, inflacja w USA, długo- i krótkookresowe stopy procentowe w strefie euro, krótkookresowe stopy procentowe w USA oraz przyrosty indeksu giełdowego w strefie euro (równanie (3.48)). Natomiast wpływ na dynamikę rentowności inwestycji w indeks DJIA mają opóźnione o miesiąc: realny kurs walutowy dolar – euro, długo- i krótkookresowe stopy procentowe w strefie euro i USA oraz przyrosty indeksu giełdowego DJIA (równanie (3.50)).

Zmiennymi, do których poziomu dostosowują się pozostałe zmienne w modelu są realny kurs walutowy dolar – euro oraz oprocentowanie 10-letnich obligacji skarbowych w USA. Wszelkie zmiany w poziomie tych zmiennych powodują zmiany długookresowych równowag pomiędzy zmiennymi i ich szybkie dostosowanie do nowego poziomu (równania (3.16), (3.17), (3.33), (3.34)). Co ciekawe, wbrew oczekiwaniom oprocentowanie 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro jest zmienną silnie dostosowującą się do poziomów innych zmiennych w modelu (równania (3.28), (3.29)).

Indeksy giełdowe nie wywierają znaczącego wpływu na dynamikę układu, nie objaśniają także w sposób znaczący zmienności ani inflacji, ani wysokości stóp procentowych w strefie euro i USA. Model rozszerzony o indeksy giełdowe nie zmienia w sposób istotny zależności pomiędzy realnym kursem walutowym dolar – euro, inflacją oraz stopami procentowymi w strefie euro i w USA przedstawionych w modelu podstawowym. Wprowadzenie indeksów giełdowych do modelu pozwala jednak zweryfikować hipotezę istotności wpływu przepływów kapitałowych na kurs walutowy dolar – euro oraz znaleźć szereg ciekawych zależności pomiędzy indeksami giełdowymi w strefie euro i USA a pozostałymi zmiennymi.

W modelu nie występuje zmiana strukturalna. Parametry modelu VEqCM są stabilne a reszty spełniają założenia normalności wielowymiarowego rozkładu reszt. Model powinien mieć zatem (o ile nie nastąpiła zmiana strukturalna) duże możliwości prognozowania zarówno poziomu realnego kursu walutowego jak i poziomów pozostałych zmiennych makroekonomicznych w modelu.

Dodatki

Dodatek A: Konstrukcja testów normalności rozkładu reszt

Założeniem poprawności estymatorów w modelu VAR(k) jest normalność rozkładu reszt. Należy wybrać taką postać modelu VAR lub VEqCM wraz z właściwą długością opóźnienia k i komponentami deterministycznymi (trend, stała, zmienne przełącznikowe), aby wielowymiarowy rozkład reszt był (w przybliżeniu) normalny.

Najpopularniejszymi metodami badania długości opóźnienia są: test największej wiarygodności (ang. *maximum likelihood test*), kryteria informacyjne (ang. *information criteria*) i test śladu macierzy korelacji reszt (ang. *residual correlation trace test*). Statystyka testu współczynnika wiarygodności ma postać następującą:

$$-2 \ln Q(H_k / H_{k+1}) = T \left(\ln |\hat{\Omega}_k| - \ln |\hat{\Omega}_{k+1}| \right),$$

gdzie H_k jest hipotezą zerową długości opóźnienia k , wobec hipotezy alternatywnej H_{k+1} długości opóźnienia $k+1$. Macierze kowariancji reszt $\hat{\Omega}_k$, $\hat{\Omega}_{k+1}$ powstają z oszacowania parametrów modelu VAR(k) i VAR($k+1$) metodą największej wiarygodności. Statystyka testowa ma rozkład χ^2 z p^2 stopniami swobody. Jeżeli wartość $\chi^2(p^2)$ jest większa od statystyki testowej to należy odrzucić hipotezę H_{k+1} na rzecz hipotezy H_k (Juselius (2003)).

Klasycznymi kryteriami informacyjnymi są kryteria: Akaike'a, Schwarz'a oraz Hannana-Quinna:

$$AIC = \ln |\hat{\Omega}_k| + (p^2 k) \frac{2}{T}$$

$$SC = \ln |\hat{\Omega}_k| + (p^2 k) \frac{\ln T}{T}$$

$$HQ = \ln |\hat{\Omega}_k| + (p^2 k) \frac{2 \ln \ln T}{T}.$$

Należy wybrać taką wartość k , dla której wartość kryterium jest najmniejsza. Kryteria informacyjne mogą być podstawą podjęcia decyzji o długości opóźnienia, jeżeli wielowymiarowy rozkład reszt modelu spełnia założenie normalności.

Statystyka testu śladu macierzy korelacji TKM odpowiada współczynnikiowi R^2 w jednorównaniowym modelu regresji:

$$TKM = 1 - \text{trace}(\hat{\Omega} \cdot (V(\Delta x_t))^{-1}) / p,$$

gdzie $V(\Delta x_t)$ jest macierzą kowariancji dla Δx_t , (Juselius (2003)).

Sprawdzenia, czy występuje autokorelacja reszt modelu można dokonać za pomocą testu Ljunga-Boxa:

$$Ljung - Box = T(T+2) \sum_{h=1}^{[T/4]} (T-h)^{-1} \text{trace}(\hat{\Omega}'_h \hat{\Omega}^{-1} \hat{\Omega}'_h \hat{\Omega}^{-1}),$$

gdzie $\hat{\Omega}_h = T^{-1} \sum_{t=h}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}'_{t-h}$. Statystyka Ljunga-Boxa ma rozkład χ^2 z $p^2([T/4]-k+1)-p^2$ stopniami swobody (Juselius (2003)).

Test normalności rozkładu reszt (ang. *normality test*) w CATS in RATS polega na jednoczesnym badaniu normalności p jednowymiarowych rozkładów reszt w oparciu o reszty systemowe \hat{u}_t (ang. *system residuals*):

$$\hat{u}_t = V\Lambda^{-1}V' \text{diag}(\hat{\sigma}_i^{-1/2})(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}),$$

gdzie Λ jest macierzą charakterystyczną macierzy korelacji reszt, a V jest macierzą odpowiadających im wektorów własnych. Analizowana jest seria reszt systemowych. Nową serię otrzymuje się po dodaniu kolejnej zmiennej do modelu i szacowaniu nowych reszt systemowych. Następnie bada się skośność i kurtozę reszt systemowych odpowiadających kolejnym seriom. Skośność i kurtoza w każdej z serii obliczana jest według wzoru:

$$SK_i = \tau_{1i} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it}^3,$$

$$KU_i = \tau_{2i} = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it}^4,$$

gdzie $i = 1, \dots, p$ jest indeksem serii. Hipotezą zerową jest normalność wymiarowego rozkładu reszt. Statystyka testu normalności rozkładu reszt TN :

$$TN = \sum_{i=1}^p (\tau_{1i}^2 + \tau_{2i}^2)$$

ma rozkład χ^2 z $2p$ stopniami swobody, (Juselius (2003)).

Klasycznym testem normalności rozkładu reszt jednej zmiennej jest test Jarque-Berra o rozkładzie $\chi^2(2)$:

$$Jarque - Berra = T \left(\frac{SK^2}{6} \right) + T \left(\frac{(KU-3)^2}{24} \right),$$

gdzie skośność i kurtoza są zdefiniowane następująco:

$$SK(\hat{\varepsilon}_n) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\hat{\varepsilon}_{it}}{\hat{\sigma}_i} \right)^3$$

$$KU(\hat{\varepsilon}_it) = T^{-1} \sum_{i=1}^T \left(\frac{\hat{\varepsilon}_{i,t}}{\hat{\sigma}_i} \right)^4.$$

Ostatnim przedstawionym tu testem normalności jest test heteroskedastyczności reszt, czyli tak zwany test efektu ARCH. Statystyka testowa wynosi $(T-k) \times R^2$, gdzie R^2 pochodzi z regresji pomocniczej:

$$\hat{\varepsilon}_{it} = \mu_0 + \sum_{j=1}^k \mu_j \hat{\varepsilon}_{i,t-j}^2 + \xi_i$$

(Engle (1982)).

Dodatek B: Konstrukcja rekursywnych testów stabilności parametrów

Rekursywne testy stabilności parametrów (ang. *recursive tests of parameter constancy*) można podzielić na testy „w przód” i „w tył”. Testy „w przód” opierają się na rekursywnym obliczaniu parametrów modelu zaczynając od próby bazowej $1, \dots, T - T_1$, $T_1 < T$. Następnie ostatnia obserwacja jest rekursywnie rozszerzana w przód: $T - T_1 + t_1$, $t_1 = 1, \dots, T_1$, aż do pokrycia całej próby T . Ten rodzaj testów nie wykrywa niestabilności parametrów w próbie bazowej $1, \dots, T - T_1$.

Testy „w tył” odwracają rekursję. Próbą bazową dla estymacji parametrów jest $T - T_1, \dots, T$, $T_1 < T$, która następnie jest rekursywnie rozszerzana w tył $T - T_1 - t_1$, $t_1 = 1, \dots, (T - T_1)$. Testy „w tył” mogą wykryć niestabilność parametrów dla początkowych obserwacji $1, \dots, T - T_1$, $2T_1 < T$, dlatego stanowią uzupełnienie testów „w przód”.

Poniżej zostaną pokazane przykłady rekursywnych testów stabilności parametrów „w przód”. Przyjmuje się, że $T_0 \equiv T - T_1 + 1$. Dla zrozumienia używanych poniżej oznaczeń należy przeczytać uprzednio rozdział 2.

Statystyka rekursywnie obliczonej logarytmicznej funkcji wiarygodności ma postać:

$$-\frac{2}{t_1} \ln(L(r)) = \left(\ln |S_{00,t_1}| + \sum_{i=1}^r \ln(1 + \hat{\lambda}_{i,t_1}) \right), \quad t_1 = T_0, \dots, T$$

i odpowiadający jej 95% przedział ufności wynosi $\pm 2 \sqrt{\frac{2p}{t_1}}$. Wartości tej statystyki można obliczyć dla modelu w formie pełnej $X(t)$ i zredukowanej $R(t)$, bez komponentów krótkookresowych i deterministycznych (Juselius (2003)).

Rekursywnie obliczona wartość statystyki testu śladu pokazuje, czy ilość i siła relacji kointegrujących w modelu jest stała przez cały okres próby. Rekursywnie obliczona wartość statystyki testu śladu ma postać:

$$\tau(p-r) = \left\{ -t_1 \sum_{i=1}^{p-r} \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \right\} / C_{0,95}^*(p-r),$$

gdzie $p-r = 1, \dots, p$, $t_1 = T_0, \dots, T$. Stabilność λ_i zależy od stabilności α_i i β_i w następujący sposób:

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\alpha}_i' S_{00}^{-1} \hat{\alpha}_i = \hat{\beta}_i' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \hat{\beta}_i,$$

dlatego jeżeli α_i i β_i są stałymi, to stałą jest również λ_i oraz wyraz $-t_1 \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$ będzie rósł liniowo, ze współczynnikiem nachylenia $-\ln(1 - \hat{\lambda}_i)$. Im silniejsza relacja kointegrująca tym to nachylenie jest większe. Ponadto, jeżeli $\hat{\lambda}_i = 0$ to wykresy rekursywnie obliczonych statystyk testu śladu są liniami poziomymi. Błąd standardowy potrzebny do obliczenia 95% obszaru ufności dla r największych wartości własnych $\hat{\lambda}_i(t_1)$, $i = 1, \dots, r$ dany jest wzorem:

$$SE(\hat{\lambda}_i) = \sqrt{T^{-1} 4(1 - \hat{\lambda}_i)^2 (\hat{\lambda}_i + \sum_{h=1}^{\frac{1}{T^{\frac{1}{3}}}} (1 - h/T^{\frac{1}{3}})^2 (r_{i,u}(h)^2 - r_{i,uv}(h)^2))},$$

gdzie

$$r_{i,u}(h) = T^{-1} \sum_{t=h}^T \hat{u}_{i,t} \hat{u}_{i,t-h},$$

$$r_{i,uv}(h) = T^{-1} \sum_{t=h}^T \hat{u}_{i,t} \hat{v}_{i,t-h}$$

dla

$$\hat{u}_{i,t} = \hat{\lambda}_i^{-\frac{1}{2}} \hat{\alpha}_i' S_{00}^{-1} R_{0t},$$

$$\hat{v}_{i,t} = (\hat{\lambda}_i (1 - \hat{\lambda}_i))^{-\frac{1}{2}} \hat{\alpha}_i' S_{00}^{-1} (R_{0t} - \hat{\alpha} \hat{\beta}' R_{1t}),$$

(Hansen, Johansen (1999)). Obliczone rekursywnie wartości własne powinny znajdować się w przedziale ufności. Można jednak dopuścić wyjątek dla bardzo małej próby bazowej i małej liczby stopni swobody, które zawyżają wartości $\hat{\lambda}_i$.

Kolejnym testem stabilności relacji kointegrujących jest test *tau*:

$$\tau_i(t_1) = \frac{t_1}{\sqrt{T}} T \Sigma_{ii}^{-\frac{1}{2}} (\hat{\lambda}_i(t_1) - \hat{\lambda}_i(T)),$$

gdzie Σ_{ii} jest wariancją λ_i . Hipoteza zerowa dotyczy stabilności relacji kointegrujących. Test ten uchodzi za konserwatywny, ponieważ prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju jest duże, (Hansen, Johansen (1999)).

Test stabilności β opiera się na założeniu, że oszacowane relacje kointegrujące $\bar{\beta}' x_t$ są stabilne w próbie bazowej $1, \dots, T_1$, którą może być też cała próba (hipoteza zerowa). Następnie sprawdza się, czy $\bar{\beta} \in \text{span}(\hat{\beta}(T_0))$, gdzie $\hat{\beta}(T_0)$ jest obliczone na podstawie próby $1, \dots, T_0$. Dlatego hipotezę zerową można zapisać jako:

$$H^0(\beta): \bar{\beta} \in \text{span}(\beta(t_1)), \quad t_1 = T_0, \dots, T.$$

Statystyka testowa dana jest przez:

$$-2\ln(L(H^0(\beta)/\hat{\beta}(t_1))) = t_1 \sum_{i=1}^r (\ln(1 - \hat{\rho}_i(t_1)) - \ln(1 - \hat{\lambda}_i(t_1))), \quad t_1 = T_0, \dots, T,$$

gdzie $\hat{\rho}_i(t_1)$ jest rozwiązaniem:

$$|\rho \bar{S}_{11,t_1} \bar{\beta} - \bar{S}_{10,t_1} S_{00,t_1}^{-1} S_{01,t_1} \bar{\beta}| = 0, \quad t_1 = T_0, \dots, T,$$

a $\hat{\lambda}_i(t_1)$ to r największych wartości własnych wielomianu charakterystycznego:

$$|\lambda S_{11,t_1} - S_{10,t_1} S_{00,t_1}^{-1} S_{01,t_1}| = 0, \quad t_1 = T_0, \dots, T.$$

Statystyka testowa ma rozkład asymptotyczny $\chi^2((p-r)r)$. Dzieląc wartość statystyki testowej przez 95% kwantyl rozkładu χ^2 hipotezę zerową można odrzucić jeżeli ta wartość jest większa od jedności (Juselius (2003)).

Test predykcji na jeden okres (ang.: forward prediction test) opiera się na założeniu, że wartości Δx_{t_1} mogą być dobrze aproksymowane, jeżeli zna się wartości $\Delta x_1, \dots, \Delta x_{t_1-1}$, $t_1 = T_0, \dots, T$ (hipoteza zerowa). Błąd predykcji na jeden okres i statystyka testu wynoszą:

$$f_{t_1} = \Delta x_{t_1} - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\Gamma}_{j,t_1-1} \Delta x_{t_1-j} - \hat{\Pi}_{t_1-1} x_{t_1-1} - \hat{\mu}_{0,t_1-1} - \Phi_{t_1-1} D_{t_1}, \quad t_1 = T_0, \dots, T,$$

$$T(t_1) = \left(\frac{t_1}{d_1 + r} + 1 \right) f_{t_1}' \Omega_{t_1-1}^{-1} f_{t_1}, \quad t_1 = T_0, \dots, T,$$

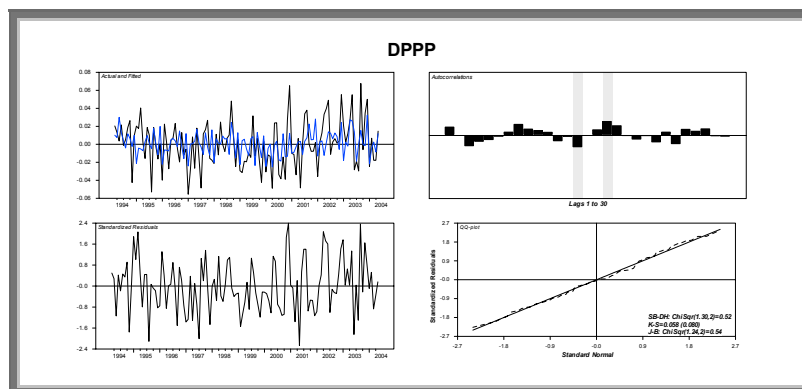
gdzie $d_1 = k - 1 + d$ i d jest liczbą zmiennych przełącznikowych w modelu. Statystyka $T(t_1)$ ma rozkład asymptotyczny $\chi^2(p)$. Jeżeli wartość testu podzielona przez $\chi_{0,95}^2$ jest większa od jedności to model nie prognozuje dobrze obserwacji z przedziałem ufności 95%. Błędy predykcji w modelu pełnym $X(t)$ powinny być znacząco większe niż w modelu skoncentrowanym $R(t)$. Statystyka testu predykcji na jeden okres dla jednej zmiennej $\Delta x_{i,t_1}$ dana przez:

$$T_i(t_1) = \left(\frac{t_1}{d_1 + r} + 1 \right) f_{i,t_1}^2 / \Omega_{ii,t_1-1}^{-1}, \quad t_1 = T_0, \dots, T,$$

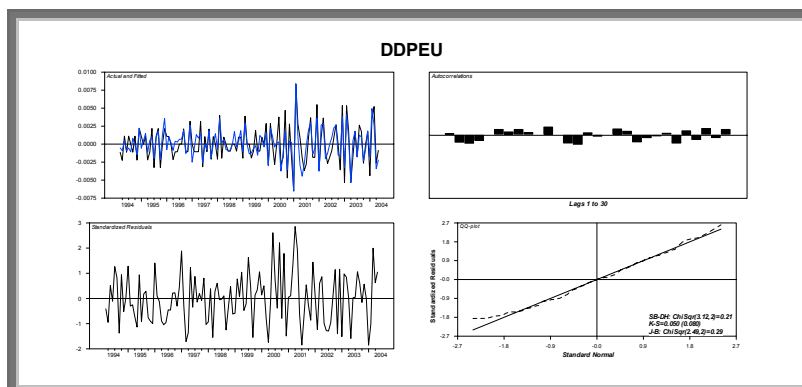
ma rozkład asymptotyczny $\chi^2(1)$, Juselius (2003)).

Dodatek C: Diagramy reszt modelu

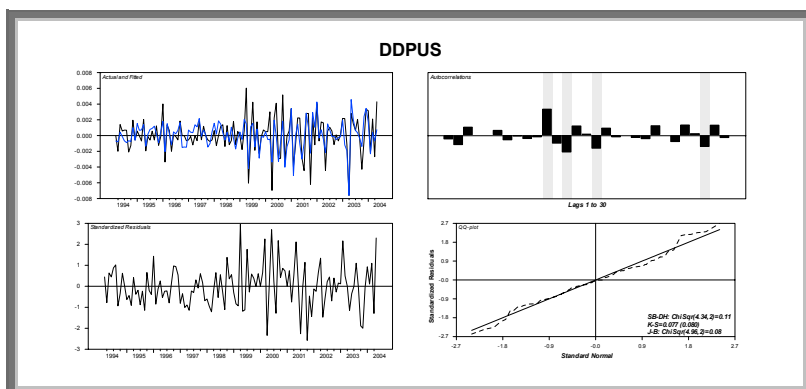
Diagramy reszt powstałych z oszacowania parametrów w modelu rozszerzonym VEqCM bez restrykcyj wygenerowane przez CATS in RATS:



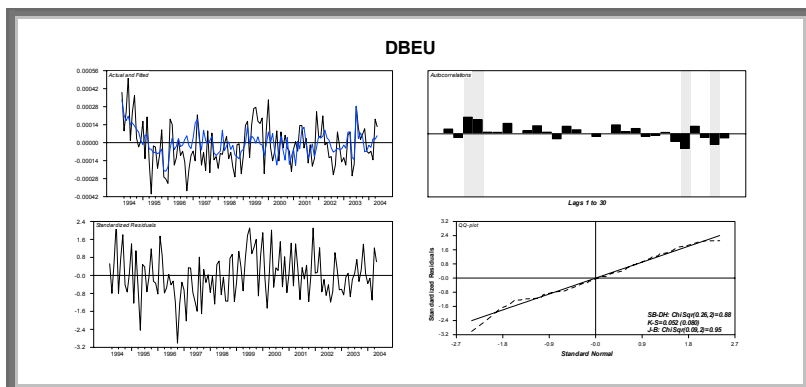
25. Diagramy reszt w Cats in Rats dla realnego kursu walutowego dolar – euro - *ppp*,



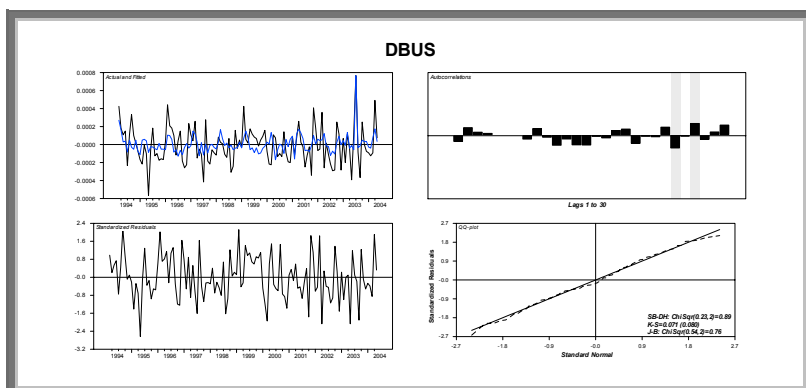
26. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów wskaźnika CPI w strefie euro - *Δpeu*,



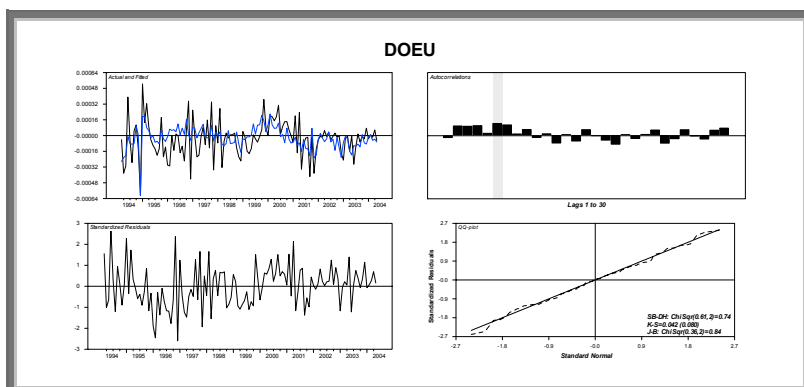
27. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów wskaźnika CPI w USA - *Apus*,



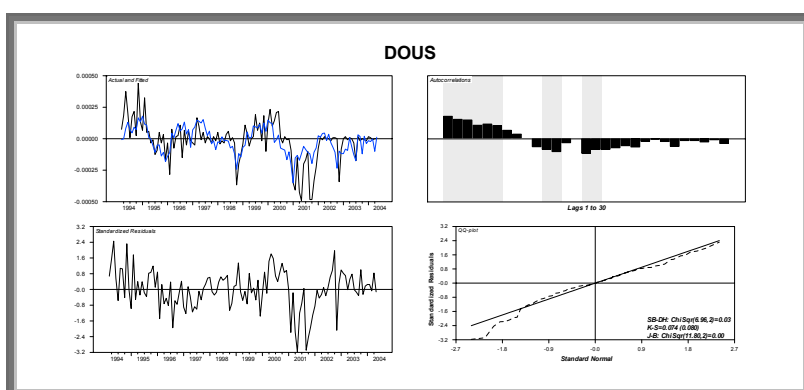
28. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro - *beu*,



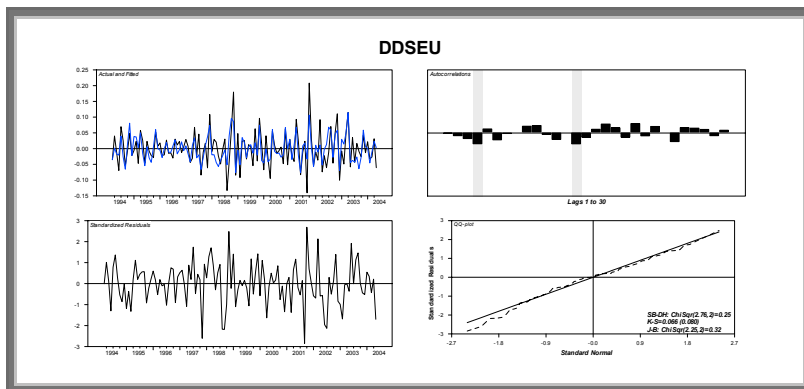
29. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania 10-letnich obligacji skarbowych w USA - *bus*,



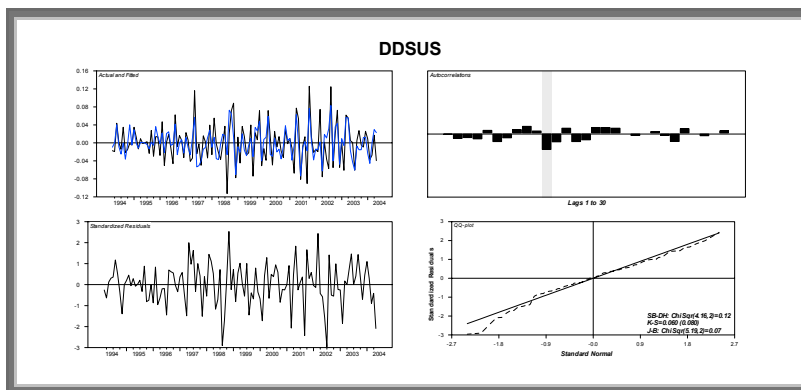
30. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania depozytu overnight (O/N) w strefie euro - oeu_t



31. Diagramy reszt w Cats in Rats dla oprocentowania depozytu overnight (O/N) w USA - ous_t



32. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów indeksu giełdowego w strefie euro - Δseu_t



33. Diagramy reszt w Cats in Rats dla przyrostów indeksu giełdowego w USA - *Asus*,

Dodatek D: Szeregi czasowe

Szeregi czasowe danych zastosowanych w modelach: wyszukiwarka EcoWin Pro Data Base, baza OECD MEI. Dane są uśrednione miesięcznie. Oznaczenia:

eurus – nominalny kurs walutowy spot euro – dolar;

useur – nominalny kurs walutowy spot dolar – euro;

euipi – indeks poziomu cen konsumpcyjnych w strefie euro;

uscpi – indeks poziomu cen konsumpcyjnych w USA;

eu10Y – oprocentowanie roczne 10-letnich obligacji skarbowych w strefie euro;

us10Y – oprocentowanie roczne 10-letnich obligacji skarbowych w USA;

euON – oprocentowanie roczne depozytu overnight w strefie euro;

usON – oprocentowanie roczne depozytu overnight w USA;

eustocks – poziom indeksu giełdowego w strefie euro (na podstawie DJEurStoxx);

usstocks – poziom indeksu giełdowego w USA (na podstawie DJIA).

Tabela 40: Szeregi czasowe zastosowane w badaniu

	eurus	useur	Euipi	uscpi	eu10Y	us10Y	euON	usON	eustocks	usstocks
1994-1	0,896	1,116	88,6	84,96	6,69	6,14	6,84	3,05	32,73	40,72
1994-2	0,8843	1,131	89	85,19	6,88	6,64	6,73	3,25	33,07	40,7
1994-3	0,867	1,153	89,3	85,42	7,35	7,15	6,68	3,34	32,26	39,98
1994-4	0,856	1,168	89,4	85,48	7,46	7,37	6,22	3,56	32,76	38,52
1994-5	0,853	1,172	89,6	85,66	7,75	7,5	5,85	4,01	32,85	38,77
1994-6	0,8335	1,200	89,7	85,89	8,37	7,68	6,32	4,25	30,73	39,03
1994-7	0,8335	1,200	89,9	86,18	8,39	7,4	6,27	4,26	30,82	38,73
1994-8	0,8275	1,208	90,1	86,53	8,68	7,53	5,94	4,47	31,7	39,79
1994-9	0,8115	1,232	90,2	86,7	9,12	7,93	6	4,73	30,87	40,02
1994-10	0,7916	1,263	90,4	86,76	9,16	8,05	6,13	4,76	29,83	39,65
1994-11	0,8238	1,214	90,4	86,99	9,12	8,07	5,97	5,29	30,26	39,23
1994-12	0,8158	1,226	90,6	87,17	9,14	7,98	5,24	5,45	30,04	38,63
1995-1	0,8	1,250	90,9	87,4	9,34	7,78	5,87	5,53	29,64	39,39
1995-2	0,7865	1,271	91,2	87,63	9,19	7,52	6,03	5,92	29,93	40,68
1995-3	0,7572	1,321	91,6	87,8	9,43	7,51	6,42	5,98	28,84	41,45
1995-4	0,754	1,326	91,8	88,15	9,26	7,39	6,53	6,05	29,45	42,63
1995-5	0,7652	1,307	91,9	88,33	8,78	6,71	6,48	6,01	30,87	43,78
1995-6	0,752	1,330	92,2	88,5	8,75	6,64	6,36	6	30,89	44,98
1995-7	0,7434	1,345	92,2	88,62	8,71	6,86	6,2	5,85	31,63	46,33
1995-8	0,7832	1,277	92,3	88,79	8,47	6,71	5,96	5,74	32,12	46,62
1995-9	0,7701	1,299	92,6	88,91	8,36	6,59	5,8	5,8	31,91	48,23
1995-10	0,7694	1,300	92,6	89,14	8,48	6,38	6,02	5,76	30,82	48,44
1995-11	0,781	1,280	92,6	89,26	8,16	6,19	5,76	5,8	31,37	49,34
1995-12	0,7813	1,280	92,8	89,37	7,82	5,99	5,62	5,6	32,19	50,94

1996-1	0,8114	1,232	93,1	89,84	7,44	6,03	5,26	5,56	33,63	51,15
1996-2	0,7953	1,257	93,5	90,01	7,66	6,56	4,89	5,22	34,39	53,83
1996-3	0,7947	1,258	93,9	90,3	7,83	6,81	4,89	5,31	34,48	53,87
1996-4	0,8152	1,227	94,1	90,65	7,62	7,03	4,71	5,22	35,52	53,99
1996-5	0,811	1,233	94,2	90,82	7,48	7,15	4,73	5,24	36,04	55,13
1996-6	0,8035	1,245	94,2	91	7,51	7,01	4,73	5,27	36,09	55,67
1996-7	0,7836	1,276	94,2	91,17	7,39	7,06	4,52	5,4	35,07	53,68
1996-8	0,7861	1,272	94,2	91,29	7,31	7,24	4,39	5,22	35,12	55,09
1996-9	0,8008	1,249	94,4	91,58	7,13	7,02	4,08	5,3	35,59	56,08
1996-10	0,7888	1,268	94,5	91,87	6,68	6,71	4,15	5,24	36,89	58,03
1996-11	0,7955	1,257	94,5	92,16	6,43	6,44	4,57	5,31	37,76	60,4
1996-12	0,8003	1,250	94,8	92,39	6,31	6,72	4,04	5,29	38,89	60,84
1997-1	0,847	1,181	95,1	92,57	6,23	6,85	4,35	5,25	41,23	62,7
1997-2	0,8722	1,147	95,3	92,74	6,06	6,9	4,35	5,19	44,04	65,03
1997-3	0,8654	1,156	95,4	92,8	6,32	7,21	4,09	5,39	45,03	64,74
1997-4	0,8881	1,126	95,4	92,86	6,39	7,03	3,85	5,51	44,65	62,3
1997-5	0,875	1,143	95,7	92,86	6,18	6,97	3,84	5,5	47,37	67,33
1997-6	0,8868	1,128	95,7	93,03	6,09	6,84	3,94	5,56	49,18	71,01
1997-7	0,9307	1,074	95,8	93,15	5,83	6,34	3,83	5,52	53,46	74,72
1997-8	0,9177	1,090	95,8	93,38	5,94	6,67	4,02	5,54	53,43	74,81
1997-9	0,9024	1,108	96	93,61	5,66	6,45	3,87	5,54	52,82	76,09
1997-10	0,8769	1,140	96	93,79	5,75	6,19	4,28	5,5	53,1	77,56
1997-11	0,8906	1,123	96,1	93,9	5,59	6,12	3,86	5,52	50,22	76,45
1997-12	0,9068	1,103	96,2	93,96	5,46	6,01	3,98	5,5	52,94	78,4
1998-1	0,9241	1,082	96,1	94,08	5,22	5,87	3,89	5,56	55,3	78,32
1998-2	0,9165	1,091	96,3823	94,08	5,12	5,97	4,22	5,51	59,47	82,68
1998-3	0,9282	1,077	96,4764	94,08	5,01	6	3,83	5,49	65,28	87,11
1998-4	0,9062	1,104	96,6646	94,19	5	6,01	3,76	5,45	70	89,81
1998-5	0,9057	1,104	96,8529	94,43	5,06	5,88	3,79	5,49	71,49	89,25
1998-6	0,9128	1,096	96,947	94,54	4,91	5,71	3,76	5,56	72,83	88,52
1998-7	0,9045	1,106	96,947	94,77	4,82	5,79	3,77	5,54	76,49	91,1
1998-8	0,8941	1,118	96,947	94,89	4,59	5,42	3,78	5,55	70,33	83,76
1998-9	0,8516	1,174	96,947	94,95	4,27	5,13	3,81	5,51	62,09	78,7
1998-10	0,8421	1,188	96,8529	95,18	4,25	5,32	3,66	5,07	58,13	79,47
1998-11	0,8621	1,160	96,8529	95,3	4,24	5,27	3,4	4,83	65,14	87,66
1998-12	0,8569	1,167	96,947	95,47	3,95	5,33	3,09	4,68	67,1	89,48
1999-1	0,88	1,136	96,8529	95,64	3,82	5,29	3,14	4,63	72,5	92,51
1999-2	0,9107	1,098	97,1352	95,64	3,98	5,8	3,12	4,76	71,44	91,46
1999-3	0,9301	1,075	97,4175	95,7	4,18	5,87	2,93	4,81	72,1	93,79
1999-4	0,9448	1,058	97,6998	96,34	4,04	5,89	2,71	4,74	74,67	97,53
1999-5	0,9544	1,048	97,794	96,4	4,21	6,1	2,55	4,74	74,82	98,75
1999-6	0,9683	1,033	97,794	96,4	4,53	6,24	2,56	4,76	75,92	97,8
1999-7	0,936	1,068	97,9822	96,81	4,86	6,34	2,52	4,99	77,41	100,8
1999-8	0,947	1,056	98,0763	97,04	5,06	6,42	2,44	5,07	74,77	96,48
1999-9	0,937	1,067	98,0763	97,44	5,24	6,4	2,43	5,22	76,92	94,44
1999-10	0,9539	1,048	98,1704	97,62	5,47	6,46	2,5	5,2	76,09	93,07
1999-11	0,9943	1,006	98,2645	97,79	5,18	6,57	2,94	5,42	82,89	98,53
1999-12	0,9922	1,008	98,6409	98,03	5,3	6,76	3,04	5,3	91,76	99,15

2000-1	1,021	0,979	98,7351	98,32	5,7	6,67	3,04	5,45	94,97	98,51
2000-2	1,0335	0,968	99,1115	98,66	5,66	6,41	3,28	5,73	102,38	94,15
2000-3	1,0445	0,957	99,4879	99,3	5,49	6,14	3,51	5,85	106,7	96,68
2000-4	1,0984	0,910	99,5821	99,25	5,41	6,27	3,69	6,02	101,15	100,49
2000-5	1,0718	0,933	99,6762	99,42	5,52	6,36	3,92	6,27	101,34	99,44
2000-6	1,0453	0,957	100,1465	100	5,35	6,2	4,29	6,53	102,59	100,92
2000-7	1,0799	0,926	100,3345	100,3	5,45	6,08	4,31	6,54	102,38	101,49
2000-8	1,1221	0,891	100,3345	100,3	5,4	5,92	4,42	6,5	101,46	103,49
2000-9	1,1375	0,879	100,8055	100,8	5,47	6,09	4,59	6,52	101,04	103,63
2000-10	1,1804	0,847	100,8055	101	5,42	5,98	4,76	6,51	95,92	100,45
2000-11	1,1496	0,870	101,0875	101,2	5,34	5,75	4,83	6,51	96,95	100,46
2000-12	1,0756	0,930	101,1815	101,4	5,07	5,51	4,83	6,4	93,11	100,28
2001-1	1,0741	0,931	100,6175	102	5,01	5,62	4,75	5,98	92,09	101,07
2001-2	1,0874	0,920	100,8995	102,2	5,02	5,48	4,99	5,49	89	100,68
2001-3	1,1305	0,885	101,4645	102,2	4,94	5,57	4,78	5,31	82,58	93,75
2001-4	1,1273	0,887	102,1235	102,5	5,1	5,88	5,06	4,8	84,09	94,31
2001-5	1,1827	0,846	102,5935	103	5,26	5,91	4,65	4,21	87,51	100,12
2001-6	1,1808	0,847	102,6875	103,3	5,21	5,88	4,54	3,97	83,81	98,01
2001-7	1,1418	0,876	102,4995	103	5,25	5,58	4,51	3,77	79,35	95,29
2001-8	1,0976	0,911	102,4055	103,1	5,06	5,44	4,49	3,65	76,89	93,92
2001-9	1,0964	0,912	102,6875	103,4	5,04	5,41	3,99	3,07	64,74	84,58
2001-10	1,1091	0,902	102,7815	103,1	4,82	5	3,97	2,49	67,12	86,39
2001-11	1,1173	0,895	102,6875	103,1	4,67	5,49	3,51	2,09	71,79	89,38
2001-12	1,1221	0,891	103,1585	102,9	4,96	5,71	3,34	1,82	72,69	90,55
2002-1	1,1613	0,861	103,2525	103,1	5,02	5,63	3,29	1,73	72,81	90,38
2002-2	1,1586	0,863	103,4405	103,3	5,07	5,57	3,28	1,74	70,31	88,49
2002-3	1,1464	0,872	104,0055	103,7	5,32	6	3,26	1,73	74,44	93,33
2002-4	1,1083	0,902	104,4755	104,2	5,3	5,69	3,32	1,75	73,21	91,29
2002-5	1,0664	0,938	104,6645	104,2	5,3	5,71	3,31	1,75	70,38	89,45
2002-6	1,0142	0,986	104,6645	104,4	5,16	5,58	3,35	1,75	63,68	84,57
2002-7	1,0223	0,978	104,5695	104,6	5,03	5,32	3,3	1,73	56,93	75,52
2002-8	1,0168	0,983	104,5695	104,9	4,73	4,97	3,29	1,74	54,59	76,41
2002-9	1,0115	0,989	104,8525	105,1	4,52	4,63	3,32	1,75	49,99	73,18
2002-10	1,0111	0,989	105,1345	105,2	4,62	4,93	3,3	1,75	48,15	71,45
2002-11	1,0055	0,995	105,0405	105,3	4,59	5,07	3,3	1,34	51,8	75,01
2002-12	0,9547	1,047	105,5105	105,5	4,41	4,73	3,09	1,24	50,41	74,58
2003-1	0,9311	1,074	105,4165	105,8	4,27	4,81	2,79	1,24	48,69	74,29
2003-2	0,9279	1,078	105,8875	106,4	4,06	4,57	2,76	1,26	44,79	69,62
2003-3	0,9187	1,089	106,5465	106,9	4,13	4,71	2,75	1,25	43,19	69,41
2003-4	0,8976	1,114	106,6405	106,5	4,23	4,66	2,56	1,26	46,71	73,13
2003-5	0,8491	1,178	106,5465	106,5	3,92	4,19	2,56	1,26	47,67	77,43
2003-6	0,8734	1,145	106,6405	106,6	3,72	4,35	2,21	1,22	50,39	82,04
2003-7	0,8876	1,127	106,5465	106,7	4,06	5,27	2,08	1,01	51	81,81
2003-8	0,9126	1,096	106,7345	107,1	4,2	5,17	2,1	1,03	52,47	82
2003-9	0,8531	1,172	107,1105	107,5	4,23	4,73	2,02	1,01	53,53	84,47
2003-10	0,8598	1,163	107,2045	107,4	4,31	5,03	2,01	1,01	53,23	86,61
2003-11	0,8326	1,201	107,2995	107,2	4,44	5,03	1,97	1	55,21	88
2003-12	0,7927	1,262	107,5815	107,4	4,36	4,94	2,06	0,98	56,52	91,75

2004-1	0,8072	1,239	107,3935	107,9	4,26	4,83	2,02	1	59,14	96,53
2004-2	0,801	1,249	107,5815	108,2	4,18	4,68	2,03	1,01	59,92	97,88
2004-3	0,8171	1,224	108,3345	108,7	4,02	4,57	2,01	1	59,12	96,6
2004-4	0,8336	1,200	108,8045	108,9	4,24	5,16	2,08	1	60,18	96,99
2004-5	0,8191	1,221	109,1815	109,6	4,39	5,25	2,02	1	57,66	93,62

Bibliografia

1. Campbell, J.Y. (1998): *Asset Prices, Consumption and Business Cycles*. NBER working paper.
2. Campbell, J.Y. (1995): *Some lessons from the yield curve*. „Journal of Economic Perspectives”, vol 9.3, 129-152.
3. Campbell, J.Y., Cochrane, J. (1999): *Explaining poor performance of Consumption Based Asset Pricing Model*. NBER working paper.
4. Clements M. P., Hendry D. F. (1995): *Forecasting in cointegrated systems*. „Journal of Applied Econometrics” 10, 127-146.
5. Clements M. P., Hendry D. F. (1998): *Forecasting Economic Time Series*. Cambridge University Press.
6. Clements M. P., Hendry D. F. (1999): *Forecasting Non-stationary Economic Time Series*. MIT Press.
7. Cochrane, J. (1997): *Time Series for Macroeconomics and Finance*. Graduate School of Business, University of Chicago.
8. Cochrane, J. (2000): *Asset Pricing*. McGraw-Hill.
9. Cumby, R., Obstfeld, M. (1981): *Exchange rate expectations and nominal interest rates: A test of the Fisher hypothesis*. „Journal of Finance” 36, 697-703.
10. Dobrzeniecki, B. (2005): „Szoki w preferencjach czy technologii? Próba wyjaśnienia zmienności cen aktywów finansowych na tle teorii CCAP i RBC”, *Materiały i Studia* 191; Narodowy Bank Polski;
11. Doornik, J. A., Hendry D.F. (1998): *Give Win. An interface to empirical modeling*. Timberlake Consultants.
12. Egert, B., Lechreche-Revil A. (2003): *Estimating of Fundamental Equilibrium Exchange Rate of Central and Eastern European Countries*. ECB working paper.
13. Egert, B., Lechreche-Revil A., Lommatzsch K. (2004): *The Stock Flow Approach to the Real Exchange Rate of EU Acceding Countries*. ECB working paper.
14. Engle, R. F. (1982): *Autoregressive conditional heteroscedasticity, with the estimates of variance of United Kingdom inflation*. „Econometrica” 55, 987-1007.
15. Engle, R. F., Granger C.W.J. (1987): *Cointegration and error correction; Representation, estimation and testing*. „Econometrica” 55, 251-276;

16. Engle, R. F., Yoo S. (1987): *Forecasting and testing in cointegrated systems*. „Journal of Econometrics” 35, 143-159.
17. Froot, K., Rogoff K. (1995): *Perspectives on PPP and long run real exchange rates*. „Handbook of International Economics”, vol 3, North Holland, Amsterdam.
18. Gonzalo, J., Ng, S. (2001): A systematic framework for analyzing the dynamic effects of permanent and transitory shocks. „Journal of Economic Dynamics & Control” 25, 1527-1546.
19. Hansen H., Johansen S. (1999): *Some tests for parameter constancy in the cointegrated VAR model*. „Econometrics Journal” 2, 306-333.
20. Hansen, H., Juselius, K (1994): *Cats in Rats, Manual of cointegration analysis of time series*. Estima, Evanston.
21. Hendry, D. F. (1995a): *Dynamic Econometrics*. Oxford University Press.
22. Hendry, D. F. (1995b): *On the interaction of unit roots and exogeneity*. „Econometric Reviews” 14, 383-419.
23. Hendry D.F., Juselius K. (2000): *Explaining cointegration analysis, Part 1*. „Energy Journal” 21:1, 1-42.
24. Hendry D.F., Juselius K. (2001): *Explaining cointegration analysis, Part 2*. „Energy Journal 22.1.
25. Johansen, S. (1987): Statistical analysis of cointegrating vectors. „Journal of Economic Dynamics and Control” 12, 231-254.
26. Johansen, S. (1992): *A representation of vector autoregressive processes integrated of order 2*. „Econometric Theory” 8, 188-202.
27. Johansen, S. (1995): *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press.
28. Johansen, S., Juselius, K. (1992): *Domestic and Foreign Effects on Prices in an Open Economy; the Case of Denmark*. „Journal of Economic Policy Modeling”, vol. 14, Nr 4.
29. Johansen, S., Juselius, K. (1992): *Testing structural hypotheses in a multivariate cointegration analysis of the PPP and UIP for UK*. „Journal of Econometrics” 53, 211-244.
30. Johansen, S., Juselius, K. (2003): *Controlling inflation in a cointegrated vector autoregressive model with an application to US data*. „Discussion paper 03”, Institute of Economics, University of Copenhagen.

31. Johansen, S., Mosconi R., Nielsen, B. (2000): *Cointegration analysis in the presence of structural breaks in the deterministic trend*. „Econometrics Journal” 3, 216-249.
32. Juselius, K. (2003): *The Cointegrated VAR Model: Econometric Methodology and Macroeconomic Applications*. „Institute of Economics”, University of Copenhagen.
33. Juselius, K. (1995): *Do purchasing power parity and uncovered interest rate parity hold in the long run? An example of likelihood inference in a multivariate time series model*. „Journal of Econometrics”, 69, 211-240.
34. Juselius, K., MacDonald, R. (2003): *International Parity Relationships Between Germany and the United States: Joint Modeling Approach*. Discussion paper, University of Copenhagen.
35. Mehra, R., Prescott, E.C. (1985): *The Equity Premium – a Puzzle*. „Journal of Monetary Economics” 15, 145-161.
36. Shapiro, A. (2000): *Multinational Financial Management, 6th ed.* John Wiley and sons.
37. Welfe, A. (1998): *Ekonometria*. Wyd 2., PWE, Warszawa.
38. Welfe, A. (red.) (2000): *Gospodarka Polski w okresie transformacji*. PWE, Warszawa.