

MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 252

Metody spektralne w analizie cyklu koniunkturalnego gospodarki polskiej

Paweł Skrzypczyński

Warszawa, 2010 r.

Chciałbym podziękować prof. Tomaszowi Kuszewskiemu za wsparcie oraz cenne uwagi i sugestie, które przyczyniły się do nadania pracy jej ostatecznej formy. Dziękuję również uczestnikom seminariów naukowych w Szkole Głównej Handlowej i Narodowym Banku Polskim oraz recenzentom za pomocne uwagi, bez których praca ta byłaby dużo uboższa.

Projekt graficzny:

Oliwka s.c.

Skład i druk:

Drukarnia NBP

Wydał:

Narodowy Bank Polski
Departament Edukacji i Wydawnictw
00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21
tel. (22) 653 23 35, fax (22) 653 13 21

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2010

Materiały i Studia są rozprowadzane bezpłatnie.

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: <http://www.nbp.pl>

Spis treści

Wstęp	5
Rozdział 1. Badanie koniunktury gospodarczej	11
Wprowadzenie	11
1.1. Współczesne i klasyczne cykle koniunkturalne	11
1.2. Cechy morfologiczne cykli koniunkturalnych	14
1.3. Stylizowane fakty na temat wahań aktywności gospodarczej	16
1.4. Metody badania koniunktury gospodarczej	17
Podsumowanie	22
Rozdział 2. Metody spektralne w analizie szeregów czasowych – zarys teoretyczny	23
Wprowadzenie	23
2.1. Słabo stacjonarne procesy stochastyczne z czasem dyskretnym i analiza spektralna	24
2.2. Niestacjonarność i jej znaczenie dla analizy spektralnej	35
2.3. Analiza cross-spektralna	40
2.4. Szereg czasowy i jego składowe w dziedzinie czasu i częstotliwości	45
2.5. Filtry Wienera-Kołmogorowa i „idealne” filtry częstotliwościowe	50
Podsumowanie	66
Rozdział 3. Pomiar cyklu koniunkturalnego w skończonej próbie obserwacji	67
Wprowadzenie	67
3.1. Analiza spektralna i cross-spektralna – estymacja	67
3.2. Aproksymacje filtrów do dekompozycji typu „trend-cykl”	78
3.2.1. Filtr Hodricka-Prescotta	78
3.2.2. Filtr Baxter-Kinga	98
3.2.3. Filtr Christiano-Fitzgeralda	104
3.3. Modele strukturalne i dekompozycje typu „trend-cykl”	118
3.3.1. Modele SVAR	118
3.3.2. Modele szeregów czasowych w przestrzeni stanów i filtr Kalmana	132
Podsumowanie	136
Rozdział 4. Cykl koniunkturalny w gospodarce polskiej.	139
Wprowadzenie	139
4.1. Badanie cech charakterystycznych cyklu koniunkturalnego w Polsce	139
4.1.1. Pomiar wahań aktywności gospodarczej w Polsce	139
4.1.2. Stylizowane fakty a cykl koniunkturalny w Polsce	155
4.2. Badanie synchronizacji cyklu koniunkturalnego Polski z cyklami gospodarczymi w strefie euro	166
4.2.1. Cel i forma badania	166
4.2.2. Przegląd literatury dotyczącej synchronizacji cykli koniunkturalnych	167
4.2.3. Synchronizacja cykli koniunkturalnych	170
4.2.4. Transmisja szoków	184
Podsumowanie	196
Zakończenie	199
Bibliografia	205
Aneks. Źródła pochodzenia danych wykorzystanych w rozdziale 4	213

Wstęp

Fenomen cyklu koniunkturalnego jest nieodzownym elementem funkcjonowania gospodarki. Dotyczy on zarówno gospodarek rozwiniętych, jak również rozwijających się. W pewnych okresach obserwuje się szybki wzrost gospodarczy, któremu towarzyszy spadek bezrobocia i wzrost inflacji, natomiast w innych okresach wzrost gospodarczy słabnie, dynamika wzrostu cen maleje, a sytuacja na rynku pracy ulega pogorszeniu. Z uwagi na to, że obserwowane współcześnie cykle koniunkturalne objawiają się nieregularnymi zarówno co do skali, jak również czasu trwania, zmianami poziomu produkcji, zatrudnienia czy również cen, współczesna makroekonomia zaniechała prób interpretacji tychże cykli jako procesów o deterministycznej naturze. Tym samym bardziej uzasadnionym wydaje się nazywanie cyklu koniunkturalnego mianem wahań aktywności gospodarczej, co lepiej oddaje stochastyczny charakter tego zjawiska. Przykładowo, analizując chronologię powojennego cyklu koniunkturalnego w Stanach Zjednoczonych (według National Bureau of Economic Research, NBER), można dojść do wniosku, że zjawisko to zdecydowanie nie powinno być postrzegane jako deterministyczne. Podobna sytuacja ma również miejsce w innych gospodarkach, w przypadku których kształtowanie się różnych zmiennych ekonomicznych w czasie wskazuje na cykliczny, jednakże nieregularny charakter zmian. Pomimo krótkich szeregów czasowych obrazujących aktywność gospodarczą, podobne tendencje można również zaobserwować w przypadku gospodarki polskiej. Tym samym używając pojęcia cyklu koniunkturalnego, należy mieć świadomość, że dotyczy ono cyklicznych i zarazem nieregularnych wahań aktywności gospodarczej, które przejawiają się w zmianach różnorodnych mierników gospodarczych. Równocześnie współczesna myśl ekonomiczna skupia się na poglądzie, że cykle koniunkturalne są efektem różnego rodzaju zaburzeń, także zróżnicowanych, co do skali i czasu występowania – przy czym wpływają one z różną siłą i opóźnieniem na całą gospodarkę. Równocześnie szeroko rozumiana globalizacja najprawdopodobniej jest

czynnikiem powodującym silniejsze przenoszenie się tych zaburzeń pomiędzy różnymi gospodarkami, co tym samym powoduje, że zjawisko cyklu koniunkturalnego staje się jeszcze trudniejsze do zbadania. Pomimo że zjawisko cyklu koniunkturalnego było zawsze obecne w życiu gospodarczym, do dnia dzisiejszego nie istnieje jedna teoria ekonomiczna, która byłaby w stanie w pełni wytłumaczyć ten fenomen. W związku z tym jednym z głównych zadań makroekonomii pozostaje nadal poszukiwanie odpowiedzi na pytania związane z przyczynami powstawania cykli koniunkturalnych, jak również sposobami przenoszenia się wahań koniunkturalnych pomiędzy różnymi gospodarkami. Równocześnie nieustannie poszukiwane są stosowne metody modelowania ekonometrycznego, ponieważ tradycyjne koncepcje często okazują się być zawodne w przypadku opisu złożonych zależności pomiędzy procesami ekonomicznymi. Podobna sytuacja ma również miejsce w przypadku metod ekonometrycznych służących do modelowania zjawiska cyklu koniunkturalnego.

Praca ma dwa podstawowe cele. Po pierwsze, identyfikację możliwości zastosowania i miejsca metod spektralnych w analizach dotyczących zagadnień związanych z cyklami koniunkturalnymi. Wśród rozważanych metod największy nacisk położono na opis i ocenę metod służących do dekompozycji ekonomicznych szeregów czasowych na komponenty, których charakterystyka stochastyczna jest określona w dziedzinie częstotliwości. Tym samym głównym przedmiotem zainteresowania wśród rozważanych metod są filtry typu pasmowo-przepustowego, służące do estymacji komponentów obrazujących wahania koniunkturalne zmiennych ekonomicznych¹. Prezentowane w pracy metody, takie jak filtr Hodricka-Prescotta, filtr Baxter-Kinga, czy filtr Christiano-Fitzgeralda są obecnie „typowym” zestawem narzędzi analitycznych służących do ekstrakcji cykli koniunkturalnych z danych ekonomicznych i wykorzystuje się je powszechnie w literaturze przedmiotu. W pracy podjęto m.in. próbę porównania i oceny własności tych filtrów w dziedzinie częstotliwości pod kątem jakości estymacji cyklu koniunkturalnego. Dodatkowo przedstawiono inne wybrane metody ekstrakcji wahań cyklicznych. Oprócz metod ekonometrycznych służących do ekstrakcji cyklu koniunkturalnego w pracy przedstawiono narzędzia analizy cross-spektralnej i ich zastosowanie do porównywania własności komponentów koniunkturalnych dwóch szeregów czasowych, co może być użyte jako metoda badania synchronizacji cykli gospodarczych pomiędzy dwoma krajami czy metoda służąca do wnioskowania odnośnie do stylizowanych faktów o cyklu koniunkturalnym w danej gospodarce.

¹ Ogólnie rzecz biorąc pod pojęciem filtra należy rozumieć układ o określonej charakterystyce, który generuje sygnał wyjściowy na podstawie zadanego impulsu, będącego sygnałem wejściowym. Tym samym sygnał wyjściowy jest odpowiedzią filtra na zadany impuls.

Po drugie, praca ma wykazać przydatność omówionych metod spektralnych do badania fluktuacji koniunkturalnych w gospodarce polskiej. Badanie empiryczne oprócz określenia przebiegu cyklu koniunkturalnego w Polsce, czyli pomiaru cyklu koniunkturalnego, ma na celu przede wszystkim weryfikację hipotez dotyczących stylizowanych faktów na temat cykli gospodarczych w przypadku Polski, jak również określenie stopnia synchronizacji cyklu koniunkturalnego w Polsce z cyklami gospodarczymi występującymi w gospodarkach strefy euro. Wiedza na temat występujących współzależności pomiędzy zmiennymi ekonomicznymi w ramach cyklu koniunkturalnego z jednej strony jest ważna przy bieżącym monitorowaniu koniunktury, z drugiej natomiast jest przydatna w procesie konstruowania modeli ekonometrycznych mających prognozować przyszłe tendencje koniunkturalne. Z kolei synchronizacja cykli koniunkturalnych gospodarek tworzących unię walutową jest bardzo ważnym elementem determinującym efektywność wspólnej polityki monetarnej, tym samym pytanie o stopień synchronizacji polskiego cyklu koniunkturalnego jest wyjątkowo ważne również w związku z przyszłym wprowadzeniem euro jako wspólnej waluty w gospodarce polskiej.

Wymienione cele spowodowały, że w pracy postawiono trzy tezy badawcze. Pierwsza z nich jest związana z częścią metodologiczną opracowania, natomiast kolejne dwie odnoszą się do zagadnień związanych z badaniem empirycznym cyklu koniunkturalnego w gospodarce polskiej. Postawione tezy mogą być nazwane kolejno jako:

- i) teza o wykorzystaniu metod spektralnych do analizy wahań aktywności gospodarczej,
- ii) teza o stylizowanych faktach na temat cykli koniunkturalnych w przypadku Polski,
- iii) teza o synchronizacji cyklu koniunkturalnego gospodarki polskiej i strefy euro.

Zgodnie z pierwszą tezą różnorodne metody spektralne w analizie szeregów czasowych stanowią użyteczne narzędzia ekonometryczne badania zjawisk związanych z cyklem koniunkturalnym. Teza ta odnosi się m.in. do zagadnienia pomiaru cyklu koniunkturalnego i przydatności do tego celu filtrów typu pasmowo-przepustowego, które wywodzą się bezpośrednio z podstaw teoretycznych analizy spektralnej.

Zgodnie z drugą tezą cykl koniunkturalny w gospodarce polskiej spełnia większość stylizowanych faktów na temat wahań koniunkturalnych charakterystycznych dla gospodarki rynkowej. Tym samym teza ta mówi, że wahania cykliczne makroekonomicznych i finansowych szeregów czasowych dla gospodarki polskiej charakteryzuje zbliżony do innych gospodarek rynkowych układ współzależności.

Zgodnie z trzecią tezą wahania aktywności gospodarczej w Polsce są w stosunkowo dużym stopniu zsynchronizowane z cyklami koniunkturalnymi gospodarek strefy euro. Tym samym, według tej tezy, stopień dopasowania cyklu koniunkturalnego Polski do cykli gospodarek strefy euro pod względem występowania punktów zwrotnych i amplitud można uznać za relatywnie wysoki.

Podsumowując, część empiryczna opracowania wykorzystuje metody ekonometryczne przedstawione w części metodologicznej do przeprowadzenia analizy cyklu koniunkturalnego w Polsce. Wyniki przeprowadzonych na łamach pracy badań w zakresie wahań aktywności gospodarczej w Polsce umożliwiają natomiast weryfikację postawionych tez empirycznych.

Główną motywacją do napisania pracy była chęć przedstawienia możliwości wykorzystania metod spektralnych do analizy wahań aktywności gospodarczej, w szczególności w Polsce, jak również chęć wypełnienia w literaturze polskojęzycznej luki dotyczącej zastosowania metod spektralnych do badania cyklu koniunkturalnego. O wykorzystaniu metod spektralnych do weryfikacji postawionych w opracowaniu tez zdecydowano z uwagi na to, że metody te pozwalają na opis zjawisk cyklicznych, operując w dziedzinie częstotliwości, która stanowi bardzo użyteczną, *de facto* „naturalną”, bazę dla badań wahań cyklicznych, w tym również wahań aktywności gospodarczej. Analiza w dziedzinie częstotliwości umożliwia formalny opis zjawiska cyklu koniunkturalnego zarówno w zakresie amplitudy wahań, jak również czasu trwania cyklu, co jest główną zaletą omawianych metod. Ponadto sformułowanie problemu ekstrakcji wahań cyklicznych obserwowalnych szeregów czasowych w dziedzinie częstotliwości wydaje się być bardzo użytecznym sposobem pomiaru cyklu koniunkturalnego, który jako taki pozostaje kategorią bezpośrednio nieobserwowalną.

Struktura pracy jest następująca. Rozdział 1 przedstawia podstawowe zagadnienia związane ze zjawiskiem cyklu koniunkturalnego oraz badaniami koniunktury gospodarczej. W rozdziale tym przedstawiono definicje cyklu koniunkturalnego (głównie tzw. klasycznych i współczesnych cykli koniunkturalnych), omówiono cechy charakterystyczne i stylizowane fakty wahań aktywności gospodarczej, jak również dokonano krótkiej charakterystyki metod badawczych z zakresu koniunktury gospodarczej.

W rozdziale 2 omówiono teoretyczne aspekty analizy spektralnej. Rozdział ten skupia się przede wszystkim na podstawowych zagadnieniach związanych z analizą stacjonarnych i niestacjonarnych procesów stochastycznych w dziedzinie częstotliwości. Równocześnie w rozdziale tym poświęcono uwagę teoretycznym zagadnieniom związanym z ekstrakcją

składowych cyklicznych niestacjonarnych procesów stochastycznych za pomocą metod filtracji.

Rozdział 3 dotyczy metod estymacji, które mają na celu oszacowanie składowej cyklicznej szeregu czasowego o skończonej próbie obserwacji, jak również metod estymacji, które są wykorzystywane w ramach analizy spektralnej w skończonych próbach obserwacji. W rozdziale tym poświęcono uwagę zarówno metodom filtracji, jak również strukturalnym modelom wektorowej autoregresji oraz modelom nieobserwowalnych komponentów.

W rozdziale 4 przedstawiono analizy empiryczne dotyczące zagadnień związanych z wahaniami aktywności gospodarczej w Polsce w latach 1995–2007. W celu przeprowadzenia tych analiz wykorzystano metody ekonometryczne opisane w rozdziale 3. W rozdziale 4 zaprezentowano również wyniki estymacji komponentów obrazujących wahania aktywności gospodarczej w Polsce, przedstawiono analizę mającą ustalić fakty o zachowaniu się różnych zmiennych ekonomicznych i finansowych w ramach cyklu koniunkturalnego w Polsce oraz zaprezentowano badanie synchronizacji polskiego cyklu z cyklem charakterystycznym dla strefy euro.

W zakończeniu opracowania omówiono jak zostały zweryfikowane postawione tezy oraz podsumowano wyniki przeprowadzonych analiz. Pracę uzupełnia spis literatury oraz aneks zawierający źródła pochodzenia danych wykorzystywanych w obliczeniach przeprowadzanych na potrzeby analiz empirycznych prezentowanych w rozdziale 4. Obliczenia przeprowadzono w środowisku MATLAB, za pomocą autorskich kodów, pakiecie ekonometrycznym EViews, pakiecie ekonometrycznym TSW oraz arkusza kalkulacyjnym MS Excel.

1

Badanie koniunktury gospodarczej

Wprowadzenie

Badania empiryczne cyklu koniunkturalnego, jak również poszukiwania stosownych metod ilościowych służących do analizy wahań aktywności gospodarczej, są istotne we współczesnej makroekonomii. Znajomość aktualnej fazy cyklu koniunkturalnego ma kluczowe znaczenie m.in. dla efektywności prowadzonej polityki gospodarczej. Przykładowo wiedza na temat kształtowania się luki popytowej, która jest zmienną obrazującą wahania aktywności gospodarczej i jej związek z procesami inflacyjnymi stanowi ważny element w procesie decyzyjnym władz monetarnych. Znajomość mechanizmów kształtujących koniunkturę gospodarczą jest również niezbędna przy formułowaniu prognoz makroekonomicznych. W przypadku przedsiębiorstw i gospodarstw domowych znajomość aktualnej kondycji koniunktury także wpływa na trafność podejmowanych decyzji. Oznacza to, że wiedza na temat zjawiska cyklu koniunkturalnego jest istotnym elementem działalności wszystkich podmiotów gospodarczych.

Przedmiotem zainteresowania w tym rozdziale są zagadnienia związane z definicją cyklu koniunkturalnego, jego cechami charakterystycznymi oraz metodami jego badania. Struktura rozdziału jest następująca. W części 1.1. przedstawiono definicję współczesnego cyklu koniunkturalnego. Część 1.2. skupia się na cechach morfologicznych fluktuacji koniunkturalnych. Część 1.3. opisuje stylizowane fakty na temat wahań koniunkturalnych. Z kolei w części 1.4. przedstawiono krótki opis metod badania cykli koniunkturalnych. Rozdział kończy podsumowanie.

1.1. Współczesne i klasyczne cykle koniunkturalne

Cykle koniunkturalne objawiają się tym, że w systemach gospodarczych odnotowuje się w czasie wahania m.in. produktu, zatrudnienia, bezrobocia czy również cen. Należy

podkreślić, że określenie „cykl” może być w tym przypadku mylące, ponieważ wskazuje na regularny przebieg procesu wahań koniunkturalnych wyżej wspomnianych agregatów, podczas gdy w większości przypadków fluktuacje te nie wykazują prostego regularnego lub cyklicznego charakteru (por. Romer (2000), s. 169). Dodatkowo należy zauważyć, że w przypadku tak rozumianych fluktuacji gospodarczych wyróżnia się dwie fazy: wysokiej i niskiej aktywności gospodarczej. Faza wysokiej aktywności gospodarczej jest zazwyczaj określana jako ekspansja (*ang. expansion*), podczas gdy faza niskiej aktywności gospodarczej jest określana jako recesja (*ang. contraction, recession*). W ten sposób w makroekonomii rozumiane są współczesne cykle koniunkturalne. Równocześnie określenie „współczesne cykle koniunkturalne” odnosi się do fluktuacji koniunkturalnych, które są obserwowane w okresie rozpoczynającym się po II wojnie światowej i trwającym do czasów współczesnych. Z kolei pod pojęciem „cykli klasycznych” należy rozumieć wahania aktywności gospodarczej, które występowały w latach poprzedzających II wojnę światową. Rozróżnienie to wynika z różnego rodzaju ilościowych i jakościowych zmian społeczno-gospodarczych, które zaszły w okresie powojennym, przede wszystkim w Stanach Zjednoczonych i Europie Zachodniej. Zmiany te spowodowały, że wahania koniunkturalne okresu przedwojennego różnią się od współczesnych cykli koniunkturalnych pod względem różnych cech morfologicznych, które zostały opisane w części 1.2. Warto zauważyć, że również współczesne cykle koniunkturalne ulegają przekształceniom, co spowodowane jest dynamicznymi zmianami społecznymi i gospodarczymi występującymi w gospodarce światowej (por. Piech i Pangsy-Kania (2003), s. 19). Tym samym można podejrzewać, że szeroko rozumiane procesy globalizacyjne odgrywają ważną rolę w kształtowaniu wahań koniunkturalnych w różnych gospodarkach.

Podstawy do usystematyzowania rozważań nad klasycznymi cyklami gospodarczymi oraz zapoczątkowanie debaty nad charakterystyką powojennych cykli koniunkturalnych zostały zawarte w monografii *Measuring Business Cycles* z 1946 r. autorstwa A. F. Burnsa i W. C. Mitchella. Autorzy ci, analizując dane statystyczne dla gospodarki Stanów Zjednoczonych z okresu poprzedzającego II wojnę światową zaproponowali klasyczną definicję cyklu koniunkturalnego w gospodarce rynkowej, definiując fluktuacje o naturze koniunkturalnej jako wahania występujące w agregatach przedstawiających działalność gospodarczą narodów, organizujących swoją produkcję przeważnie w przedsiębiorstwach. Cykle koniunkturalne zgodnie z tą definicją składają się z okresów ekspansji, występujących w tym samym czasie w wielu działaniach gospodarczych, następujących po nich równie generalnych kryzysach, zastojach a następnie ożywieniach, które łączą się z fazą ekspansji

następnego cyklu. Tym samym w klasycznym cyklu koniunkturalnym wyróżnia się cztery fazy: recesję, depresję, ożywienie i ekspansję. Powszechnie przyjmuje się, że współczesne cykle koniunkturalne charakteryzują się dwiema fazami. Burns i Mitchell (1946) zauważyli, że fluktuacje koniunkturalne nie muszą być ściśle periodyczne. Według ich badań długość cyklu koniunkturalnego może wahać się od ponad roku do około 10-12 lat. Należy podkreślić, że klasyczne cykle koniunkturalne były w zasadzie postrzegane jako wahania periodyczne, jednakże przekonanie o nieregularnym charakterze wahań koniunktury nabrało szczególnie wyraźnego znaczenia w okresie rozpoczynającym się po II wojnie światowej, dając tym samym początek ery współczesnych cykli koniunkturalnych. Zgodnie z chronologią powojennych cykli koniunkturalnych w Stanach Zjednoczonych według National Bureau of Economic Research (NBER) długość cyklu koniunkturalnego gospodarki amerykańskiej wynosi od około 2 do około 10 lat. Zakres ten jest *de facto* traktowany jako stylizowany fakt na temat współczesnych fluktuacji koniunkturalnych w gospodarce rynkowej, podobnie jak stwierdzenie Burnsa i Mitchella, że fluktuacje koniunkturalne są obecne w wielu dziedzinach gospodarczych w tym samym czasie (*ang. comovement*), co również zostało wyraźnie podkreślone przez Lucasa (1977). Definicja cyklu koniunkturalnego wynikająca z podejścia Lucasa (1977) mówi, że wahania koniunkturalne to proces powtarzających się, lecz nieregularnych, oscylacji produktu wokół jego długookresowej ścieżki wzrostu. Zatem cykl koniunkturalny w tym przypadku może zostać zobrazowany jako komponent zmiennej obrazującej kształtowanie się produktu gospodarki w czasie, powstały w wyniku usunięcia komponentu obrazującego ścieżkę wzrostową tego produktu. Oznacza to, że szereg czasowy obrazujący kształtowanie się cyklu koniunkturalnego może zostać uzyskany za pomocą usunięcia z szeregu czasowego realnego produktu krajowego brutto (PKB) składowej obrazującej jego długookresowy trend².

Większość współczesnych badań empirycznych definiuje cykl koniunkturalny zgodnie z podejściem Lucasa (1977), przyjmując dodatkowo, że fluktuacje, które mogą być utożsamiane z cyklem koniunkturalnym trwają od około 1,5–2 do około 8–10 lat (por. Baxter, King (1995) i Christiano, Fitzgerald (1999)). Ponadto przyjmuje się, że wahania koniunkturalne przejawiają się w zmianach różnych zmiennych ekonomicznych, które opisują poziom aktywności gospodarczej. We współczesnych badaniach empirycznych składowa

² Dekompozycja tego typu ma przeważnie charakter addytywny, a szereg czasowy realnego PKB jest zazwyczaj poddawany uprzednio transformacji za pomocą logarytmu naturalnego. Dodatkowo z szeregu czasowego realnego PKB usuwa się uprzednio wahania sezonowe, które z punktu widzenia przebiegu cyklu koniunkturalnego nie są istotne. Ponadto należy zauważyć, że transformacja logarymiczna realnego PKB zapewnia w tym przypadku uzyskanie komponentu cyklicznego, który obrazuje procentowe odchylenia poziomu realnego PKB od korespondującego trendu.

cykliczna realnego PKB lub produkcji przemysłowej jest przeważnie traktowana jako seria referencyjna cyklu koniunkturalnego dla dalszych analiz.

1.2. Cechy morfologiczne cykli koniunkturalnych

Pod pojęciem cech morfologicznych cykli koniunkturalnych należy rozumieć właściwości opisujące fluktuacje gospodarcze. Podstawową cechą morfologiczną, która charakteryzuje całe cykle jak również ich poszczególne fazy jest długość, czyli czas trwania cyklu bądź jego faz. Z pojęciem długości cyklu i jego poszczególnych faz jest związane pojęcie punktu zwrotnego (*ang. turning point*). W nomenklaturze cykli koniunkturalnych punkt zwrotny określa moment, w którym obserwowane jest przejście z jednej fazy cyklu do drugiej (por. Barczyk et al. (2006), s. 139). W przypadku współczesnych cykli koniunkturalnych górny punkt zwrotny (*ang. peak*) określa przejście z fazy wysokiej do fazy niskiej aktywności gospodarczej, podczas gdy dolny punkt zwrotny (*ang. trough*) określa odwrotną zmianę fazy cyklu. Lubiński (2004) wskazuje, że górny punkt zwrotny cyklu koniunkturalnego to maksymalny poziom wskaźnika obrazującego fluktuacje koniunkturalne w danym przedziale czasowym. Analogicznie dolny punkt zwrotny to minimalny poziom miernika aktywności gospodarczej w danym przedziale czasowym. Warto również podkreślić, że składowe cykliczne ekonomicznych szeregów czasowych, które obrazują odchylenia poziomu zmiennej od korespondującego trendu, w górnych punktach zwrotnych przyjmują wartości dodatnie. Z kolei w dolnych punktach zwrotnych tak skonstruowane wskaźniki przyjmują wartości ujemne. Dodatkowo rozróżnia się tzw. jednoimiennie i różnoimiennie punkty zwrotne. Jednoimiennie punkty zwrotne to takie, które określają momenty tej samej co do kierunku zmiany fazy (np. dwa górne lub dwa dolne punkty zwrotne), podczas gdy różnoimiennie punkty zwrotne określają różne co do kierunku zmiany fazy (np. górny i dolny punkt zwrotny). Należy zaznaczyć, że w skład pełnego cyklu wchodzi trzy punkty zwrotne (górny, dolny i górny lub dolny, górny i dolny), podczas gdy faza cyklu składa się z dwóch punktów zwrotnych (górnego i dolnego lub dolnego i górnego). W związku z powyższym długość cyklu jest określona przez odstęp czasu pomiędzy dwoma sąsiadującymi jednoimiennymi punktami zwrotnymi (górnymi lub dolnymi), podczas gdy długość fazy jest wyznaczona przez odstęp czasu pomiędzy dwoma sąsiadującymi różnoimiennymi punktami zwrotnymi (górnym i dolnym w przypadku fazy recesji lub dolnym i górnym w przypadku fazy ekspansji). Warto zauważyć, że w przypadku dwufazowego podziału cyklu

koniunkturalnego, tak jak ma to miejsce w przypadku współczesnych cykli koniunkturalnych, długość cyklu stanowi sumę długości fazy niskiej i wysokiej aktywności gospodarczej.

Kolejną cechą morfologiczną cyklu koniunkturalnego jest amplituda cyklu i jego poszczególnych faz. Pod pojęciem amplitudy danego cyklu należy rozumieć maksymalną co do modułu wartość odchylenia jego punktów zwrotnych od przyjętej linii odniesienia³. Z kolei za amplitudę fazy cyklu koniunkturalnego przyjmuje się najczęściej sumę modułu wartości odchylenia górnego punktu zwrotnego i modułu wartości odchylenia dolnego punktu zwrotnego w danej fazie cyklu. Warto zauważyć, że w badaniach empirycznych, które mają określić amplitudę cyklu koniunkturalnego na podstawie szeregu czasowego obrazującego jego przebieg (np. składowa cykliczna realnego PKB), wykorzystywana jest zazwyczaj miara odchylenia standardowego (por. Kydland i Prescott (1990)).

Wśród cech morfologicznych wyróżnia się również cechę symetryczności bądź asymetryczności cyklu koniunkturalnego. W celu określenia czy cykl koniunkturalny jest symetryczny czy asymetryczny wykorzystuje się relację pomiędzy amplitudą danej fazy i czasem jej trwania (por. Barczyk et al. (2006), s. 142). W przypadku gdy cykl koniunkturalny charakteryzuje się zbliżonymi amplitudami oraz czasami trwania poszczególnych faz, można go uznać za symetryczny. Z kolei w przypadku gdy fazy cyklu pozostają zróżnicowane pod względem amplitud i czasów trwania, cykl charakteryzuje się asymetrią. W szczególności gdy amplitudy faz są takie same a różnica dotyczy jedynie czasów ich trwania, cykl jest określany jako asymetryczny w zakresie czasu trwania faz. W sytuacji odwrotnej, tzn. gdy czasy trwania faz są zbliżone, a zróżnicowanie dotyczy ich amplitud, cykl jest asymetryczny względem amplitud faz (por. Barczyk et al. (2006), s. 143).

Współczesne cykle koniunkturalne różnią się od cykli klasycznych w zakresie cech morfologicznych. W szczególności współczesne cykle koniunkturalne charakteryzują się krótszym czasem trwania oraz mniejszymi amplitudami w porównaniu z cyklami klasycznymi. Ponadto obserwuje się asymetrię współczesnych cykli gospodarczych, co przejawia się w skróceniu czasu trwania fazy niskiej aktywności gospodarczej oraz wydłużeniu czasu trwania fazy wysokiej aktywności gospodarczej.

³ W przypadku składowych cyklicznych szeregów czasowych jest to zazwyczaj linia odpowiadająca zerowej wartości wskaźnika.

1.3. Stylizowane fakty na temat wahań aktywności gospodarczej

Cykle koniunkturalne charakteryzują się pewnymi „typowymi” zdarzeniami występującymi podczas ich przebiegu (por. Lubiński (2004), s. 12). W makroekonomii owe „typowe” zdarzenia występujące w cyklu koniunkturalnym, niezależnie od czasu czy kraju, są określane jako stylizowane fakty na temat wahań aktywności gospodarczej (por. Burda i Wyplosz (2000), s. 433). Bardzo dobrym przykładem badania empirycznego mającego na celu usystematyzowanie wiedzy na temat stylizowanych faktów wahań aktywności gospodarczej jest praca Kydlanda i Prescottta (1990), którzy analizowali zachowanie się najważniejszych agregatów makroekonomicznych Stanów Zjednoczonych w ramach cyklu koniunkturalnego. Poniżej przedstawiono pięć najczęściej spotykanych w literaturze stwierdzeń na temat cech „typowych” dla wahań aktywności gospodarczej.

Pierwszy ze stylizowanych faktów o cyklach koniunkturalnych mówi, że w rozwiniętych gospodarkach obserwuje się nierównomierne, lecz powtarzające się wahania realnych wartości PKB, przy czym przeciętna długość cyklu wynosi 5-8 lat. W badaniach empirycznych przyjmuje się zazwyczaj, że fluktuacje koniunkturalne to wahania o długościach od 1,5–2 do 8–10 lat.

Drugi stylizowany fakt wskazuje na kwestię amplitudy cyklu koniunkturalnego. Mianowicie mówi on o tym, że amplituda wahań realnego PKB mierzona w stosunku do jego trendu jest niska. Zatem oznacza to, że wahania cykliczne realnego PKB wokół długookresowego trendu są niewielkie co do skali.

Trzeci stylizowany fakt odnosi się do kwestii występowania wahań koniunkturalnych w zmianach różnych zmiennych ekonomicznych. W nomenklaturze cykli koniunkturalnych mówi się tym samym o zmiennych procyklicznych, antycyklicznych i acyklicznych. Pod pojęciem procykliczności należy rozumieć występowanie dodatniej korelacji pomiędzy dwoma zmiennymi obrazującymi wahania cykliczne. Analogicznie zmienne wykazujące ujemną korelację są określane mianem antycyklicznych, podczas gdy zmienne nieskorelowane mianem acyklicznych. Obserwacja gospodarek rynkowych wskazuje, że wahania agregatów takich jak popyt konsumpcyjny, popyt inwestycyjny, eksport oraz import są procykliczne względem wahań realnego PKB. Z kolei wahania wydatków rządowych są zazwyczaj acykliczne względem wahań produktu.

Czwarty stylizowany fakt na temat wahań aktywności gospodarczej porusza kwestię tzw. wskaźników wyprzedzających i opóźnionych. Zmienne wyprzedzające to takie, które odnotowują zmianę fazy cyklu wcześniej niż zmienna referencyjna. Analogicznie zmienne

opóźnione to te, których zmiana fazy cyklu następuje później niż w przypadku zmiennej referencyjnej. Tym samym istnieją zmienne, które wyprzedzają realny PKB w cyklu: zapasy, wykorzystanie mocy produkcyjnych, indeksy giełdowe, realna podaż pieniądza. Istnieją zmienne, które opóźniają się w stosunku do realnego PKB w cyklu: stopa inflacji, stopa bezrobocia. Występują również zmienne, które zachowują się zbieżnie w stosunku do realnego PKB pod względem wahań cyklicznych: stopy procentowe, a także wspomniane wcześniej konsumpcja prywatna czy inwestycje.

Piąty stylizowany fakt dotyczący cykli koniunkturalnych odnosi się do relacji pomiędzy amplitudami wahań realnego PKB i jego części składowych. Obserwacja gospodarek rynkowych wskazuje, że wahania popytu inwestycyjnego charakteryzują się znacznie wyższą zmiennością niż wahania cykliczne produktu, podczas gdy wahania cykliczne popytu konsumpcyjnego są mniejsze co do skali niż fluktuacje obserwowane w przypadku realnego PKB. Podobnie do popytu inwestycyjnego skala wahań importu i eksportu jest znacznie większa niż ma to miejsce w przypadku realnego PKB.

1.4. Metody badania koniunktury gospodarczej

Badania mające określić aktualną fazę koniunkturalną, jak również analizy nakierowane na formułujące prognozy przyszłego stanu koniunktury, odgrywają ważną rolę we współczesnej rzeczywistości gospodarczej. Analiza i prognoza koniunktury są dwoma nierozzerwalnie połączonymi etapami prac badawczych nad stanem gospodarki, ponieważ podstawą przewidywania jest ocena przeszłości, a celem badania zaszłości jest z reguły identyfikacja mechanizmów, które determinują przyszły bieg zdarzeń (por. Lubiński (2004), s. 262).

Od czasów publikacji pracy Burnsa i Mitchella (1946) badania nad strukturą cyklu koniunkturalnego stały się jednym z najważniejszych tematów prac naukowych w dziedzinie makroekonomii. W celu osiągnięcia postawionych celów badacze wykorzystywali różnorodne metody ilościowe umożliwiające szczegółową analizę zjawiska wahań aktywności gospodarczej. Przykładowo w pracach Beveridge'a i Nelsona (1981), Nelsona i Plossera (1982) oraz Campbella i Mankiwa (1987) dokonano na podstawie modeli ekonometrycznych klasy ARIMA charakterystyki długookresowego trendu realnego PKB w Stanach Zjednoczonych i jego powiązań z cyklem koniunkturalnym. Zbliżonym podejściem do analizy cyklu zajęli się Harvey (1985), Watson (1986) oraz Clark (1987), którzy opisywali szereg czasowy realnego PKB w Stanach Zjednoczonych za pomocą modeli

nieobserwowalnych komponentów. Blanchard i Quah (1988) dążyli do estymacji składowej cyklicznej realnego PKB w Stanach Zjednoczonych za pomocą strukturalnego modelu wektorowej autoregresji. Baxter i King (1995), Hodrick i Prescott (1997) oraz Christiano i Fitzgerald (1999) badali cykle koniunkturalne w Stanach Zjednoczonych za pomocą filtrów bazujących na metodach analizy spektralnej. Hamilton (1989) i Krolzig (1997) wykorzystywali natomiast przełącznikowe modele Markowa do opisu cyklu koniunkturalnego w Stanach Zjednoczonych i gospodarkach strefy euro. Cykliczny charakter rozwoju gospodarczego w ujęciu teoretycznym rozważali w swoich pracach Kydland i Prescott (1982) oraz Long i Plosser (1983). Na gruncie polskim zagadnienia związane z analizą cyklu koniunkturalnego omawiają w swoich pracach m.in. Piech i Pangsy-Kania (2003), Rekowski (2003), Lubiński (2004), Barczyk et al. (2006), Adamowicz et al. (1998, 2008), Fic (2007), Koško (2008) oraz Skrzypczyński (2006, 2008).

Można zatem wyróżnić wiele metod analizowania i prognozowania koniunktury gospodarczej, a tym samym stworzenie ich kompleksowego opisu jest zadaniem trudnym i czasochłonnym. Niemniej jednak wydaje się, że można wyróżnić dwie główne metody, tzn. podejście polegające na budowie złożonych wskaźników koniunktury (tzw. barometrów koniunktury) oraz podejście polegające na opisie zjawiska cyklu koniunkturalnego za pomocą metod ilościowych. W dalszej części skupiono się na szerszej prezentacji drugiego podejścia.

Z punktu widzenia zjawiska cyklu koniunkturalnego najważniejszymi metodami ilościowymi wydają się być techniki umożliwiające pomiar cyklu koniunkturalnego – który jako taki pozostaje kategorią bezpośrednio nieobserwowalną – na podstawie danych statystycznych. Granger (1966), wykorzystując metody analizy spektralnej, wykazał, że większość zmiennych ekonomicznych traktowanych jako szeregi czasowe poziomów cechuje się tzw. „typowym kształtem spektralnym”, który objawia się m.in. tym, że wahania długookresowe, czyli trendy, odgrywają największą rolę w kształtowaniu ich zmienności. Oznacza to, że interesująca badacza zmienność związana z cyklem koniunkturalnym jest niejako „zatarta” w danych poprzez obecność długookresowego trendu. Naturalnymi są zatem pytania, jak można zdefiniować długookresowy trend oraz w jaki sposób można dokonać jego estymacji na podstawie obserwowalnych zmiennych ekonomicznych. Niewątpliwie pytania te wiążą się bezpośrednio z zagadnieniami identyfikacji czynników wywołujących długookresowy wzrost i oscylacje koniunkturalne. Należy zauważyć, że podsumowanie rozważań na temat teorii cyklu koniunkturalnego, a tym samym rozważań na temat źródeł wywołujących cykle koniunkturalne, jest trudnym zadaniem. Niemniej jednak zasadnicza różnica pomiędzy wymienionymi teoriami sprowadza się do sposobu postrzegania czynnika

wywołującego wahania koniunkturalne, podczas gdy rozprzestrzenianie się pierwotnego impulsu wywołującego owe wahania jest zazwyczaj opisywane w podobny sposób (por. Lubiński (2004), s. 116). Dyskusja na temat przyczyn wahań koniunkturalnych była podejmowana przez wielu autorów reprezentujących różne nurty teorii ekonomii na przestrzeni ostatnich dziesięcioleci. Efektem tej dyskusji jest przyjęcie przez ekonomistów, że cykle koniunkturalne są wywoływane przez różnego rodzaju szoki (zaburzenia, impulsy) stochastyczne. Wyrazem tego przekonania stała się przede wszystkim teoria realnych cykli koniunkturalnych zapoczątkowana przez Kydlanda i Prescottta (1982). Zgodnie z nią zmienność reszty Solowa (por. Solow (1957)), czyli zmiennej obrazującej kształtowanie się szoków technologicznych, powinna być traktowana jako główna przyczyna fluktuacji koniunkturalnych, podczas gdy dodatnie szoki technologiczne zgodnie z teorią wzrostu determinują długookresową ścieżkę wzrostu gospodarki. Początki postrzegania przyczyn fluktuacji cyklicznych przez pryzmat szoków stochastycznych sięgają dużo wcześniej niż praca Kydlanda i Prescottta. Prekursorami byli tu niewątpliwie Yule (1921), a następnie Słucki (1937), który wykazał, że seria nieskorelowanych szoków stochastycznych po odpowiednim zsumowaniu może dać zmienną charakteryzującą się wahaniami cyklicznymi. Oznacza to, że wywołanie wahań cyklicznych wymaga dwóch elementów: szoków oraz mechanizmu zamieniającego te szoki na fluktuacje, a więc tzw. mechanizmu propagacji szoków. Postrzeganie zjawiska cykli koniunkturalnych przez pryzmat zaburzeń losowych i ich wpływu na fluktuacje zmiennych ekonomicznych stanowi „typowy” element współczesnych metod ekonometrycznych modelowania procesów gospodarczych.

W przypadku pomiaru cyklu koniunkturalnego na podstawie empirycznych szeregów czasowych wymagane jest przyjęcie stosownej separacji pomiędzy ścieżką wzrostu i komponentem obrazującym cykl koniunkturalny. Wynika to bezpośrednio z niestacjonarności większości zmiennych ekonomicznych wynikającej z obecności długookresowych trendów, z reguły o naturze stochastycznej, a nie deterministycznej, co sprawia, że estymacja długookresowej tendencji rozwojowej staje się bardziej skomplikowana. Nelson i Plosser (1982), bazując na danych statystycznych dla Stanów Zjednoczonych, wykazali, że nie występują podstawy do odrzucenia hipotezy mówiącej o tym, że kształtowanie się realnego PKB powinno być traktowane jako proces błędzenia losowego z dryfem (*ang. random walk with drift*). Tym samym dowiedziono, że w związku z możliwością obecności pierwiastka jednostkowego (czynnika trwałego) w danych ekonomicznych, a w konsekwencji tzw. trendu stochastycznego, który sam podlega wahanom w czasie, odróżnienie fluktuacji cyklicznych o charakterze koniunkturalnym od wahań samego trendu może być dużym problemem. Brak

możliwości odrzucenia hipotezy o przyrosto-stacjonarności zmiennych ekonomicznych, takich jak realny PKB, przyczynił się do poszukiwania metod umożliwiających dokonywanie stosownych dekompozycji zmiennych ekonomicznych na składowe o charakterze trwałym i przejściowym. Przykładem może być praca Blancharda i Quaha (1988), która była przełomem w dziedzinie identyfikacji szoków popytowych i podażowych poprzez uwzględnienie przy identyfikacji postaci strukturalnej modelu ekonometrycznego klasy wektorowej autoregresji restrykcji długookresowych. Zgodnie ze schematem identyfikacji Blancharda i Quaha w długim okresie poziom produktu jest kształtowany wyłącznie przez szoki podażowe wywierające trwały wpływ na gospodarkę (czynniki trwałe), natomiast fluktuacje produktu wokół ścieżki długookresowej powodowanej przez szoki podażowe są determinowane przez szoki popytowe (czynniki przejściowe). Mamy tu zatem do czynienia z nieco odmiennym traktowaniem fluktuacji produktu o charakterze koniunkturalnym, co podkreślają *de facto* sami autorzy, zwracając uwagę na to, że szoki podażowe mogą również wywoływać wahania koniunkturalne produktu. Metoda Blancharda-Quaha jest niewątpliwie jednym ze sposobów modelowania luki popytowej, która może stanowić komponent obrazujący kształtowanie się wahań koniunkturalnych produktu.

Współczesne metody analizy szeregów czasowych oferują stosowne algorytmy umożliwiające ekstrakcję z danych ekonomicznych trendów o charakterze stochastycznym, jak również innych komponentów, takich jak składowe cykliczne, których charakterystyka stochastyczna jest określona poprzez reprezentację w dziedzinie częstotliwości. W szczególności analiza w dziedzinie częstotliwości (analiza spektralna) stanowi narzędzie ekonometryczne umożliwiające badanie struktury cyklicznej danych będących przedmiotem analizy. Różnorodne metody spektralne umożliwiają dokonywanie stosownych dekompozycji zmiennych ekonomicznych na komponenty obrazujące ich zachowanie w danym horyzoncie czasu, pozwalając również na analizę kształtowania się cyklu koniunkturalnego w danej gospodarce. Najczęściej wykorzystywanymi narzędziami ekonometrycznymi w tym zakresie są filtry mające określoną charakterystykę częstotliwościową, ale również modele nieobserwowalnych komponentów. Podobnie dzięki wykorzystaniu metod spektralnych możliwe jest analizowanie cech charakterystycznych cyklu koniunkturalnego. Doskonałym przykładem i wzorcem wykorzystania metod spektralnych do analizy wahań aktywności gospodarczej jest tematyka podejmowana w monografii Sargenta (1987). Wcześniej przytoczone prace Baxter i Kinga (1995) oraz Christiano i Fitzgeralda (1999) są natomiast najlepszymi przykładami wykorzystania metody filtra typu pasmowo-przepustowego (*ang.*

band-pass filter), opartego na analizie spektralnej, do celów estymacji składowych cyklicznych, które mogą być utożsamiane z wahaniami o charakterze koniunkturalnym.

Przytoczone metody ekonometryczne bazują na koncepcji cyklu koniunkturalnego rozumianego jako wahania poziomu agregatu makroekonomicznego wokół korespondującego długookresowego trendu. Warto zauważyć, że w literaturze przedmiotu można także odnaleźć koncepcje bazujące na tzw. cyklu wzrostu, który jest utożsamiany z wahaniami cyklicznymi obserwowanymi na podstawie dynamiki danego agregatu makroekonomicznego (w tym celu wykorzystywana jest dynamika w ujęciu stopy wzrostu rok do roku bądź kwartał do kwartału). Przykładami współczesnych metod ekonometrycznych, które pozwalają na modelowanie wahań cyklicznych właśnie na podstawie stopy wzrostu są tzw. autoregresyjne przełącznikowe modele Markowa – MS-AR, jak również ich wielorównaniowe odmiany – MS-VAR (por. Hamilton (1989) i Krolzig (1997)). Modele te są wykorzystywane do wykrywania punktów zwrotnych cyklu koniunkturalnego i umożliwiają oszacowanie prawdopodobieństwa znalezienia się w określonym stanie, odpowiadającym wyróżnionej fazie cyklu koniunkturalnego.

Należy również podkreślić, że alternatywnymi wobec metod spektralnych narzędziami analizy szeregów czasowych są metody bazujące na analizie falkowej (*ang. wavelet analysis*). Metody te umożliwiają jednoczesne przedstawienie czasowych oraz częstościowych własności danych ekonomicznych (por. Schleicher (2002)). Metody analizy falkowej pozwalają również na dokonywanie ekstrakcji składowych szeregu czasowego, w tym składowych, które mogą być utożsamiane z wahaniami koniunkturalnymi (por. Yogo (2008)). Na gruncie literatury polskojęzycznej tematykę związaną z analizą falkową podejmuje Bruzda (2003, 2009).

Ostatecznie należy podkreślić, że bez względu na wykorzystywaną metodę pomiaru cyklu koniunkturalnego badacz musi liczyć się z tym, że uzyskany przez niego w danym momencie komponent wahań cyklicznych będzie najprawdopodobniej podlegał rewizjom wraz z rozszerzaniem próby obserwacji o nowe dane. Z jednej strony wynika to z ciągłych uaktualnień, jakim podlegają dane statystyczne, z drugiej natomiast z tego, że stosowane metody ekonometryczne wprowadzają również rewizje estymatorów wraz z napływem nowych informacji do próby. Tym samym estymacja cyklu koniunkturalnego na podstawie konkretnego zestawu danych, dostępnych w danym momencie (*ang. real-time data*), stanowi warunkowy względem próby obraz wahań cyklicznych. Co więcej, nie istnieją sposoby, które pozwalałyby całkowicie zniwelować efekt rewizji estymatora składowej cyklicznej, jak również estymatorów innych komponentów danego szeregu czasowego. Warto przytoczyć w

1

tym miejscu wyniki badania Orphanidesa i van Nordena (2002), którzy wykorzystując różne metody ekstrakcji składowych cyklicznych realnego PKB w Stanach Zjednoczonych, bazując na danych typu *real-time*, wykazali, że niezależnie od stosowanej metody estymacji rewizje uzyskanej składowej cyklicznej mogą być bardzo wysokie. W skrajnych przypadkach skala rewizji może być porównywalna ze zmiennością oszacowanej składowej cyklicznej. Należy mieć zatem świadomość, że wyciąganie wniosków na podstawie oszacowanych komponentów cyklicznych powinno być ostrożne, w szczególności w przypadku wspomagania procesu decyzyjnego polityki gospodarczej. Zatem wyjątkowo istotnym kierunkiem badań wydaje się poszukiwanie metod ekonometrycznych, które zapewniłyby uzyskiwanie składowych cyklicznych szeregów czasowych niepodlegających znacznym rewizjom w czasie.

Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono zagadnienia związane z charakterystyką zjawiska cyklu koniunkturalnego. W szczególności przedstawiono definicję wahań aktywności gospodarczej, która jest powszechnie wykorzystywana we współczesnej makroekonomii. Opisano cechy morfologiczne tak rozumianych cykli koniunkturalnych, zobrazowano tzw. stylizowane fakty na ich temat oraz przedstawiono zarys współczesnych koncepcji metodologicznych, które umożliwiają badanie zjawiska cyklu koniunkturalnego. Przede wszystkim zwrócono uwagę na kwestię obecności trendów stochastycznych w ekonomicznych szeregach czasowych i związaną z tym konieczność właściwej identyfikacji wahań o charakterze koniunkturalnym. Metody analizy szeregów czasowych, a zwłaszcza metody bazujące na analizie spektralnej dają tę możliwość. Dodatkowo wskazano na potencjalne problemy związane z pomiarem fluktuacji koniunkturalnych, sugerując tym samym zachowanie ostrożności przy formułowaniu na podstawie badań empirycznych wniosków na temat zjawiska cyklu koniunkturalnego.

2

Metody spektralne w analizie szeregów czasowych – zarys teoretyczny

Wprowadzenie

Szereg czasowy to zbiór uporządkowanych chronologicznie obserwacji ukazujących kształtowanie się badanego zjawiska w kolejnych, zazwyczaj równoodległych, okresach, np. dniach, miesiącach, kwartałach czy też latach. Celem analizy szeregów czasowych, będącej działem statystyki i ekonometrii, jest badanie natury oraz prognozowanie szeregów czasowych. Analiza spektralna (*ang. spectral analysis*) umożliwia badanie własności szeregu czasowego poprzez analizę jego charakterystyki stochastycznej w dziedzinie częstotliwości. Dzięki metodom analizy spektralnej badacz jest w stanie odpowiedzieć na pytanie, w jakim stopniu wpływ na obserwowany przebieg szeregu czasowego wywierają jego poszczególne składowe, takie jak trend, wahania cykliczne, sezonowe czy też nieregularne. Ponadto metody spektralne umożliwiają przeprowadzanie analiz współzależności pomiędzy dwoma szeregami czasowymi pod kątem dopasowania ich zmienności w z góry zadany przedział wahań cyklicznych.

Struktura rozdziału jest następująca. W części 2.1. zostały scharakteryzowane słabo stacjonarne procesy stochastyczne z czasem dyskretnym i ich analiza spektralna. Część 2.2. skupia się na problemie niestacjonarności procesów stochastycznych i jego znaczeniu dla analizy spektralnej. W części 2.3. omówiono zagadnienia związane z analizą cross-spektralną słabo stacjonarnych procesów stochastycznych. W części 2.4. przedstawiono składowe szeregu czasowego i opisano ich reprezentację w dziedzinie czasu i częstotliwości. Część 2.5. skupia się natomiast na filtrach typu Wienera-Kołmogorowa oraz tzw. „idealnych” filtrach częstotliwościowych. W części tej omówiono rolę tych metod w dekompozycji szeregów czasowych. Rozdział kończy podsumowanie.

2.1. Słabo stacjonarne procesy stochastyczne z czasem dyskretnym i analiza spektralna

Procesy stochastyczne są formalnym narzędziem opisu zjawisk związanych z szeregami czasowymi (por. Syczewska (2002), s. 15) i znajdują coraz szersze zastosowanie w modelowaniu m.in. zjawisk ekonomicznych (por. Dędys, Dorosiewicz (2005), s. 7). W ogólności pod pojęciem procesu stochastycznego należy rozumieć zbiór zmiennych losowych $\{y(t), t \in Z\}$, uporządkowanych zgodnie z indeksami należącymi do pewnego zbioru indeksów Z , który może być skończony lub nieskończony (por. Welfe (2003), s. 343). Zbiór indeksów Z może być zbiorem lub podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, wtedy proces stochastyczny jest procesem z czasem ciągłym i oznaczany jest jako $\{y(t)\}$. Jeżeli zbiór indeksów Z stanowi podzbiór zbioru liczb całkowitych, proces stochastyczny jest z czasem dyskretnym i oznaczany jest jako $\{y_t\}$, a szereg czasowy y_t dla każdego $t \in Z$, czyli na przykład szereg czasowy $\{y_t\}_{t=1}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$, jest pojedynczą realizacją tego procesu. Również szereg czasowy y_t dla każdego $t \in Z$, gdzie Z jest zbiorem liczb całkowitych (zbiór nieskończony), stanowi pojedynczą realizację procesu stochastycznego z czasem dyskretnym, czyli procesu $\{y_t\}$, który może być oznaczany równoważnie jako $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$. Tym samym szereg czasowy y_t o nieskończonej długości, dany jako $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty} = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots, y_T, y_{T+1}, \dots\}$, jest również traktowany jako pojedyncza realizacja pewnego procesu stochastycznego z czasem dyskretnym (por. Hamilton (1994), s. 43). O procesie stochastycznym, którego dystrybuanty są niezmiennicze względem przesunięć w czasie mówimy, że ma własność ścisłej stacjonarności (*ang. strict stationarity*) lub inaczej, że jest procesem stacjonarnym w węższym sensie (por. Dędys, Dorosiewicz (2005), s. 219). Oznacza to, że dla dowolnych dopuszczalnych wartości $t_1, t_2, \dots, t_n$ oraz k łączny rozkład $\{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)\}$ jest taki sam jak łączny rozkład $\{y(t_1 + k), y(t_2 + k), \dots, y(t_n + k)\}$. Z kolei w przypadku procesu stochastycznego, którego średnia i wariancja nie ulegają zmianom w czasie, a autokowariancje są zależne jedynie od przesunięcia pomiędzy obserwacjami procesu, mówimy o własności tzw. słabej stacjonarności (*ang. weak stationarity*) lub stacjonarności drugiego rzędu (*ang. second order stationarity*), czy jeszcze inaczej, stacjonarności kowariancyjnej (*ang. covariance stationarity*) lub stacjonarności w szerszym sensie. Przedmiotem zainteresowania w tej części są słabo stacjonarne procesy stochastyczne z czasem dyskretnym.

Niech proces stochastyczny o wartościach rzeczywistych z czasem dyskretnym $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ będzie słabo stacjonarny. Wówczas średnia, wariancja i autokowariancje tego procesu dla każdego ustalonego $t, k \in \mathbb{Z}$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, są odpowiednio równe (por. Hamilton (1994), s. 45):

$$E(y_t) = \mu < +\infty, \quad (2.1a)$$

$$E(y_t - \mu)^2 = \text{var}(y_t) = \gamma_0 < +\infty, \quad (2.1b)$$

$$E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu) = \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k < +\infty \text{ dla } k \neq 0, \quad (2.1c)$$

gdzie E oznacza operator wartości oczekiwanej. Zarówno średnia, wariancja i autokowariancje procesu słabo stacjonarnego są skończone i nie zależą od indeksu czasu t , jedynie autokowariancje zależą od przesunięcia k pomiędzy obserwacjami procesu $\{y_t\}$. Tym samym średnia, wariancja i autokowariancje są stałe w czasie. Ponadto autokowariancje są symetryczne, tzn. $\gamma_{-k} = \gamma_k$. Autokorelacje procesu słabo stacjonarnego są również stałe w czasie, zależne jedynie od przesunięcia w czasie k i symetryczne. Definicja współczynnika autokorelacji procesu słabo stacjonarnego jest następująca (por. Hamilton (1994), s. 49):

$$\rho_k \equiv \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \text{ dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2)$$

Naturalnie, skoro ρ_k jest współczynnikiem korelacji, zgodnie z nierównością Cauchy'ego-Schwarza, dla każdego k spełniona jest nierówność $|\rho_k| \leq 1$. Ponadto zgodnie z definicją (2.2) dla $k = 0$ współczynnik autokorelacji jest równy jedności (por. Hamilton (1994), s. 49). Ciąg współczynników autokorelacji $\{\rho_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ nosi nazwę funkcji autokorelacji – ACF (*ang. autocorrelation function*). Funkcja autokorelacji charakteryzuje ogólną zależność wartości zmiennej w pewnej określonej chwili t od wartości tej zmiennej w innej chwili $t - k$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Istnieje również tzw. funkcja autokorelacji cząstkowej – PACF (*ang. partial autocorrelation function*), która stanowi ciąg współczynników autokorelacji cząstkowej $\{r_{kk}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ procesu $\{y_t\}$, gdzie współczynnik autokorelacji cząstkowej r_{kk} , przyjmujący wartości z przedziału $[-1, 1]$, dla $k = 1, 2, \dots$, jest dany poprzez zapis macierzowy postaci:

$$\begin{bmatrix} r_{k1} \\ r_{k2} \\ \vdots \\ r_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Ponadto współczynniki autokorelacji cząstkowej spełniają warunki $r_{00} = \rho_0 = 1$, $r_{11} = \rho_1$ oraz $r_{-kk} = r_{kk}$. Funkcja autokorelacji cząstkowej określa zależność wartości zmiennej w pewnej określonej chwili t od wartości tej zmiennej w innej chwili $t-k$, gdzie $k=2,3,\dots$, po wyeliminowaniu efektu korelacji spowodowanego opóźnieniami od 1 do $k-1$. Funkcje ACF i PACF opisują własności stochastyczne procesu w dziedzinie czasu. Funkcja ACF, a dokładniej ciąg autokowariancji $\{\gamma_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, jest również podstawą do analizy tychże własności w dziedzinie częstotliwości. Pod pojęciem częstotliwości należy rozumieć wielkość $\omega = 2\pi/\tau$ przyjmującą wartości z przedziału $[0, \pi]$, gdzie $\tau \in [2, +\infty)$ oznacza długość fali lub inaczej długość (okres) cyklu. Pod pojęciem dziedziny częstotliwości należy natomiast rozumieć przedział $[-\pi, \pi]$, który dla celów analitycznych – jak pokazano w dalszej części – sprowadza się do przedziału $[0, \pi]$ (por. s. 27). Analiza częstotliwościowa (spektralna) umożliwia badanie wpływu oscylacji o określonych długościach cyklu na zmienność procesu $\{y_t\}$. Tym samym dzięki analizie spektralnej można określić długości cykli mających dominujący w sensie amplitudy wpływ na zmienność procesu $\{y_t\}$, co odbywa się na podstawie rozkładu częstotliwościowego wariancji tego procesu. Funkcję opisującą rozkład wariancji procesu $\{y_t\}$ w dziedzinie częstotliwości określa się mianem spektrum mocy (*ang. power spectrum*) i jest ona zdefiniowana jako transformata Fouriera tzw. funkcji generującej autokowariancję (*ang. autocovariance generating function*). Ciąg autokowariancji procesu słabo stacjonarnego $\{\gamma_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ spełnia tzw. warunek zbieżności bezwzględnej, tzn. $\sum_{k=0}^{+\infty} |\gamma_k| < +\infty$, w związku z czym funkcja generująca autokowariancję tego procesu istnieje i jest zdefiniowana⁴ jako (por. Hamilton (1994), s. 61):

$$g_y(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k z^k, \quad (2.4)$$

⁴ Analogicznie do funkcji generującej autokowariancję jest zdefiniowana funkcja generująca autokorelację.

gdzie z oznacza pewną liczbę, która w przypadku kalkulacji spektrum mocy przyjmuje postać zespoloną $z = e^{-i\omega}$, gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną. Tym samym spektrum mocy procesu $\{y_t\}$ jest zdefiniowane jako (por. Hamilton (1994), s. 61):

$$S_y(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} g_y(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e^{-i\omega k} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.5)$$

Zgodnie ze wzorem Eulera oraz wzorem de Moivre'a można zapisać, że $e^{\pm i\omega k} = \cos(\omega k) \pm i \sin(\omega k)$. Ponadto dzięki temu, że autokowariancje są symetryczne, jak również temu, że $\cos(-\omega) = \cos(\omega)$, $\sin(-\omega) = -\sin(\omega)$, $\cos(0) = 1$ i $\sin(0) = 0$, spektrum mocy może być zapisane jako:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right] \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.6)$$

Ze wzoru (2.6) wynika, że spektrum mocy jest funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych i symetryczną względem zerowej częstotliwości, czyli parzystą, tzn. $S_y(-\omega) = S_y(\omega)$, a ponadto, że jest funkcją okresową ω , tzn. $S_y(\omega + 2\pi k) = S_y(\omega)$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą⁵. W związku z powyższym dla celów analizy można ograniczyć dziedzinę częstotliwości do przedziału $[0, \pi]$. Zależność między wariancją procesu $\{y_t\}$ i jego spektrum mocy jest dana poprzez odwrotną transformatę Fouriera:

$$\gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\pi} S_y(\omega) d\omega. \quad (2.7)$$

Zależność ta może być uogólniona dla wszystkich autokowariancji procesu $\{y_t\}$:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) e^{i\omega k} d\omega \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (2.8)$$

Dla dowolnej częstotliwości $\hat{\omega} \in (0, \pi)$ całka $\int_{-\hat{\omega}}^{\hat{\omega}} S_y(\omega) d\omega$ jest równa tej części wariancji procesu $\{y_t\}$, która odpowiada losowym składowym okresowym o częstotliwościach

⁵ Należy również podkreślić, że spektrum mocy dane definicją (2.5) przyjmuje zawsze wartości nieujemne.

$\omega \in [-\hat{\omega}, \hat{\omega}]$ (por. Syczewska (2002), s. 17). Analogicznie do spektrum mocy jest zdefiniowana funkcja gęstości spektralnej (*ang. spectral density function*), będąca transformatą Fouriera funkcji generującej autokorelację procesu $\{y_t\}$. Równoważnie, jeżeli znormalizujemy spektrum mocy, dzieląc je przez wariancję procesu, otrzymamy funkcję gęstości spektralnej, która przyjmuje postać (por. Box i Jenkins (1983), s. 49):

$$f_y(\omega) \equiv \frac{S_y(\omega)}{\gamma_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_k e^{-i\omega k} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k \cos(\omega k) \right] \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.9)$$

Naturalnie, odwrotna transformata Fouriera funkcji gęstości spektralnej jest równa jedności, tzn. $\int_{-\pi}^{\pi} f_y(\omega) d\omega = \rho_0 = 1$. Analogicznie do przypadku spektrum mocy, całka po funkcji gęstości spektralnej w granicach całkowania od $-\hat{\omega}$ do $\hat{\omega}$ określa procentowy wkład losowych składowych okresowych o częstotliwościach $\omega \in [-\hat{\omega}, \hat{\omega}]$ w wariancję procesu $\{y_t\}$.

Podstawowym procesem słabo stacjonarnym jest proces białego szumu (*ang. white noise, WN*), który jest oznaczany jako $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Średnia procesu $\{\varepsilon_t\}$ wynosi $\mu = 0$, wariancja $\gamma_0 = \sigma^2$, natomiast autokowariancje $\gamma_k = 0$ dla każdego $k \neq 0$. Ponadto, jeżeli proces $\{\varepsilon_t\}$ spełnia warunek, że dla $t \neq s$: ε_t jest niezależne od ε_s , wówczas nazywany jest niezależnym procesem białego szumu (*ang. independent white noise*) i jest wtedy zmienną typu i.i.d. (*ang. independent and identically distributed*), którą oznacza się jako $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$. Z kolei niezależny proces białego szumu $\{\varepsilon_t\}$ spełniający dodatkowo warunek $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ jest nazywany Gaussowskim procesem białego szumu (*ang. Gaussian white noise*) i jest oznaczany jako $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$. Podstawową własnością procesu białego szumu jest brak korelacji pomiędzy obserwacjami dowolnie oddalonymi od siebie, tzn. $\rho_k = 0$ dla $k \neq 0$. Tym samym zgodnie ze wzorem (2.5) lub (2.6) oraz (2.9) spektrum mocy i funkcja gęstości spektralnej procesu białego szumu przyjmują odpowiednio postać:

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.10)$$

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.11)$$

W związku z tym proces białego szumu ma jednostajny rozkład mocy spektralnej dla wszystkich częstotliwości $\omega \in [-\pi, \pi]$ ⁶.

Proces białego szumu stanowi podstawę konstrukcji bardziej złożonych słabo stacjonarnych procesów stochastycznych, których uogólnieniem jest proces typu autoregresyjnej średniej ruchomej – ARMA (*ang. autoregressive moving average*). Proces $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ będący słabo stacjonarnym procesem ARMA przyjmuje ogólną postać:

$$\phi(L)y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t, \text{ gdzie } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2). \quad (2.12)$$

Parametr c w równaniu (2.12) jest stałą rzeczywistą, natomiast wielomiany względem operatora opóźnień L (*ang. lag operator*)⁷, tzn. $\phi(L)$ i $\theta(L)$ noszą odpowiednio nazwę wielomianu autoregresyjnego i wielomianu średniej ruchomej. Wielomiany te przyjmują odpowiednio postać:

$$\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j L^j, \quad (2.13)$$

$$\theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j, \quad (2.14)$$

gdzie p oznacza rząd autoregresyjny procesu $\{y_t\}$, q jest rzędem średniej ruchomej, natomiast współczynniki ϕ_j dla $j = 1, 2, \dots, p$ i θ_j dla $j = 1, 2, \dots, q$ są odpowiednio stałymi w czasie, rzeczywistymi parametrami autoregresyjnymi i średniej ruchomej. Tym samym proces dany równaniem (2.12), gdzie wielomiany względem operatora opóźnień są postaci (2.13) i (2.14), nosi nazwę procesu ARMA(p, q). Naturalnie w przypadku gdy $p = q = 0$ oraz $c = 0$ proces $\{y_t\}$ sprowadza się do procesu białego szumu $\{\varepsilon_t\}$, ponieważ wówczas $\phi(L) = \theta(L) = 1$ i tym samym $y_t = \varepsilon_t$. Stacjonarność procesu ARMA(p, q) wystąpi, jeśli wszystkie miejsca zerowe (pierwiastki) wielomianu $\phi(z)$, tzn. pierwiastki równania $1 - \sum_{j=1}^p \phi_j z^j = 0$, będą znajdowały się poza kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej

⁶ Proces białego szumu zawdzięcza swoją nazwę właśnie tej własności, ponieważ jego spektrum mocy jest takie samo jak w przypadku światła białego. Oscylacje o wszystkich możliwych częstotliwościach wnoszą jednakowy wkład w zmienność procesu białego szumu.

⁷ Operator opóźnień jest zdefiniowany jako $L^k y_t \equiv y_{t-k}$ dla każdego k należącego do zbioru liczb całkowitych. Z kolei w przypadku działania operatora opóźnień na wartości stałej w czasie zachodzi zależność $L^k c = c$ dla każdego k należącego do zbioru liczb całkowitych.

(por. Syczewska (2002), s. 28), co jest równoważne z tym, że wszystkie pierwiastki są co do modułu większe od jedności. Tym samym stacjonarność procesu ARMA zależy w pełni od parametrów autoregresyjnych i nie jest zależna od parametrów średniej ruchomej. Ponadto, jeżeli pierwiastki wielomianu autoregresyjnego leżą poza kołem jednostkowym, proces typu ARMA może zostać sprowadzony do postaci tzw. filtra liniowego (*ang. linear filter*) lub inaczej procesu $MA(+\infty)$, ponieważ wielomian (2.13) jest wówczas odwracalny⁸ i proces (2.12) może być zapisany jako⁹ (por. Hamilton (1994), s. 60):

$$y_t = \mu + \psi(L)\varepsilon_t, \text{ gdzie } \mu = \frac{c}{\phi(1)}, \psi(L) = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j L^j, \psi_0 = 1 \text{ oraz } \sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j| < +\infty. \quad (2.15)$$

Parametr ψ_j dla $j = 0, 1, \dots$ jest interpretowany jako odpowiedź procesu $\{y_t\}$ w momencie t na jednostkowe zaburzenie z okresu $t - j$. Parametry ψ_j dla procesu (2.15) można uzyskać przy wykorzystaniu reprezentacji stacjonarnego procesu $ARMA(p, 0)$, czyli $AR(p)$, w przestrzeni stanów (*ang. state space*) i wielomianu $\phi(L)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^* L^j$, gdzie $\psi_0^* = 1$ oraz $\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j^*| < +\infty$, odpowiadającego procesowi $AR(p)$ w zapisie filtra liniowego. Reprezentacja procesu $AR(p)$ w przestrzeni stanów jest następująca:

$$\xi_t = \delta + F\xi_{t-1} + v_t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_p \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ y_{t-3} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

⁸ Odwracalność wielomianu autoregresyjnego oznacza, że istnieje wielomian $\phi(L)^{-1}$.

⁹ Podobnie, jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu $\theta(z)$, tzn. pierwiastki równania $1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j = 0$, leżą poza kołem jednostkowym, wówczas wielomian średniej ruchomej $\theta(L)$ jest odwracalny (tzn. istnieje wielomian $\theta(L)^{-1}$) i proces ARMA może zostać zapisany w postaci procesu autoregresji o nieskończonym rzędzie opóźnień, czyli $AR(+\infty)$. Spełnienie tej własności nie jest wymagane, aby zapewnić stacjonarność procesu ARMA, która jest związana tylko z pierwiastkami wielomianu autoregresyjnego.

gdzie ξ_t , ξ_{t-1} , $\mathbf{v}_t$ i δ są wektorami wymiaru $p \times 1$, a $\mathbf{F}$ jest macierzą wymiaru $p \times p$ ¹⁰. Wówczas parametr ψ_j^* dla $j=1,2,\dots$ stanowi element (1,1) macierzy $\mathbf{F}^j$, natomiast w przypadku procesu (2.15) parametry ψ_j wyznacza się z iloczynu wielomianów $\theta(L)$ i $\phi(L)^{-1}$. Ponieważ autokowariancje procesu białego szumu dla każdego $k \neq 0$ są zerowe, wariancja i autokowariancje procesu (2.15) mogą zostać zapisane w postaci:

$$\gamma_k = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu) = E\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}\right) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \psi_{j+k} \quad \text{dla } k=0,1,2,\dots, \quad (2.17)$$

gdzie σ^2 odpowiada wariancji procesu białego szumu oraz zachodzi $\gamma_{-k} = \gamma_k$. Stacjonarność procesu $\{y_t\}$ oznacza, że parametry ψ_j są zbieżne do zera wraz ze wzrostem j , podobnie jak autokowariancje i autokorelacje wraz ze wzrostem k (por. Hamilton (1994), s. 111). Wykorzystując parametry ψ_j można również zapisać h -okresową prognozę o minimalnym błędzie średniokwadratowym (*ang. minimum mean squared error*, MMSE) dla procesu (2.15), tj. $y_{t+h|t} = \mu + \psi_h \varepsilon_t + \psi_{h+1} \varepsilon_{t-1} + \dots$, gdzie $h=1,2,\dots$, która wraz ze wzrostem horyzontu prognozy h jest zbieżna do średniej procesu $\{y_t\}$, tzn. $\lim_{h \rightarrow +\infty} y_{t+h|t} = \mu$. Błąd średniokwadratowy dla h -okresowej prognozy procesu $\{y_t\}$ przyjmuje natomiast postać $MSE(y_{t+h|t}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 = \sigma^2 (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{h-1}^2)$ i jest zbieżny wraz ze wzrostem h do wariancji procesu $\{y_t\}$, tzn. $\lim_{h \rightarrow +\infty} MSE(y_{t+h|t}) = \gamma_0$ ¹¹. Spełnienie warunku bezwzględnej zbieżności ciągu parametrów $\{\psi_j\}_{j=0}^{+\infty}$, tzn. $\sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j| < +\infty$, implikuje spełnienie warunku bezwzględnej zbieżności ciągu autokowariancji $\{\gamma_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, czyli $\sum_{k=0}^{+\infty} |\gamma_k| < +\infty$. Wówczas funkcja generująca autokowariancje procesu $\{y_t\}$ może być zapisana równoważnie do (2.4) jako (por. Hamilton (1994), s. 62):

$$g_y(z) = \sigma^2 \psi(z) \psi(z^{-1}). \quad (2.18)$$

¹⁰ Warunkiem stacjonarności procesu ARMA(p,q) jest to, aby wszystkie pierwiastki wielomianu $\phi(z)$ znajdowały się na zewnątrz koła jednostkowego. Warunek ten jest równoważny z tym, aby wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{F}$ leżały wewnątrz koła jednostkowego (były co do modułu mniejsze od jedności).

¹¹ Przy założeniu $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, 95% przedział ufności dla h -okresowej prognozy procesu $\{y_t\}$ może zostać zapisany jako $y_{t+h|t} \pm 1,96 \sqrt{\sigma^2 (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{h-1}^2)}$.

Tym samym spektrum mocy procesu $\{y_t\}$ może być zapisane równoważnie do (2.5) dla $z = e^{-i\omega}$ jako:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \psi(e^{-i\omega}) \bar{\psi}(e^{i\omega}) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.19)$$

Równanie (2.19) może zostać równoważnie zapisane w postaci:

$$S_y(\omega) = |\psi(e^{-i\omega})|^2 S_\varepsilon(\omega) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.20)$$

gdzie $|\psi(e^{-i\omega})|^2 = \psi(e^{-i\omega}) \bar{\psi}(e^{i\omega})$ nosi nazwę tzw. funkcji przenoszenia mocy (*ang. power transfer function*), natomiast $S_\varepsilon(\omega)$ stanowi spektrum mocy procesu białego szumu. W związku z powyższym spektrum mocy dla procesu $\{y_t\}$ typu ARMA(p, q) przyjmuje ogólną postać:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j e^{-i\omega j}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^q \bar{\theta}_j e^{i\omega j}\right)}{\left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\omega j}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^p \bar{\phi}_j e^{i\omega j}\right)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.21)$$

Przykładowo dla procesu ARMA(1,0), czyli procesu autoregresji pierwszego rzędu – AR(1), który przyjmuje w dziedzinie czasu postać $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, gdzie $|\phi_1| < 1$ i $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, spektrum mocy zgodnie z (2.21) jest dane jako¹²:

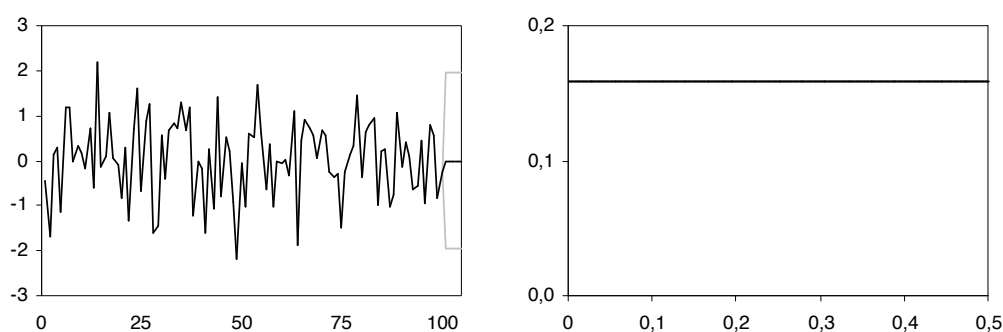
$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 - \phi_1 e^{-i\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega})} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - \phi_1 (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + \phi_1^2)^{-1} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2\phi_1 \cos(\omega) + \phi_1^2)^{-1} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

¹² Proces AR(1) jest stacjonarny wówczas, gdy jedyny rzeczywisty pierwiastek wielomianu autoregresyjnego, który w przypadku tego procesu jest wielomianem stopnia pierwszego, tzn. $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$, równy $z = \phi_1^{-1}$ spełnia warunek $|z| > 1$, co tym samym jest równoważne spełnieniu warunku $|\phi_1| < 1$.

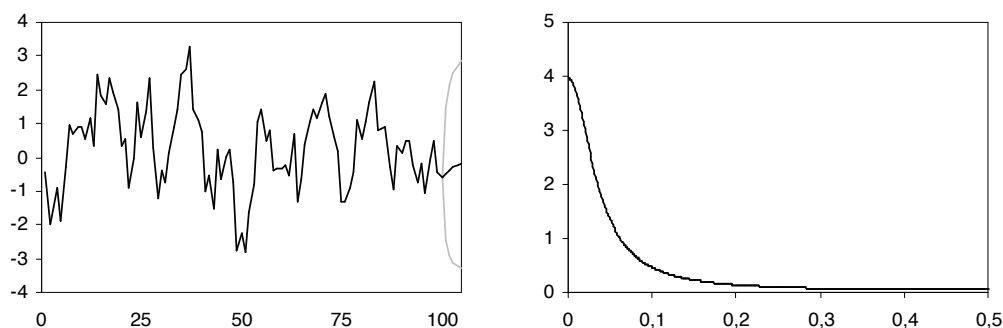
Rysunek 2.1 przedstawia przykładowe realizacje wybranych stacjonarnych procesów typu $ARMA(p,q)$ o zerowych średnich dla $t=1,2,\dots,100$ wraz ze spektrami mocy tych procesów, które zostały uzyskane zgodnie z formułą (2.21) dla danego przypadku¹³. Przy każdej realizacji zamieszczono dodatkowo prognozy MMSE w horyzontach od 1 do 5 okresów wraz z 95% przedziałami ufności (linia szara).

Rysunek 2.1. Przykładowe realizacje i prognozy wybranych stacjonarnych procesów typu ARMA o zerowych średnich (lewy panel) i ich spektra mocy (prawy panel)¹⁴

a) biały szum: $y_t = \varepsilon_t$ dla $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1)$



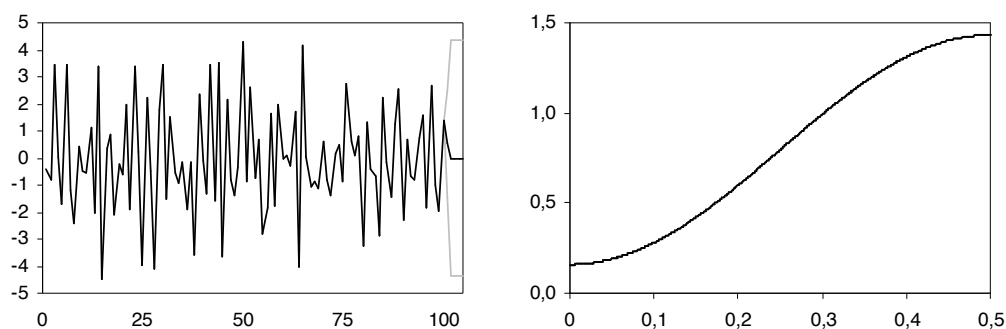
b) $AR(1)$: $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ dla $\phi_1 = 0,8$, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1)$



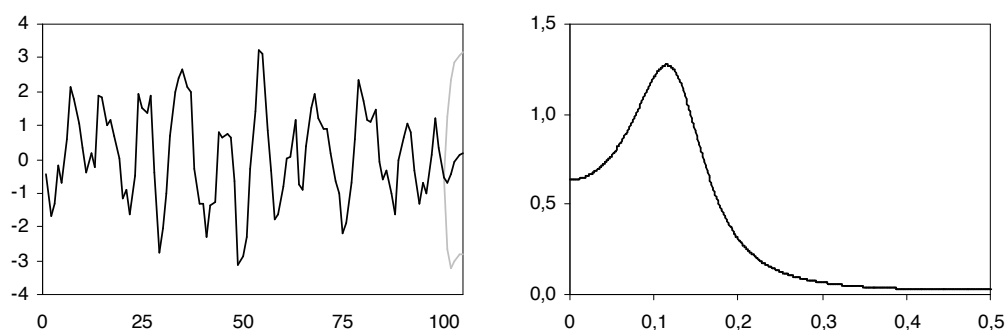
¹³ Zagadnienia związane z estymacją spektrum mocy na podstawie obserwowalnego szeregu czasowego o skończonej próbie obserwacji zostały opisane w rozdziale 3.

¹⁴ Przyjęty przy konstrukcji realizacji procesów typu ARMA proces białego szumu został wygenerowany ze standardowego rozkładu normalnego, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1)$ dla $t=1,2,\dots,100$, w środowisku MATLAB. W przypadku procesów $AR(1)$, $MA(1)$, $AR(2)$ i $ARMA(2,1)$ użyte wartości początkowe są równe odpowiednim wartościom białego szumu. Prognozy MMSE dotyczą obserwacji $t=101,102,\dots,105$.

c) MA(1): $y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ dla $\theta_1 = -2$, $\varepsilon_t \sim iid.N(0,1)$

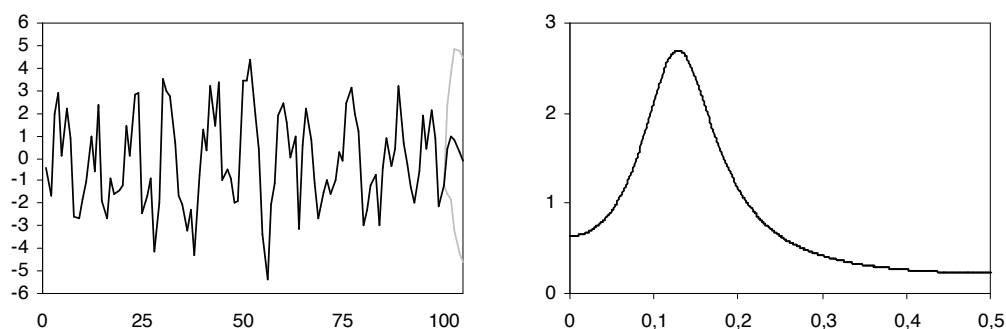


d) AR(2): $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ dla $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = -0.5$, $\varepsilon_t \sim iid.N(0,1)$



e) ARMA(2,1):

$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ dla $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = -0.5$, $\theta_1 = -2$, $\varepsilon_t \sim iid.N(0,1)$



Uwaga: osie horyzontalne wykresów w lewym panelu przedstawiają indeksy obserwacji, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez szereg czasowy. Osie horyzontalne wykresów w prawym panelu przedstawiają tzw. częstotliwości znormalizowane $f \in [0;0,5]$, gdzie $f = \omega/2\pi = 1/\tau$, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez spektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

Spektrum mocy procesu białego szumu jest „płaskie”, jak widać na prawym panelu rysunku 2.1 a), co oznacza, że wszystkie częstotliwości wnoszą jednakowy wkład w zmienność tego

procesu. Spektra mocy zaprezentowanych na rysunku 2.1 procesów AR(1), MA(1), AR(2) oraz ARMA(2,1) wskazują natomiast na zupełnie odmienne rozkłady wariancji w dziedzinie częstotliwości aniżeli w przypadku procesu białego szumu. W przedstawionym procesie AR(1) większość mocy spektralnej jest zgrupowana w paśmie niskich częstotliwościach, co wskazuje na dominujący wpływ wahań o długich okresach na zmienność tego procesu. Odwrotna sytuacja jest widoczna w przypadku procesu MA(1), którego spektrum mocy wskazuje na znaczący wkład wysokich częstotliwości (cykli o krótkich okresach) w kształtowanie zmienności tego procesu. Z kolei w przypadku zaprezentowanego procesu AR(2), jak również procesu ARMA(2,1), widoczny jest wyraźny „garb” spektrum mocy, który wskazuje na znaczącą istotność dla zmienności tych procesów pasma częstotliwości odpowiadającego cyklom o średniej długości¹⁵.

2.2. Niestacjonarność i jej znaczenie dla analizy spektralnej

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że proces stochastyczny z czasem dyskretnym jest stacjonarny. Wówczas spektrum mocy takiego procesu jest dobrze zdefiniowane. Jednakże w przypadku procesów niestacjonarnych, czyli niespełniających warunków słabej stacjonarności, definicja spektrum mocy nie jest właściwa. Wynika to z tego, że wariancja procesu niestacjonarnego jest funkcją czasu i tym samym nie jest skończona, co wiąże się bezpośrednio z trendami, jakim podlegają procesy niestacjonarne. Rozważania o znaczeniu problemu niestacjonarności procesu stochastycznego dla analizy spektralnej zaczniemy od wcześniej wspomnianego procesu AR(1) postaci:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ gdzie } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2). \quad (2.23)$$

Jeżeli spełniony jest warunek $|\phi_1| < 1$, proces dany równaniem (2.23) jest stacjonarny. W przypadku gdy $\phi_1 \geq 1$, proces jest niestacjonarny, a dokładniej dla $\phi_1 = 1$ wielomian $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$ ma jeden rzeczywisty pierwiastek jednostkowy (*ang. unit root*) $z = 1$, który leży na kole jednostkowym i ponadto gdy $c = 0$, proces nosi nazwę procesu błędzenia losowego pierwszego rzędu¹⁶ (*ang. first order random walk*), natomiast dla $\phi_1 > 1$ rzeczywisty pierwiastek wielomianu $\phi(z)$ znajduje się wewnątrz koła jednostkowego i proces

¹⁵ W części 2.4. zostały omówione zagadnienia związane z ekonomiczną interpretacją określonych pasm częstotliwości, czyli interpretacją określonych zakresów długości wahań (cykli).

¹⁶ Jeżeli $c > 0$, proces określa się mianem procesu błędzenia losowego pierwszego rzędu z dryfem.

jest eksplodujący (*ang. explosive*). Z uwagi na obecność rzeczywistego pierwiastka jednostkowego $z=1$ trajektoria procesu błędzenia losowego pierwszego rzędu jest kształtowana poprzez tzw. trend stochastyczny, którego kierunek ulega zmianom w czasie¹⁷. Proces błędzenia losowego pierwszego rzędu określa się również mianem procesu zintegrowanego w stopniu pierwszym, co oznaczamy jako $y_t \sim I(1)$, ponieważ po obliczeniu pierwszych przyrostów tego procesu otrzymujemy zmienną stacjonarną (biały szum), czyli zmienną zintegrowaną w stopniu zerowym, tzn. zmienną $I(0)$:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.24a)$$

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t, \quad (2.24b)$$

$$(1-L)y_t = \varepsilon_t, \quad (2.24c)$$

$$\Delta y_t = \varepsilon_t, \quad (2.24d)$$

gdzie $\Delta \equiv 1-L$ jest operatorem pierwszej różnicy (*ang. first difference operator*). Tym samym proces błędzenia losowego pierwszego rzędu jest procesem przyrosto-stacjonarnym, czyli sprowadzalnym do stacjonarności po różnicowaniu (w tym przypadku jednokrotnym). Uogólniając, proces, który staje się stacjonarny w wyniku obliczenia d -krotnych przyrostów (różnic)¹⁸, jest procesem zintegrowanym (*ang. integrated*) w stopniu d , tzn. procesem $I(d)$, a tym samym ma d -krotny rzeczywisty pierwiastek jednostkowy $z=1$ (który odpowiada zerowej częstotliwości, co zostało pokazane w dalszej części, por. s. 38). Na przykład, wielomian $\phi(z) = (1-z)^2$ odpowiadający procesowi błędzenia losowego drugiego rzędu¹⁹ (*ang. second order random walk*), który jest zmienną zintegrowaną w stopniu drugim, czyli $y_t \sim I(2)$, ma podwójny rzeczywisty pierwiastek jednostkowy $z=1$. Uogólnieniem procesów zintegrowanych jest proces $ARIMA(p,d,q)$ (*ang. autoregressive integrated moving average*), który przyjmuje postać:

$$\phi(L)\Delta^d y_t = c + \theta(L)\varepsilon_t, \quad \text{gdzie } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (2.25)$$

¹⁷ Przeciwnieństwem trendu stochastycznego jest trend deterministyczny, który jest deterministyczną funkcją czasu. Przykładowo proces z trendem liniowym przyjmuje postać $y_t = \tau_t + \varepsilon_t$, gdzie $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, natomiast zmienna $\tau_t = \alpha + \beta t$, gdzie α i β są parametrami, jest trendem deterministycznym, który jest liniowy. Proces z trendem liniowym jest niestacjonarny, a dokładniej jest trendo-stacjonarny, tzn. staje się stacjonarny po usunięciu trendu liniowego, tzn. $y_t - \tau_t = \varepsilon_t$.

¹⁸ Operator d -tej różnicy jest zapisywany jako $\Delta^d \equiv (1-L)^d$ dla $d \geq 1$.

¹⁹ Proces błędzenia losowego drugiego rzędu przyjmuje postać $\Delta^2 y_t = \varepsilon_t$.

czyli jest procesem $ARMA(p,q)$ dla d -tego przyrostu procesu $\{y_t\}$. Proces ARIMA może zostać rozszerzony o dodatkowe wielomiany względem operatora L , które pozwalają na uwzględnienie efektu wahań sezonowych procesu $\{y_t\}$. Wówczas mamy do czynienia z sezonowym procesem ARIMA (*ang. seasonal autoregressive integrated moving average*) oznaczanym jako $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_S$, gdzie $S=4$ odpowiada obserwacjom kwartalnym, a $S=12$ obserwacjom miesięcznym, który przyjmuje postać:

$$\phi(L)\Phi(L^S)\Delta_S^D y_t = c + \theta(L)\Theta(L^S)\varepsilon_t, \text{ gdzie } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (2.26)$$

gdzie wielomiany $\Phi(L^S) = 1 - \sum_{j=1}^P \Phi_j L^{Sj}$ i $\Theta(L^S) = 1 + \sum_{j=1}^Q \Theta_j L^{Sj}$ noszą odpowiednio nazwę sezonowego wielomianu autoregresyjnego i sezonowego wielomianu średniej ruchomej, natomiast $\Delta_S^D \equiv (1 - L^S)^D$ dla $D \geq 1$ jest operatorem D -tej różnicy sezonowej. W przypadku wyżej zaprezentowanych procesów niestacjonarnych definicja (2.5) dla spektrum mocy nie jest prawidłowa, ponieważ warunek bezwzględnej zbieżności ciągu autokowariancji nie jest spełniony przez procesy niestacjonarne. Niemniej jednak w przypadku procesów niestacjonarnych można mówić o tzw. pseudospektrum mocy, które jest obliczane zgodnie ze wzorem (2.20). Przykładowo dla procesu błędzenia losowego pierwszego rzędu, czyli $(1-L)y_t = \varepsilon_t$, gdzie $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, którego tzw. pseudofunkcja przenoszenia mocy przyjmuje postać $\left| \psi(e^{-i\omega}) \right|^2 = \left| (1 - e^{-i\omega})^{-1} \right|^2$, pseudospektrum mocy wyraża się jako:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| (1 - e^{-i\omega})^{-1} \right|^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left((1 - e^{-i\omega})(1 - e^{i\omega}) \right)^{-1} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1)^{-1} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (2 - 2\cos(\omega))^{-1} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Niemniej jednak w paśmie częstotliwości $[0, \pi]$ okazuje się, że granica pseudospektrum mocy procesu $I(1)$ w zerowej częstotliwości jest równa $+\infty$, tzn. $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} S_y(\omega) = +\infty$, z uwagi na wyrażenie $2 - 2\cos(\omega)$. Własność ta potwierdza, że wariancja procesu błędzenia losowego pierwszego rzędu nie jest skończona z powodu obecności rzeczywistego pierwiastka

jednostkowego $z=1$, który odpowiada częstotliwości $\omega=0$. Proces błędzenia losowego pierwszego rzędu ma największą moc spektralną w paśmie niskich częstotliwości, a więc dominujące znaczenie dla przebiegu tego procesu w czasie ma trend stochastyczny, wywołowany obecnością pierwiastka jednostkowego odpowiadającego zerowej częstotliwości. Podobna sytuacja ma miejsce w przykładowym procesie SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄, który przyjmuje postać $(1-L)(1-L^4)y_t = c + (1+\theta_1 L)(1+\Theta_1 L^4)\varepsilon_t$, gdzie $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. Pseudospektrum mocy dla tego procesu wyraża się jako:

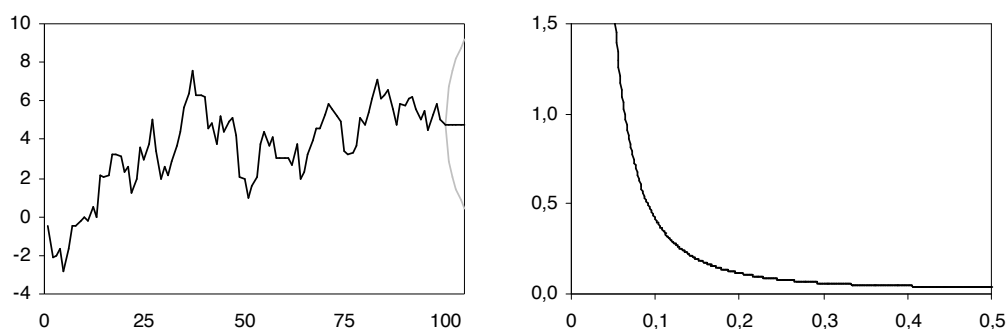
$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{(1+\theta_1 e^{-i\omega})(1+\Theta_1 e^{-4i\omega})}{(1-e^{-i\omega})(1-e^{-4i\omega})} \right|^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{(1+\theta_1 e^{-i\omega})(1+\theta_1 e^{i\omega})(1+\Theta_1 e^{-4i\omega})(1+\Theta_1 e^{4i\omega})}{(1-e^{-i\omega})(1-e^{i\omega})(1-e^{-4i\omega})(1-e^{4i\omega})} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{(1+2\theta_1 \cos(\omega)+\theta_1^2)(1+2\Theta_1 \cos(4\omega)+\Theta_1^2)}{(2-2\cos(\omega))(2-2\cos(4\omega))} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Również w tym przypadku w paśmie częstotliwości $[0, \pi]$ mamy $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} S_y(\omega) = +\infty$, zarówno z uwagi na wyrażenie $2-2\cos(\omega)$, jak i $2-2\cos(4\omega)$, ale również $\lim_{\omega \rightarrow \pi/2^-} S_y(\omega) = +\infty$, $\lim_{\omega \rightarrow \pi/2^+} S_y(\omega) = +\infty$ i $\lim_{\omega \rightarrow \pi^-} S_y(\omega) = +\infty$, w związku z wyrażeniem $2-2\cos(4\omega)$. Tym samym wskazuje to na obecność pięciu pierwiastków jednostkowych, jednego podwójnego odpowiadającego częstotliwości $\omega=0$, tj. rzeczywistego $z=1$, dwóch zespolonych, sprzężonych $z=i$ i $\bar{z}=-i$ odpowiadających kwartalnej częstotliwości sezonowej $\omega=\pi/2$ oraz jednego rzeczywistego $z=-1$ odpowiadającego kwartalnej częstotliwości sezonowej $\omega=\pi$. Naturalnie pierwiastki te są rozwiązaniami równania $(1-z)(1-z^4)=0$.

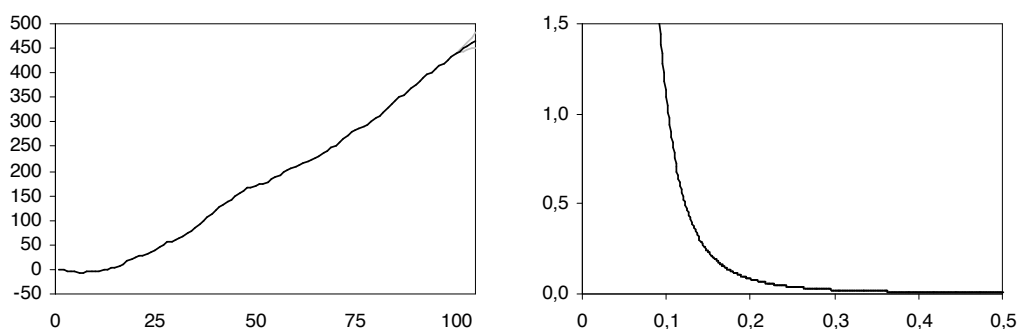
Rysunek 2.2 przedstawia przykładowe realizacje wybranych procesów niestacjonarnych dla $t=1,2,\dots,100$ wraz z pseudospektrami mocy tych procesów. Dodatkowo przy prezentowanych realizacjach procesów niestacjonarnych zamieszczono prognozy MMSE w horyzontach od 1 do 5 okresów wraz z 95% przedziałami ufności (linia szara).

Rysunek 2.2. Przykładowe realizacje i prognozy wybranych procesów niestacjonarnych (lewy panel) i ich pseudospektra mocy (prawy panel)²⁰

a) I(1): $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ dla $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1)$

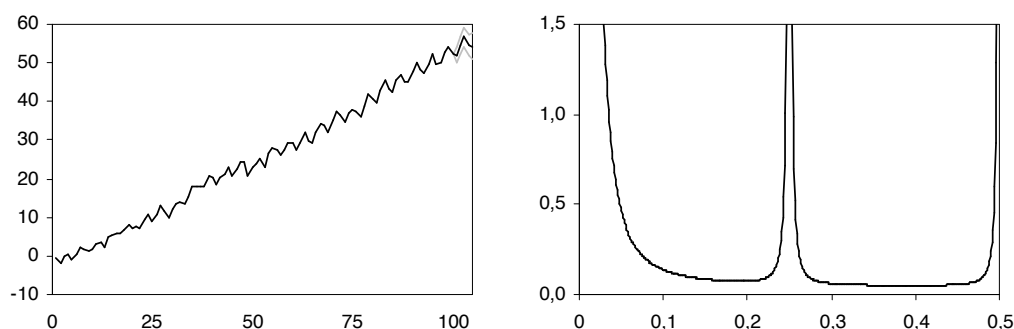


b) I(2): $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t$ dla $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1)$



c) SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄:

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-4} - y_{t-5} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \Theta_1 \varepsilon_{t-4} + \theta_1 \Theta_1 \varepsilon_{t-5} \quad \text{dla } \theta_1 = -0,4, \Theta_1 = -0,6, \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0,1)$$



Uwaga: osie horyzontalne wykresów w lewym panelu przedstawiają indeksy obserwacji, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez szereg czasowy. Osie horyzontalne wykresów w prawym panelu przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez pseudospektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

²⁰ W przypadku wszystkich prezentowanych realizacji procesów niestacjonarnych przyjęto, że dryf nie występuje ($c = 0$). Użyta do ich konstrukcji realizacja procesu białego szumu jest tą co na rysunku 2.1 a).

Pseudospektrum mocy procesu $I(1)$, podobnie jak pseudospektrum mocy procesu $I(2)$ wskazuje, że dominujący wpływ na kształtowanie zmienności tych procesów wywierają wahania o długich okresach, czyli długookresowe trendy. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku procesu $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_4$. Dodatkowo pseudospektrum mocy tego procesu wskazuje na wyraźny wkład częstotliwości sezonowych w kształtowanie zmienności tego procesu.

2.3. Analiza cross-spektralna

Analiza spektralna skupia się na badaniu własności danego procesu stochastycznego w dziedzinie częstotliwości, z kolei zadaniem analizy cross-spektralnej (*ang. cross-spectral analysis*) jest badanie współzależności pomiędzy dwoma procesami stochastycznymi w tej dziedzinie. Podstawą dla analizy spektralnej jest ciąg autokowariancji, natomiast w przypadku analizy cross-spektralnej jest to ciąg cross-kowariancji. Załóżmy, że słabo stacjonarny proces stochastyczny o wartościach rzeczywistych z czasem dyskretnym $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ jest zmienną zależną (wyjściową, *ang. output variable*), natomiast proces $\{x_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ o analogicznych własnościach jest zmienną niezależną (wejściową, *ang. input variable*). Wówczas cross-kowariancje pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ przyjmują postać:

$$E(y_t - \mu^y)(x_{t-k} - \mu^x) = \text{cov}(y_t, x_{t-k}) = \gamma_k^{yx} < +\infty \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.29)$$

gdzie $\mu^y = E(y_t)$ i $\mu^x = E(x_t)$ są kolejno średnimi procesu $\{y_t\}$ i $\{x_t\}$. Cross-kowariancje pomiędzy procesami słabo stacjonarnymi są skończone i nie zależą od indeksu czasu t , a jedynie od przesunięcia k pomiędzy obserwacjami procesu $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$. W przeciwieństwie do autokowariancji, cross-kowariancje nie są symetryczne, spełniona jest natomiast zależność $\gamma_{-k}^{yx} = \gamma_k^{xy}$, gdzie $\gamma_k^{xy} = \text{cov}(x_t, y_{t-k})$. Współczynnik cross-korelacji pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ jest zdefiniowany jako:

$$\rho_k^{yx} \equiv \frac{\gamma_k^{yx}}{\sqrt{\gamma_0^y \gamma_0^x}} \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.30)$$

gdzie $\gamma_0^y = E(y_t - \mu^y)^2$ i $\gamma_0^x = E(x_t - \mu^x)^2$ są kolejno wariancjami procesu $\{y_t\}$ i $\{x_t\}$. Współczynnik ten przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$. W przeciwieństwie do współczynnika autokorelacji, który jest zawsze równy jedności dla $k = 0$, współczynnik cross-korelacji dla $k = 0$ jest zazwyczaj różny od jedności, tzn. $\rho_0^{yx} \neq 1$. Cross-korelacje tak samo jak cross-kowariancje nie są symetryczne i spełniają zależność $\rho_{-k}^{yx} = \rho_k^{xy}$. Ciąg współczynników cross-korelacji $\{\rho_k^{yx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ nosi nazwę funkcji cross-korelacji – CCF (*ang. cross-correlation function*). W przypadku cross-kowariancji γ_k^{yx} i cross-korelacji ρ_k^{yx} przesunięcia $k > 0$ informują o tym, że zmienna x_t wyprzedza zmienną y_t , natomiast przesunięcia $k < 0$ wskazują, że zmienna x_t opóźnia się w stosunku do zmiennej y_t . Podobnie jak w przypadku ciągu autokowariancji procesu słabo stacjonarnego, ciąg cross-kowariancji pomiędzy dwoma procesami słabo stacjonarnymi $\{\gamma_k^{yx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ spełnia warunek bezwzględnej zbieżności, tzn. $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\gamma_k^{yx}| < +\infty$, a więc istnieje funkcja generująca cross-kowariancje (*ang. cross-covariance generating function*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$, która przyjmuje postać (por. Sargent (1987), s. 265):

$$g_{yx}(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{yx} z^k. \quad (2.31)$$

Wówczas analogicznie do spektrum mocy (2.5), czyli jako transformata Fouriera funkcji generującej cross-kowariancje, jest zdefiniowane cross-spektrum mocy (*ang. power cross-spectrum*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$. Jest ono funkcją ciągłą o wartościach zespolonych (por. Hamilton (1994), s. 270):

$$\begin{aligned} S_{yx}(\omega) &\equiv \frac{1}{2\pi} g_{yx}(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{yx} e^{-i\omega k} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{yx} (\cos(\omega k) - i \sin(\omega k)) = \\ &= \Re S_{yx}(\omega) + i \Im S_{yx}(\omega) = \\ &= c_{yx}(\omega) - i q_{yx}(\omega) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \end{aligned} \quad (2.32)$$

gdzie funkcja $c_{yx}(\omega) = \Re S_{yx}(\omega)$, będąca częścią rzeczywistą cross-spektrum mocy, nosi nazwę kospektrum mocy (*ang. power cospectrum*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$, natomiast

funkcja $q_{yx}(\omega) = -\Im S_{yx}(\omega)$, będąca ujemną częścią urojoną cross-spektrum mocy, odpowiada tzw. kwadraturowemu spektrum mocy (*ang. quadrature power spectrum*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$. Kospektrum mocy i kwadraturowe spektrum mocy przyjmują odpowiednio postać:

$$c_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{yx} \cos(\omega k) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.33)$$

$$q_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k^{yx} \sin(\omega k) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.34)$$

Ze wzorów (2.33) i (2.34) wynika, że kospektrum mocy i kwadraturowe spektrum mocy są funkcjami ciągłymi o wartościach rzeczywistych, a ponadto, że są funkcjami okresowymi, tzn. $c_{yx}(\omega + 2\pi k) = c_{yx}(\omega)$ i $q_{yx}(\omega + 2\pi k) = q_{yx}(\omega)$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. W związku z zależnością $\gamma_{-k}^{yx} = \gamma_k^{xy}$, parzystością funkcji cosinus, tzn. $\cos(-\omega) = \cos(\omega)$, oraz nieparzystością funkcji sinus, tzn. $\sin(-\omega) = -\sin(\omega)$, spełnione są własności $c_{yx}(\omega) = c_{xy}(\omega)$ oraz $q_{yx}(\omega) = -q_{xy}(\omega)$, co równoważnie oznacza, że $\Re S_{yx}(\omega) = \Re S_{xy}(\omega)$ oraz $-\Im S_{yx}(\omega) = \Im S_{xy}(\omega)$, a tym samym potwierdza prawdziwość tego, iż $S_{yx}(\omega) = \overline{S_{xy}(\omega)}$. Ponadto kospektrum mocy jest funkcją parzystą, tzn. $c_{yx}(-\omega) = c_{yx}(\omega)$, natomiast kwadraturowe spektrum mocy jest funkcją nieparzystą, tzn. $q_{yx}(-\omega) = -q_{yx}(\omega)$. Prawdą jest zatem, że cross-spektrum mocy spełnia własność $S_{yx}(-\omega) = S_{xy}(\omega)$. W związku z tym, że cross-spektrum mocy spełnia własność $S_{yx}(-\omega) = \overline{S_{xy}(-\omega)} = S_{xy}(\omega)$, dla celów analizy można ograniczyć dziedzinę częstotliwości do przedziału $[0, \pi]$. Zależność cross-kowariancji pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ dla $k = 0$ od cross-spektrum mocy pomiędzy tymi procesami jest dana poprzez odwrotną transformatę Fouriera:

$$\gamma_0^{yx} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{yx}(\omega) d\omega. \quad (2.35)$$

Z uwagi na to, że $\int_{-\pi}^{\pi} q_{yx}(\omega) d\omega = 0$, co wynika z nieparzystości kwadraturowego spektrum mocy, zależność (2.35) może zostać uproszczona do postaci:

$$\gamma_0^{yx} = \int_{-\pi}^{\pi} c_{yx}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\pi} c_{yx}(\omega) d\omega. \quad (2.36)$$

Na podstawie cross-spektrum mocy definiuje się trzy statystyki cross-spektralne zwane odpowiednio wzmocnieniem (*ang. gain*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$, przesunięciem fazowym (*ang. phase shift*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ oraz koherencją (*ang. coherence*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$. Statystyki te są kolejno dane jako (por. Sargent (1987), s. 269):

$$G_{yx}(\omega) = \frac{(c_{yx}^2(\omega) + q_{yx}^2(\omega))^{\frac{1}{2}}}{S_x(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.37)$$

$$\varphi_{yx}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-q_{yx}(\omega)}{c_{yx}(\omega)} \right) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.38)$$

$$K_{yx}^2(\omega) = \frac{c_{yx}^2(\omega) + q_{yx}^2(\omega)}{S_y(\omega) S_x(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.39)$$

gdzie $S_x(\omega)$ oznacza spektrum mocy procesu $\{x_t\}$, natomiast $S_y(\omega)$ odpowiada spektrum mocy procesu $\{y_t\}$. Wzmocnienie²¹ jest funkcją parzystą, tzn. $G_{yx}(-\omega) = G_{yx}(\omega)$ i przyjmuje wartości większe, równe zero, tj. $G_{yx}(\omega) \geq 0$. Przesunięcie fazowe jest funkcją nieparzystą, tzn. $\varphi_{yx}(-\omega) = -\varphi_{yx}(\omega)$ i przyjmuje wartości wyrażone w radianach. W przypadku częstotliwości $\omega = 0$ i $\omega = \pi$ przesunięcie fazowe jest równe zero, ponieważ dla tych częstotliwości funkcja sinus przyjmuje również wartość zero²². Ponadto w związku z zależnościami $c_{yx}(\omega) = c_{xy}(\omega)$ i $q_{yx}(\omega) = -q_{xy}(\omega)$, zachodzi również własność $\varphi_{yx}(\omega) = -\varphi_{xy}(\omega)$. Koherencja jest funkcją parzystą, tj. $K_{yx}^2(-\omega) = K_{yx}^2(\omega)$, która przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$ i spełnia również własność $K_{yx}^2(\omega) = K_{xy}^2(\omega)$. Powyższe statystyki

²¹ Analogicznie do (2.37) pod pojęciem wzmocnienia pomiędzy procesem $\{y_t\}$ i $\{x_t\}$ należy rozumieć funkcję postaci $G_{xy}(\omega) = (c_{xy}^2(\omega) + q_{xy}^2(\omega))^{\frac{1}{2}} / S_y(\omega)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$.

²² Wartości przesunięcia fazowego mogą być również wyrażone w jednostkach czasu, w których jest próbkowana zmienna $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$, np. w kwartalach. W tym celu obliczane są wartości $\varphi_{yx}(\omega)/\omega$, przy pominięciu przypadku dla $\omega = 0$, ponieważ $\varphi_{yx}(0) = 0$, co prowadziłoby do uzyskania symbolu nieoznaczonego $0/0$.

cross-spektralne mają następującą interpretację. Wzmocnienie pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ jest interpretowane jako moduł współczynnika β w regresji zmiennej y_t względem x_t dla danej częstotliwości ω . Jeżeli $G_{yx}(\omega) > 1$, wówczas zmienna x_t charakteryzuje się niższą amplitudą niż zmienna y_t dla częstotliwości ω oraz odwrotnie w przypadku, gdy $G_{yx}(\omega) < 1$. Przesunięcie fazowe pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ informuje natomiast o tym, czy zmienna x_t wyprzedza zmienną y_t , czy też opóźnia się w stosunku do niej, dla danej częstotliwości ω . Ujemna (dodatnia) wartość przesunięcia fazowego $\varphi_{yx}(\omega)$ informuje o wyprzedzaniu (opóźnianiu) dla częstotliwości ω . Z kolei koherencja pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ jest interpretowana jako miara dopasowania R^2 w regresji zmiennej y_t względem x_t dla częstotliwości ω .

Croux et al. (1999) proponują dodatkową statystykę cross-spektralną, która jest określana mianem dynamicznego współczynnika korelacji (*ang. dynamic correlation coefficient*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ lub równoważnie korelacją dynamiczną pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$. Współczynnik ten jest dany jako (por. Croux et al. (1999), s. 2):

$$\rho_{yx}(\omega) = \frac{c_{yx}(\omega)}{\sqrt{S_y(\omega)S_x(\omega)}} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.40)$$

Dynamiczny współczynnik korelacji jest funkcją parzystą, $\rho_{yx}(-\omega) = \rho_{yx}(\omega)$, która przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$ i podobnie jak kospektrum mocy spełnia własność $\rho_{yx}(\omega) = \rho_{xy}(\omega)$. Dynamiczny współczynnik korelacji pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ określa stopień współzależności pomiędzy zmienną x_t i y_t dla danej częstotliwości ω . Naturalnie dodatnia wartość dynamicznego współczynnika korelacji $\rho_{yx}(\omega)$ informuje o związku dodatnim pomiędzy zmienną x_t i y_t , a ujemna o związku ujemnym, dla częstotliwości ω . Ponadto dla dwóch częstotliwości ω_1 i ω_2 , takich że $0 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \pi$, współczynnik korelacji postaci $\rho_{yx}([\omega_1, \omega_2]) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} c_{yx}(\omega) d\omega / \sqrt{\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_y(\omega) d\omega \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega) d\omega}$ określa stopień współzależności pomiędzy zmienną x_t i y_t w paśmie częstotliwości $[-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2]$. W przypadku, gdy $\omega_1 = 0$ i $\omega_2 = \pi$, a więc w całej dziedzinie częstotliwości, prawdą jest, że $\rho_{yx}([0, \pi]) = \rho_0^{yx}$ (por. Croux et al. (1999), s. 6). Również w

przypadku koherencji, wzmocnienia i przesunięcia fazowego można w analogiczny sposób określić ich wartości w zadanym paśmie częstotliwościowym.

Przy wykorzystaniu przesunięcia fazowego $\varphi_{yx}(\omega)$ oraz modułu cross-spektrum mocy, tzn. parzystej funkcji $|S_{yx}(\omega)| = (c_{yx}^2(\omega) + q_{yx}^2(\omega))^{1/2}$ stanowiącej licznik we wzorze (2.37), która nosi nazwę amplitudowego spektrum mocy (*ang. amplitude power spectrum*) pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$, cross-spektrum mocy pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ może zostać zapisane równoważnie do (2.32) jako (por. Sargent (1987), s. 269):

$$S_{yx}(\omega) = |S_{yx}(\omega)| e^{i\varphi_{yx}(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.41)$$

Wzór (2.41) określa postać wykładniczą cross-spektrum mocy pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$.

2.4. Szereg czasowy i jego składowe w dziedzinie czasu i częstotliwości

Szeregi czasowe zmiennych makroekonomicznych, jak na przykład realnego PKB i jego składowych, czy też zmiennych finansowych, jak na przykład indeksu giełdowego i kursu walutowego, są z reguły niestacjonarne z uwagi na obecność trendów. W ogólnym przypadku szereg czasowy składa się z czterech komponentów takich jak: składowa trendu, składowa cykliczna, składowa sezonowa oraz składowa nieregularna (losowa). Addytywna dekompozycja szeregu czasowego y_t przyjmuje postać:

$$y_t = g_t + c_t + s_t + i_t, \quad (2.42)$$

gdzie g_t oznacza składową trendu, c_t składową cyklu, s_t składową sezonową oraz i_t składową nieregularną. Jeżeli zmienna y_t jest wynikiem transformacji logarymicznej, tzn. $y_t = \ln(Y_t)$, wówczas dekompozycja (2.42) jest równoważna dekompozycji multiplikatywnej postaci $Y_t = G_t \times C_t \times S_t \times I_t$, ponieważ $g_t = \ln(G_t)$, $c_t = \ln(C_t)$, $s_t = \ln(S_t)$ oraz $i_t = \ln(I_t)$. Każda ze składowych szeregu czasowego y_t ma swoją reprezentację w dziedzinie częstotliwości, która jest dana poprzez spektrum mocy w przypadku składowej stacjonarnej oraz poprzez pseudospektrum mocy w przypadku składowej niestacjonarnej. Równocześnie charakter danej składowej determinuje zakres częstotliwości, w których dana składowa ma

moc spektralną. Zmienna wejściowa²³ ma z reguły moc w całej dziedzinie częstotliwości od $-\pi$ do π (jak pokazano wcześniej równoważnie można rozpatrywać przedział $[0, \pi]$), natomiast dana składowa posiada moc jedynie w określonym paśmie tej dziedziny, co oznacza, że znaczna część (pseudo)spektrum mocy danej składowej jest zgrupowana właśnie w tym paśmie.

Założmy, że mamy do czynienia ze zmienną, która jest próbkowana kwartalnie, przykładem może być szereg czasowy realnego PKB. Przy częstotliwości zerowej występuje okres równy nieskończoności, natomiast przy częstotliwości π obserwujemy wahania o okresie równym 2 kwartały. Zatem najkrótszym cyklem, jaki można zidentyfikować dla tej zmiennej jest cykl o okresie 2 kwartałów, a najdłuższym – hipotetyczny cykl o okresie nieskończoności. Składowa trendu odpowiada za długookresową ścieżkę wzrostową zmiennej i tym samym ma moc w paśmie niskich częstotliwości, ponieważ reprezentuje „wahania” o długich okresach (zazwyczaj powyżej 8–10 lat). Z kolei wahania o średnich okresach (od 1–1,5 roku do 8–10 lat) są interpretowane jako wahania o charakterze koniunkturalnym, czyli mamy tu do czynienia ze składową cykliczną, która ma moc w paśmie częstotliwości wyznaczanym przez te okresy. Następnie obserwujemy składową sezonową, która reprezentuje wahania o okresach 4 i 2 kwartałów. Pozostałe okresy, tj. przedział od 2 do 4 kwartałów, odpowiadają krótkookresowym wahanom wynikającym z wysokich częstotliwości, czyli składowej nieregularnej. W przypadku zmiennej próbkowanej miesięcznie powyższy podział na pasma pozostaje taki sam, z tą jednak różnicą, że dziedzina częstotliwości obejmuje wówczas przedział okresów od 2 miesięcy do nieskończoności, a tym samym występują cztery dodatkowe częstotliwości sezonowe, którym odpowiadają okresy 4, 3, 2,4 i 2 miesięcy oraz szersze pasmo częstotliwości przypisanych do składowej nieregularnej, obejmujące dodatkowo okresy od 2 do 6 miesięcy.

Rysunek 2.3 przedstawia addytywną dekompozycję szeregu czasowego będącego przykładową realizacją procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄. Przyjęty do dekompozycji szereg czasowy $\{y_t\}_{t=1}^T$, gdzie $T = 100$, jest tą samą realizacją, co szereg przedstawiony w lewym panelu rysunku 2.2 c)²⁴. Wyodrębnienie poszczególnych składowych tej zmiennej zostało dokonane za pomocą procedury TRAMO/SEATS²⁵. Należy podkreślić, że przeprowadzona

²³ Pod pojęciem zmiennej wejściowej należy rozumieć zmienną poddawaną dekompozycji.

²⁴ Również w dalszych rozważaniach m.in. ten szereg będzie wykorzystywany jako przykład.

²⁵ TRAMO/SEATS (Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observations, and Outliers/Signal Extraction in ARIMA Time Series) jest procedurą autorstwa Agustina Maravalla (Banco de España) i Victora Gomeza (Ministerio de Economía), która jest powszechnie wykorzystywana w procesie usuwania sezonowości i dekompozycji ekonomicznych szeregów czasowych. Metoda ta jest wykorzystywana m.in. przez Eurostat.

dekompozycja ma nieco odmienny schemat niż sugeruje to wzór (2.42), a mianowicie komponent trendu i komponent cyklu jest w tym przypadku reprezentowany przez jedną składową o nazwie trend-cykl²⁶, tj. $\eta_t = g_t + c_t$. Tym samym przeprowadzona za pomocą metody TRAMO/SEATS dekompozycja szeregu czasowego y_t przyjmuje postać: $y_t = \eta_t + s_t + i_t$. Wykorzystywany w tej metodzie algorytm zakłada ortogonalność składowych szeregu czasowego y_t i w pierwszej kolejności estymuje za pomocą metody największej wiarygodności (MNW, *ang. maximum likelihood*) odpowiedni proces SARIMA, będący modelem szeregu czasowego y_t . Następnie identyfikowane i wyodrębniane są poszczególne składowe szeregu y_t , które posiadają również reprezentację jako odpowiednie procesy typu ARIMA²⁷. Ekstrakcja tych składowych odbywa się na podstawie filtracji szeregu czasowego y_t , który przy końcach próby obserwacji został rozszerzony o prognozy wprzód i wstecz (*ang. forecasts and backcasts*) wynikające z dopasowanego modelu SARIMA. Filtracja jest przeprowadzana za pomocą odpowiednich filtrów typu Wienera-Kołmogorowa²⁸, dzięki którym uzyskiwane są estymatory poszczególnych składowych o minimalnym błędzie średniokwadratowym (MMSE), które w wyniku agregacji dają wejściowy szereg czasowy y_t , tzn. $y_t = \hat{\eta}_t + \hat{s}_t + \hat{i}_t$ dla $t = 1, 2, \dots, 100$, gdzie zmienna $\hat{\eta}_t$, $\hat{s}_t$ oraz $\hat{i}_t$ odpowiada kolejno estymatorowi MMSE składowej trend-cykl, sezonowej i nieregularnej. W wyniku estymacji do szeregu czasowego y_t dopasowano proces SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄, w którym składowa trend-cykl jest reprezentowana przez proces IMA(2,2), składowa sezonowa przez proces MA(3) z tzw. operatorem agregacji rocznej $\Sigma = 1 + L + L^2 + L^3$ (*ang. annual aggregation operator*), tzn. że zmienna Σs_t jest procesem MA(3), natomiast składowa nieregularna przez proces białego szumu. Zmienna $y_t^{SA} = y_t - s_t = \eta_t + i_t$, będąca zmienną wejściową y_t , po usunięciu wahań sezonowych jest natomiast reprezentowana przez proces IMA(2,2), a jej estymator może zostać zapisany

Alternatywnymi metodami usuwania sezonowości ze zmiennych ekonomicznych i zarazem ich dekompozycji są przede wszystkim procedury X-11 i X-12-ARIMA autorstwa U.S. Census Bureau.

²⁶ Zagadnienia związane z ekstrakcją składowej cyklicznej obrazującej wahania koniunkturalne wejściowego szeregu czasowego zostały opisane w części 2.5.

²⁷ Jednoznaczna identyfikacja procesów reprezentujących poszczególne składowe wejściowej zmiennej polega na tzw. faktoryzacji wielomianu opisującego część autoregresyjną procesu SARIMA, który został dopasowany do wejściowej zmiennej, oraz na procedurze tzw. dekompozycji kanonicznej (*ang. canonical decomposition*), która maksymalizuje wariancję składowej nieregularnej przy jednoczesnej minimalizacji wariancji składników losowych pozostałych komponentów.

²⁸ Opis i zasada działania filtrów typu Wienera-Kołmogorowa zostały omówione w części 2.5.

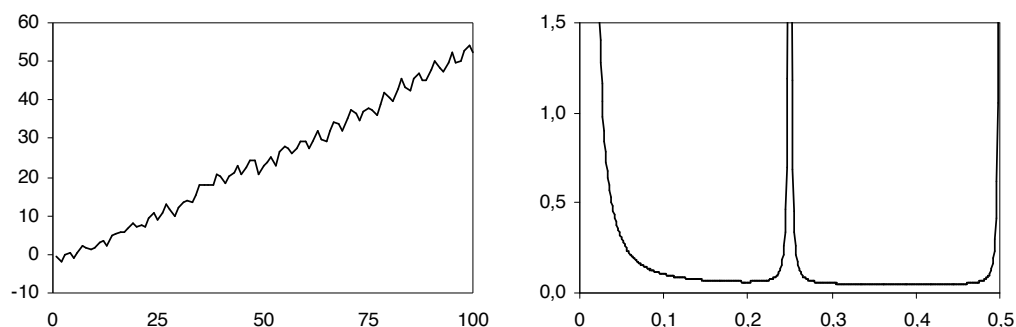
2

naturalnie jako $\hat{y}_t^{SA} = y_t - \hat{s}_t = \hat{\eta}_t + \hat{i}_t$ dla $t = 1, 2, \dots, 100$. W lewym panelu rysunku 2.3 zamieszczono szereg czasowy y_t oraz uzyskane za pomocą filtrów Wienera-Kołmogorowa estymatory MMSE jego poszczególnych składowych i zmiennej y_t^{SA} dla $t = 1, 2, \dots, 100$. Towarzyszące danemu wykresowi równanie stanowi zapis procesu stochastycznego opisującego daną składową. Dla procesu opisującego zmienną y_t , jak i procesów opisujących jego poszczególne składowe oraz zmienną y_t^{SA} , wyprowadzono przy wykorzystaniu oszacowanych przez TRAMO/SEATS parametrów (pseudo)spektra mocy, które zamieszczono w prawym panelu rysunku 2.3²⁹. Tym samym zobrazowano wcześniej opisywany podział dziedziny częstotliwości na pasma, w których dane składowe szeregu czasowego mają moc. Należy podkreślić, że z uwagi na założenie o ortogonalności komponentów szeregu czasowego y_t ich (pseudo)spektra mocy po zsumowaniu dają dokładnie pseudospektrum mocy dla procesu SARIMA, który został dopasowany do szeregu czasowego y_t . Warto zauważyć, że oszacowania parametrów w przypadku modelu szeregu czasowego y_t nie odbiegają w znaczny sposób od parametrów wykorzystanych podczas generowania tego szeregu, tj. $\hat{\theta}_1 = -0,48$, $\hat{\Theta}_1 = -0,71$ i $\hat{\sigma}^2 = 0,76$ w przypadku oszacowanego modelu wobec $\theta_1 = -0,4$, $\Theta_1 = -0,6$ i $\sigma^2 = 1$ w przypadku procesu generującego dane.

Rysunek 2.3. Przykładowa dekompozycja szeregu czasowego w dziedzinie czasu (lewy panel) i częstotliwości (prawy panel)

a) szereg czasowy y_t :

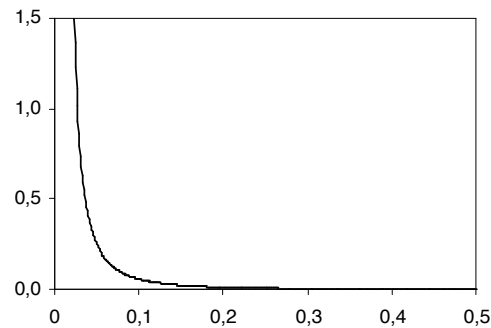
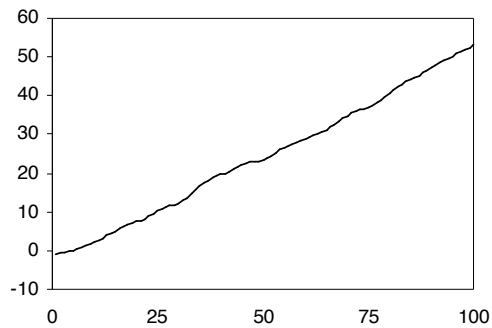
$$(1-L)(1-L^4)y_t = (1-0,4830L)(1-0,7056L^4)\varepsilon_{y,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{y,t} \sim i.i.d.N(0;0,7582)$$



²⁹ Prawy panel rysunku 2.3 przedstawia tzw. parametryczne estymatory spektrum mocy (por. rozdział 3).

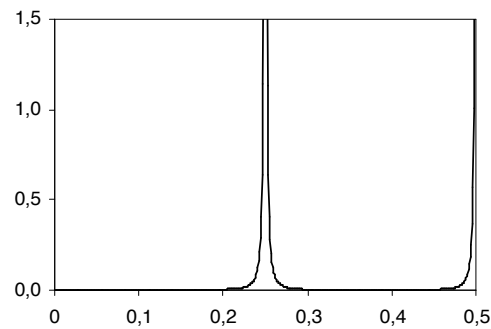
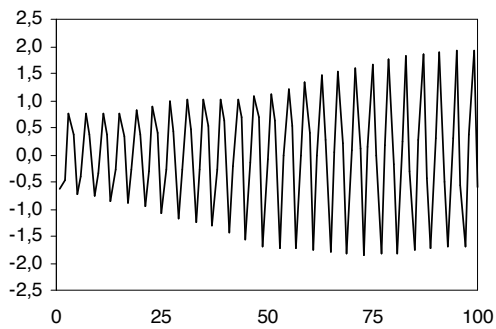
b) składowa trend-cykl η_t :

$$(1 - 2L + L^2)\eta_t = (1 + 0,0829L - 0,9171L^2)\varepsilon_{\eta,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{\eta,t} \sim i.i.d.N(0;0,0400)$$



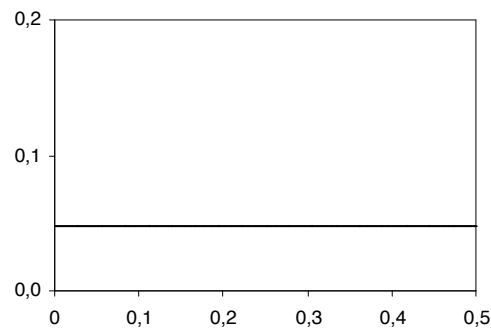
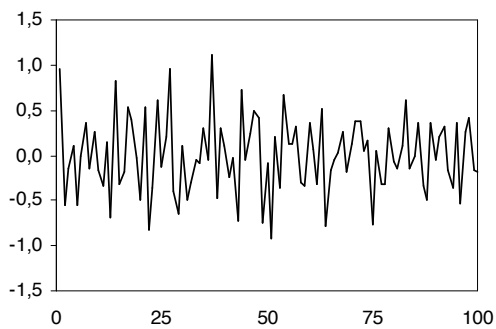
c) składowa sezonowa s_t :

$$(1 + L + L^2 + L^3)s_t = (1 - 0,0903L - 0,4904L^2 - 0,4192L^3)\varepsilon_{s,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{s,t} \sim i.i.d.N(0;0,0087)$$



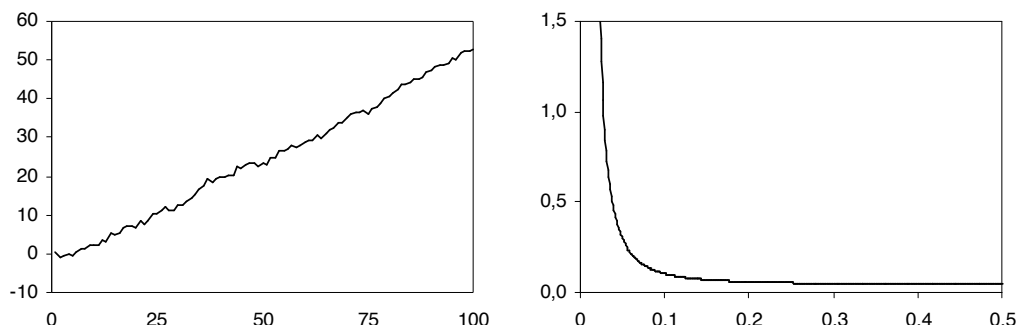
d) składowa nieregularna i_t :

$$i_t = \varepsilon_{i,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{i,t} \sim i.i.d.N(0;0,2987)$$



e) szereg czasowy y_t^{SA} :

$$(1 - 2L + L^2)y_t^{SA} = (1 - 1,4003L + 0,4434L^2)\varepsilon_{y_t^{SA}}, \text{ gdzie } \varepsilon_{y_t^{SA}} \sim i.i.d.N(0; 0,5910)$$



Uwaga: osie horyzontalne wykresów w lewym panelu przedstawiają indeksy obserwacji, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez szereg czasowy. Osie horyzontalne wykresów w prawym panelu przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez (pseudo)spektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

Pseudospektrum mocy składowej trend-cykl wskazuje, że dominujący wpływ na kształtowanie jej zmienności ma długookresowy trend oraz w dużo mniejszym stopniu wahania cykliczne o charakterze koniunkturalnym. Dodatkowo pseudospektrum mocy podkreśla, że w przypadku tej zmiennej nie obserwuje się wpływu wahań sezonowych i nieregularnych. Spektrum mocy składowej sezonowej pokazuje, że jedynymi wahaniami, które kształtują jej zmienność są te o okresach powiązanych z częstotliwościami sezonowymi. W przypadku składowej nieregularnej, która stanowi realizację procesu białego szumu mamy natomiast do czynienia z „płaskim” spektrum mocy. Podczas analizowania pseudospektrum mocy zmiennej y_t^{SA} można natomiast dojść do wniosku, że zmienna ta nie podlega wahanom sezonowym, natomiast wkład pozostałych oscylacji do jej zmienności jest analogiczny do przypadku zmiennej y_t .

2.5. Filtry Wienera-Kołmogorowa i „idealne” filtry częstotliwościowe

Ze względu na sposób wyodrębniania składowych szeregu czasowego można wyróżnić dwa rodzaje filtrów. Z jednej strony mamy do czynienia z podejściem, które bazuje na reprezentacji ARIMA wejściowego szeregu czasowego i jego składowych, gdzie ekstrakcja składowych odbywa się za pomocą tzw. filtrów typu Wienera-Kołmogorowa. Z drugiej strony można wyróżnić podejście polegające na ekstrakcji składowych wejściowego szeregu czasowego poprzez filtry, które wymagają określenia z góry pasma częstotliwości dla

poszukiwanej składowej, czyli tzw. „idealne” filtry częstotliwościowe. W tym podejściu nie są zakładane konkretne modele dla wejściowego szeregu czasowego i jego składowych. W dalszej części pokazano, że tego typu filtry znajdują zastosowanie przede wszystkim przy ekstrakcji składowej cyklicznej obrazującej wahania koniunkturalne.

W części 2.4. zaprezentowano przykład dekompozycji szeregu czasowego na składową trend-cykl, składową sezonową oraz składową nieregularną za pomocą procedury TRAMO/SEATS, która wykorzystuje w tym celu odpowiednie filtry Wienera-Kołmogorowa. Filtry tego typu opierają się na modelowym podejściu do ekstrakcji składowych (*ang. model based signal extraction*), które tak jak wejściowy szereg czasowy mają reprezentację jako odpowiednie procesy typu ARIMA. Poniżej zaprezentowano zasadę działania filtra Wienera-Kołmogorowa w nieskończonej próbie obserwacji (*ang. infinite sample Wiener-Kolmogorov filter*). Załóżmy, że mamy do czynienia z addytywną dekompozycją niestacjonarnego³⁰ procesu $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ na ortogonalne składowe m_t i n_t :

$$y_t = m_t + n_t. \quad (2.43)$$

Składowa m_t oznacza tzw. sygnał (*ang. signal*), a składowa n_t reprezentuje tę część zmiennej y_t , która pozostaje po usunięciu sygnału (*ang. non-signal*). Przykładowo, dla ogólnego przypadku dekompozycji zmiennej y_t na składową trend-cykl, składową sezonową i składową nieregularną $y_t = \eta_t + s_t + i_t$, która jest równoważna dekompozycji na zmienną oczyszczoną z wahań sezonowych i składową sezonową $y_t = y_t^{SA} + s_t$, gdzie $y_t^{SA} = \eta_t + i_t$, zgodnie z (2.43) mamy $m_t = y_t^{SA}$ i $n_t = s_t$. Z kolei przy ekstrakcji składowej trend-cykl mamy $m_t = \eta_t$ i $n_t = s_t + i_t$. Zarówno proces $\{y_t\}$, jak i proces $\{m_t\}$ oraz $\{n_t\}$ mają reprezentację ARIMA:

$$\Phi_y(L)y_t = \Theta_y(L)\varepsilon_{y,t}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_{y,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_y^2), \quad (2.44a)$$

$$\Phi_m(L)m_t = \Theta_m(L)\varepsilon_{m,t}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_{m,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_m^2), \quad (2.44b)$$

$$\Phi_n(L)n_t = \Theta_n(L)\varepsilon_{n,t}, \quad \text{gdzie } \varepsilon_{n,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_n^2), \quad (2.44c)$$

gdzie wielomiany $\Phi_y(L)$, $\Phi_m(L)$ i $\Phi_n(L)$ opisują w pełni część autoregresyjną (*ang. autoregressive part*) danej zmiennej, natomiast wielomiany $\Theta_y(L)$, $\Theta_m(L)$ i $\Theta_n(L)$ część

³⁰ Prezentowany opis filtra Wienera-Kołmogorowa jest również słuszny w przypadku procesu stacjonarnego.

średniej ruchomej (*ang. moving average part*). Zakłada się, że wielomiany te spełniają następujące warunki. Po pierwsze, zakłada się, że wielomian $\Phi_y(z)$ może posiadać pierwiastki jednostkowe, natomiast nie może ich mieć wielomian $\Theta_y(z)$. Po drugie, zakłada się, że wielomiany $\Phi_i(z)$ i $\Theta_i(z)$ dla $i = m, n$ nie posiadają wspólnych pierwiastków oraz ich wszystkie pierwiastki leżą na zewnątrz bądź na kole jednostkowym. Po trzecie, zakłada się, że wielomiany $\Theta_m(z)$ i $\Theta_n(z)$ nie posiadają wspólnych pierwiastków jednostkowych. Ostatecznie przyjmuje się założenie, że zmienne $\varepsilon_{m,t}$ i $\varepsilon_{n,t+k}$ nie są skorelowane dla każdego k należącego do zbioru liczb całkowitych. Wówczas spełnione są warunki postaci:

$$\Phi_y(L) = \Phi_m(L)\Phi_n(L), \quad (2.45a)$$

$$\Theta_y(L)\varepsilon_{y,t} = \Phi_n(L)\Theta_m(L)\varepsilon_{m,t} + \Phi_m(L)\Theta_n(L)\varepsilon_{n,t}. \quad (2.45b)$$

Model dany równaniami (2.43)-(2.45b) nosi nazwę modelu ARIMA z nieobserwowalnymi komponentami – UCARIMA (*ang. unobserved components ARIMA*). Ekstrakcja tych komponentów w ramach modelu UCARIMA odbywa się za pomocą filtrów Wienera-Kołmogorowa, które umożliwiają uzyskanie estymatorów o minimalnym błędzie średniokwadratowym (MMSE), czyli na przykład dla składowej m_t jest to taki estymator $\hat{m}_t$, który minimalizuje warunkową wartość oczekiwaną $E((m_t - \hat{m}_t)^2 | \{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty})$. Proces $\{y_t\}$ i jego składowe mogą zostać równoważnie do (2.44a)-(2.44c) zapisane w postaci:

$$y_t = \frac{\Theta_y(L)}{\Phi_y(L)}\varepsilon_{y,t} = \Psi_y(L)\varepsilon_{y,t}, \quad (2.46a)$$

$$m_t = \frac{\Theta_m(L)}{\Phi_m(L)}\varepsilon_{m,t} = \Psi_m(L)\varepsilon_{m,t}, \quad (2.46b)$$

$$n_t = \frac{\Theta_n(L)}{\Phi_n(L)}\varepsilon_{n,t} = \Psi_n(L)\varepsilon_{n,t}. \quad (2.46c)$$

Wówczas estymator MMSE dla składowej m_t wejściowego procesu $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$, czyli estymator tej składowej w nieskończonej próbie obserwacji wejściowej zmiennej y_t jest dany jako (por. Whittle (1963)):

$$\hat{m}_t = M(L)y_t, \quad (2.47)$$

gdzie wielomian $M(L)$ nosi nazwę filtra Wienera-Kołmogorowa i przyjmuje postać:

$$M(L) = k_m \frac{\Psi_m(L) \Psi_m(L^{-1})}{\Psi_y(L) \Psi_y(L^{-1})} = k_m \frac{\Theta_m(L) \Phi_n(L) \Theta_m(L^{-1}) \Phi_n(L^{-1})}{\Theta_y(L) \Theta_y(L^{-1})}, \text{ gdzie } k_m = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_y^2}, \quad (2.48)$$

czyli *de facto* wielomian $M(z)$ jest funkcją generującą autokowariancję procesu ARMA $\Theta_y(L)x_t = \Theta_m(L)\Phi_n(L)\varepsilon_{x,t}$, gdzie $\varepsilon_{x,t} \sim i.i.d.N(0, k_m)$. Wariancja k_m nosi nazwę współczynnika sygnału do szumu (*ang. signal to noise ratio*). Wielomian $M(L)$ jest symetryczną nieskończoną średnią ruchomą i może zostać zapisany równoważnie do (2.48) jako:

$$M(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} M_j L^j, \quad (2.49)$$

gdzie wagi M_j spełniają warunek symetryczności, tzn. $M_{-j} = M_j$, oraz warunek bezwzględnej zbieżności, tzn. $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |M_j| < +\infty$. Waga M_j jest interpretowana jako odpowiedź filtra $M(L)$ w momencie t na jednostkowy impuls zmiennej wejściowej z okresu $t \pm j$, ponieważ $M_{-j} = \partial \sum_{j=-\infty}^{+\infty} M_j y_{t-j} / \partial y_{t+j}$ i $M_j = \partial \sum_{j=-\infty}^{+\infty} M_j y_{t-j} / \partial y_{t-j}$ oraz $M_{-j} = M_j$. Analogicznie do (2.47) można zapisać estymator MMSE składowej n_t , tzn.:

$$\hat{n}_t = N(L)y_t, \text{ gdzie } N(L) = 1 - M(L). \quad (2.50)$$

Tym samym prawdą jest, że $y_t = \hat{m}_t + \hat{n}_t$. Wagi filtra $N(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} N_j L^j$ są również symetryczne, bezwzględnie zbieżne i spełniają warunek $N_0 = 1 - M_0$ oraz $N_j = -M_j$ dla $j \neq 0$. Interpretacja wag filtra $N(L)$ jest analogiczna do przypadku filtra $M(L)$. Należy podkreślić, że wagi filtra do ekstrakcji składowej trend-cykl oraz filtra do oczyszczania zmiennej wejściowej z wahań sezonowych sumują się do jedności, tzn. suma wag danego filtra dla $j = -\infty, \dots, +\infty$ wynosi 1, podczas gdy wagi filtrów do estymacji składowej sezonowej i nieregularnej sumują się do zera, tzn. suma wag danego filtra dla $j = -\infty, \dots, +\infty$ wynosi 0. W celu uzyskania estymatora MMSE danej składowej w przypadku szeregu czasowego o skończonej próbie obserwacji $\{y_t\}_{t=1}^T$ należy „rozszerzyć” szereg y_t o prognozy

wprzód i wstecz wynikające z dopasowanego modelu ARIMA, a następnie zastosować na tak skonstruowanej zmiennej odpowiedni filtr Wienera-Kołmogorowa zgodnie z algorytmem Burmana-Wilsona (por. Burman (1980))³¹. *De facto* algorytm ten jest wykorzystywany przez procedurę TRAMO/SEATS. W dziedzinie częstotliwości każdy filtr jest reprezentowany przez funkcję wzmocnienia (*ang. gain*), która jest definiowana jako transformata Fouriera wielomianu reprezentującego filtr w dziedzinie czasu (pomijany jest czynnik $1/2\pi$). W przypadku filtra (2.48)-(2.49) wzmocnieniem będzie zatem funkcja $M(z)$ dla $z = e^{-i\omega}$, czyli:

$$G_M(\omega) \equiv M(e^{-i\omega}) = k_m \frac{|\Psi_m(e^{-i\omega})|^2}{|\Psi_y(e^{-i\omega})|^2} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} M_j e^{-i\omega j} = M_0 + 2 \sum_{j=1}^{+\infty} M_j \cos(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.51)$$

Wzmocnienie dane wzorem (2.51) jest funkcją parzystą $G_M(-\omega) = G_M(\omega)$ o wartościach rzeczywistych z przedziału $[0,1]$, a zatem dla celów analitycznych dziedzina częstotliwości może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$. Naturalnie w przypadku wzmocnienia filtra $N(L)$ spełniona jest zależność $G_N(\omega) = 1 - G_M(\omega)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. W przypadku filtra do ekstrakcji składowej trend-cykl oraz filtra oczyszczającego wejściowy szereg czasowy z wahań sezonowych wzmocnienie dla $\omega = 0$ jest równe jedności, co wiąże się bezpośrednio z tym, że wagi tych filtrów sumują się do jedności. Z kolei wzmocnienia filtrów służących do ekstrakcji składowej sezonowej i nieregularnej przyjmują wartość zera dla $\omega = 0$, ponieważ wagi tych filtrów sumują się do zera. Spełnienie warunku sumowalności wag danego filtra do zera, a tym samym warunku zerowej wartości wzmocnienia tego filtra dla $\omega = 0$ oznacza, że filtr taki usuwa trend stochastyczny wywoływany pierwiastkiem jednostkowym na zerowej częstotliwości³². W przypadku sumowalności wag do jedności ma miejsce sytuacja odwrotna. Korzystając z odwrotnej transformaty Fouriera (z czynnikiem $1/2\pi$) wzmocnienia danego filtra można zapisać jego wagi. Przykładowo dla filtra $M(L)$ zapis ten przyjmuje postać:

³¹ Zagadnienia dotyczące tego algorytmu zostały poruszone w rozdziale 3 w części dotyczącej filtra Hodricka-Prescotta.

³² Dla danych kwartalnych wzmocnienie filtra do ekstrakcji składowej trend-cykl, składowej nieregularnej i zmiennej oczyszczonej z wahań sezonowych przyjmuje wartość zera dla $\omega = \pi/2$ i $\omega = \pi$, co zapewnia usunięcie pierwiastków jednostkowych powiązanych z częstotliwościami sezonowymi. Naturalnie w przypadku filtra służącego do ekstrakcji składowej sezonowej wzmocnienie dla częstotliwości sezonowych jest równe jedności. Własność ta została zobrazowana na rysunku 2.5.

$$M_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_M(\omega) e^{i\omega j} d\omega \quad \text{dla } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.52)$$

Z uwagi na założenie o ortogonalności składowych procesu $\{y_t\}$, prawdą jest, że pseudospektrum mocy tego procesu jest również addytywnie dekomponowane na (pseudo)spektra mocy procesów opisujących jego składowe, tzn. $S_y(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. Należy zauważyć, że wzmocnienie filtra Wienera-Kołmogorowa jest dane jako iloraz (pseudo)spektrum mocy procesu reprezentującego daną składową i pseudospektrum mocy procesu wejściowego, tzn.:

$$G_M(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{S_y(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.53a)$$

$$G_N(\omega) = 1 - G_M(\omega) = 1 - \frac{S_m(\omega)}{S_y(\omega)} = \frac{S_y(\omega) - S_m(\omega)}{S_y(\omega)} = \frac{S_n(\omega)}{S_y(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.53b)$$

Z kolei relacja pomiędzy (pseudo)spektrum mocy estymatora MMSE danej składowej a pseudospektrum mocy wejściowego procesu jest dana poprzez funkcję przenoszenia mocy filtra (*ang. power transfer function*), która jest oznaczana w przypadku filtra $M(L)$ i $N(L)$ odpowiednio jako $|G_M(\omega)|^2$ oraz $|G_N(\omega)|^2$. Relacje te przyjmują kolejno w przypadku filtra $M(L)$ i $N(L)$ następującą postać:

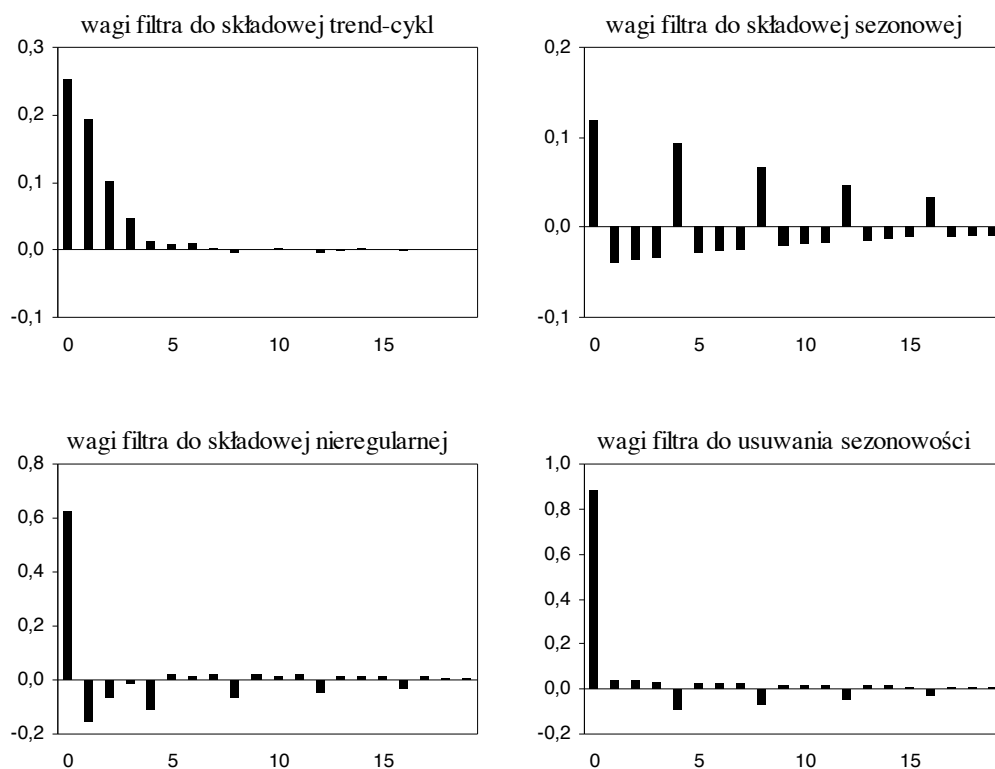
$$S_{\hat{m}}(\omega) = |G_M(\omega)|^2 S_y(\omega) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.54a)$$

$$S_{\hat{n}}(\omega) = |G_N(\omega)|^2 S_y(\omega) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.54b)$$

Z uwagi na to, że wzmocnienia prezentowanych filtrów typu Wienera-Kołmogorowa przyjmują zawsze wartości rzeczywiste nie występuje przesunięcie fazowe zmiennej wyjściowej w stosunku do zmiennej wejściowej, co niewątpliwie jest własnością pożądaną. Przesunięcie fazowe filtra o wzmocnieniu przyjmującym wartości rzeczywiste jest zawsze równe zero dla każdej częstotliwości ω , ponieważ część urojona wzmocnienia takiego filtra jest zawsze równa zero dla każdej częstotliwości ω . Niemniej jednak własność ta zachodzi jedynie w przypadku nieskończonych prób obserwacji zmiennych wejściowych. W rozdziale 3 pokazano, że w przypadku aproksymacji danego filtra dla szeregu czasowego o skończonej próbie obserwacji, własność ta nie musi być spełniona.

Powracając do przykładu addytywnej dekompozycji procesu $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_4$ za pomocą metody TRAMO/SEATS, możemy scharakteryzować poszczególne przykładowe filtry Wienera-Kołmogorowa. Rysunek 2.4 przedstawia wagi filtrów służących do estymacji poszczególnych składowych przyjętego procesu $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_4$, jak również wagi filtra oczyszczającego ten proces z wahań sezonowych. Prezentowane wagi dotyczą filtrów właściwych dla nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej y_t . W przypadku każdego filtra przedstawiono pierwsze 20 wag dla $j = 0, 1, \dots, 19$. Rysunek 2.5 przedstawia natomiast wzmocnienia tych filtrów dla przypadku nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej y_t (lewy panel). W przypadku każdego filtra w prawym panelu rysunku 2.5 zamieszczono (pseudo)spektrum mocy estymatora MMSE odpowiedniej składowej na tle pseudospektrum wejściowego procesu $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_4$, obliczonego zgodnie z oszacowanymi przez TRAMO/SEATS parametrami tego procesu (linia szara).

Rysunek 2.4. Wagi przykładowych filtrów Wienera-Kołmogorowa dla przypadku nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej



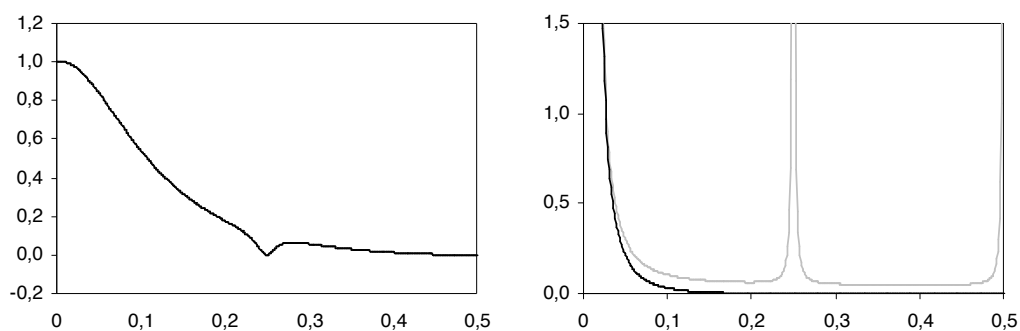
Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy wag, z kolei osie wertykalne wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez wagi.

Źródło: opracowanie własne.

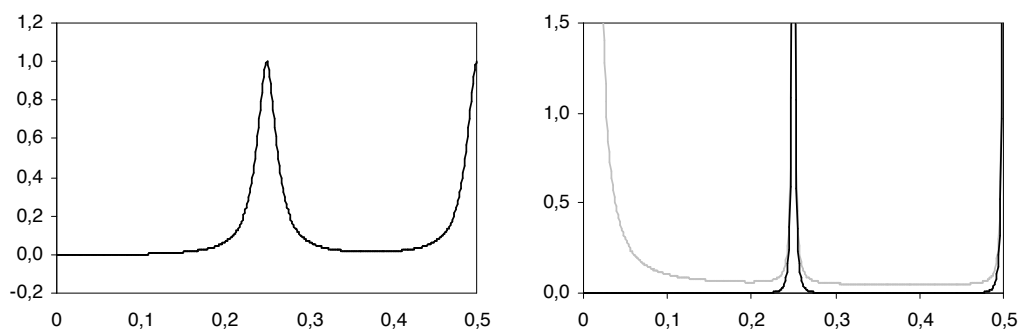
Powyższe wykresy obrazują odpowiedź danego filtra w momencie t na jednostkowy impuls wejściowej zmiennej z okresu $t \pm j$. We wszystkich przypadkach jest widoczne stopniowe wygasanie wag wraz ze wzrostem przesunięcia w czasie (wzrostem wartości j).

Rysunek 2.5. Wzmocnienia przykładowych filtrów Wienera-Kołmogorowa dla przypadku nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej (lewy panel) wraz z odpowiadającymi im (pseudo)spektrami mocy estymatorów MMSE składowych (prawy panel)

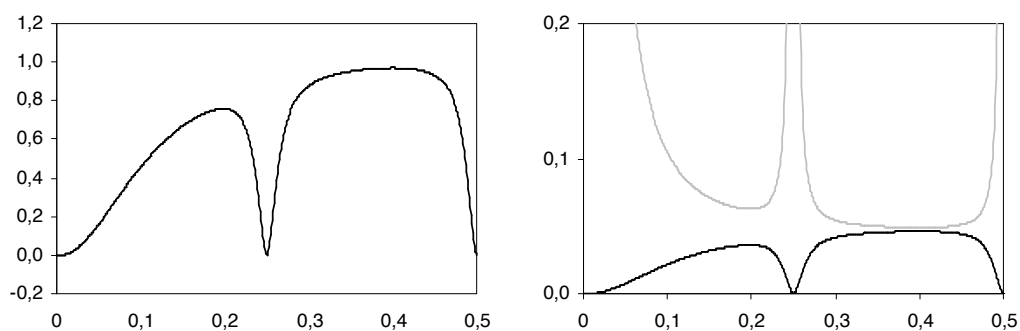
a) filtr do ekstrakcji składowej trend-cykl



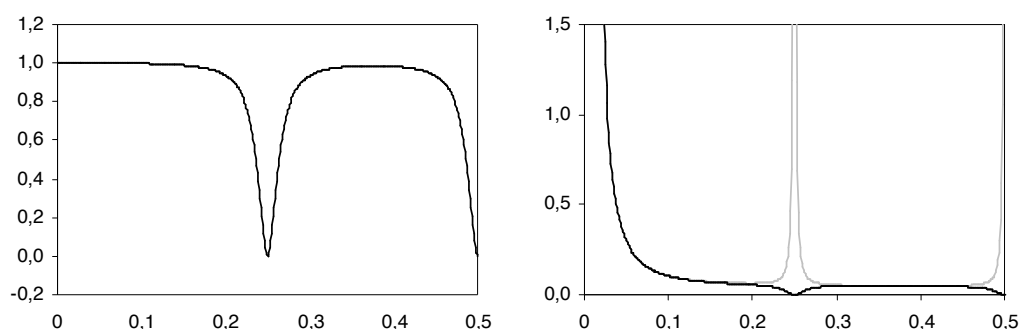
b) filtr do ekstrakcji składowej sezonowej



c) filtr do ekstrakcji składowej nieregularnej



d) filtr do usuwania sezonowości



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów w lewym panelu odnoszą się do wartości przyjmowanych przez wzmocnienia, natomiast osie wertykalne wykresów w prawym panelu przedstawiają wartości przyjmowane przez (pseudo)spektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wykresy wskazują, że poszczególne filtry mają pożądaną charakterystykę częstotliwościową. Przykładowo pseudospektrum mocy zmiennej po usunięciu wahań sezonowych i pseudospektrum mocy zmiennej wejściowej charakteryzują się analogicznym przebiegiem w całym paśmie częstotliwości z wyjątkiem częstotliwości sezonowych, których wpływ został wyeliminowany. Wynik ten potwierdza, że pożądaný efekt filtra do usuwania sezonowości został osiągnięty. Analogiczna sytuacja ma miejsce w przypadku pozostałych filtrów.

Do tej pory nie rozważano problemu ekstrakcji składowej trendu g_t i cyklu c_t . W rozdziale 3, w części poświęconej filtrowi Hodricka-Prescotta, zaprezentowano, w jaki sposób można dokonać wyodrębnienia tych składowych za pomocą filtra Hodricka-Prescotta i tzw. zmodyfikowanego filtra Hodricka-Prescotta, będących filtrami typu Wienera-Kołmogorowa, w ramach modelu UCARIMA, i nadać tym samym składowej cyklicznej postać procesu stacjonarnego. Składowa cykliczna może również zostać wyodrębniona w ramach odmiennego podejścia, które polega na zastosowaniu filtra wymagającego określenia z góry pasma częstotliwości, w którym owa składowa będzie reprezentowana. Powszechnie przyjmuje się, że składowa cykliczna obrazująca wahania koniunkturalne jest odpowiedzialna za zmienność wejściowego szeregu czasowego w paśmie częstotliwości wyznaczanym przez okresy od 1–1,5 roku do 8–10 lat. Filtr częstotliwościowy, który umożliwia ekstrakcję takiej składowej nosi nazwę filtra pasmowo-przepustowego (*ang. band-pass filter*). Poniżej zaprezentowano opis „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego. Określenie „idealny” oznacza, że filtr ten mógłby zostać zastosowany jedynie w przypadku szeregu czasowego o nieskończonej próbie obserwacji, a tym samym dla szeregu czasowego o skończonej próbie

obserwacji wymagana jest aproksymacja owego filtra. Zagadnienia związane z aproksymacją „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego dla skończonych prób obserwacji zostały omówione w rozdziale 3.

Procedura „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego jest następująca. Niech będzie dana addytywna dekompozycja niestacjonarnego³³ procesu $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ na ortogonalne składowe y_t^c i v_t :

$$y_t = y_t^c + v_t, \quad (2.55)$$

gdzie składowa y_t^c oznacza komponent cykliczny³⁴ zmiennej y_t , który ma moc jedynie w paśmie częstotliwości $\{[-\bar{\omega}, -\underline{\omega}] \cup [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\} \in [-\pi, \pi]$, gdzie $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega} < \pi$, natomiast składowa v_t oznacza niecykliczną część zmiennej y_t i ma moc w pozostałej części dziedziny częstotliwości. Częstotliwość $\underline{\omega}$ nosi nazwę dolnej częstotliwości ucięcia (*ang. lower cut-off frequency*), natomiast częstotliwość $\bar{\omega}$ jest nazywana górną częstotliwością ucięcia (*ang. upper cut-off frequency*). Naturalnie z dolną i górną częstotliwością ucięcia są związane odpowiadające im okresy. Niech τ_U oznacza okres odpowiadający dolnej częstotliwości ucięcia, tzn. $\underline{\omega} = 2\pi/\tau_U$, natomiast τ_L okres odpowiadający górnej częstotliwości ucięcia, tzn. $\bar{\omega} = 2\pi/\tau_L$. Wówczas, z uwagi na założenie $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega} < \pi$, okresy spełniają warunek $2 < \tau_L < \tau_U < +\infty$. Ekstrakcja składowej y_t^c odbywa się za pomocą „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego $B(L)$ (por. Sargent (1987), s. 259):

$$y_t^c = B(L)y_t, \text{ gdzie } B(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_j L^j, \quad B_{-j} = B_j \text{ oraz } \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |B_j| < +\infty. \quad (2.56)$$

Wzmocnienie „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego jest dane poprzez transformatę Fouriera (pomijany jest czynnik $1/2\pi$) wielomianu $B(L)$, a więc jest to funkcja $B(z)$ dla

³³ Prezentowany opis jest słuszny również w przypadku procesu stacjonarnego.

³⁴ Ze względu na to, że prezentowane obecnie podejście do ekstrakcji cyklu różni się od opisanej w rozdziale 3 metody filtra Hodricka-Prescotta, który może być stosowany w ramach modelu UCARIMA, składowa cykliczna została oznaczona jako y_t^c , a nie jako c_t . Oznaczenie c_t będzie odpowiadać komponentowi cyklicznemu, który został uzyskany w ramach filtra Hodricka-Prescotta (i modelu UCARIMA), z kolei zmienna y_t^c będzie odpowiadać komponentowi cyklicznemu wynikającemu z zastosowania filtra pasmowo-przepustowego. Składowe cykliczne uzyskane w ramach jednego i drugiego podejścia są do siebie zbliżone, tj. $y_t^c \approx c_t$, w zależności od „ustawień” obydwu filtrów.

$z = e^{-i\omega}$. Zgodnie z charakterystyką spektralną zmiennej y_t^c wzmocnienie to jest zdefiniowane jako:

$$G_B(\omega) \equiv B(e^{-i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in [-\bar{\omega}, -\underline{\omega}] \cup [\underline{\omega}, \bar{\omega}], \\ 0 & \text{dla } \omega \in [-\pi, -\bar{\omega}) \cup (-\underline{\omega}, \underline{\omega}) \cup (\bar{\omega}, \pi], \end{cases} \quad (2.57)$$

czyli jest funkcją parzystą, tj. $G_B(-\omega) = G_B(\omega)$. Tym samym „idealny” filtr pasmowo-przepustowy usuwa z wejściowego procesu $\{y_t\}$ wahania o okresach większych niż τ_U oraz wahania o okresach mniejszych niż τ_L , pozostawiając wahania o okresach pomiędzy τ_L i τ_U . Odpowiednio dobrane okresy τ_L i τ_U wyznaczają pasmo wahań o charakterze koniunkturalnym. Ze względu na to, że wzmocnienie $G_B(\omega)$ przyjmuje wartość zera dla $\omega = 0$, wagi³⁵ „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego $B(L)$ sumują się do zera, tzn. $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_j = 0$, co tym samym zapewnia usunięcie trendu stochastycznego. Wagi te są dane poprzez odwrotną transformatę Fouriera (z czynnikiem $1/2\pi$) wzmocnienia $G_B(\omega)$:

$$B_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_B(\omega) e^{i\omega j} d\omega \quad \text{dla } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.58)$$

Rozwiązaniem odwrotnej transformaty Fouriera (2.58) jest zestaw wag B_j , które przyjmują postać:

$$B_j = \begin{cases} \frac{\bar{\omega} - \underline{\omega}}{\pi} & \text{dla } j = 0, \\ \frac{\sin(\bar{\omega}j) - \sin(\underline{\omega}j)}{\pi j} & \text{dla } j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.59)$$

Wzór (2.59) potwierdza wcześniej przytoczoną własność symetryczności wag, tj. $B_{-j} = B_j$.

Warto zauważyć, że „idealny” filtr pasmowo-przepustowy może zostać przedstawiony za pomocą różnicy pomiędzy dwoma „idealnymi” filtrami dolno-przepustowymi (por. Baxter i King (1995), s. 7). „Idealny” filtr dolno-przepustowy służy do ekstrakcji składowych mających moc w dolnym paśmie częstotliwości, a więc przy jego wykorzystaniu można

³⁵ Interpretacja wag „idealnych” filtrów częstotliwościowych jest taka sama jak w przypadku wag filtrów typu Wienera-Koźmogorowa.

dokonywać ekstrakcji komponentu trendu. Przyjmijmy, że wielomian $\underline{B}(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \underline{B}_j L^j$ odpowiada „idealnemu” filtrowi dolno-przepustowemu, który jest powiązany z częstotliwością ucięcia $\underline{\omega}$, że wielomian $\bar{B}(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \bar{B}_j L^j$ reprezentuje „idealny” filtr dolno-przepustowy, powiązany z częstotliwością ucięcia $\bar{\omega}$, oraz że spełniony jest warunek $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega} < \pi$. Tym samym przy odpowiednio dobranych częstotliwościach ucięcia „idealny” filtr dolno-przepustowy $\underline{B}(L)$ służy do ekstrakcji komponentu obrazującego trend, natomiast „idealny” filtr dolno-przepustowy $\bar{B}(L)$ do ekstrakcji komponentu typu trend-cykl. Analogicznie do „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, komponent trendu uzyskany za pomocą „idealnego” filtra dolno-przepustowego $\underline{B}(L)$ przyjmuje postać $y_t^s = \underline{B}(L)y_t$, natomiast komponent typu trend-cykl wynikający z „idealnego” filtra dolno-przepustowego $\bar{B}(L)$ jest dany jako $y_t^\eta = \bar{B}(L)y_t$. Wzmocnienia „idealnych” filtrów dolno-przepustowych $\underline{B}(L)$ i $\bar{B}(L)$, będące funkcjami parzystymi, przyjmują kolejno postać:

$$G_{\underline{B}}(\omega) \equiv \underline{B}(e^{-i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in [-\underline{\omega}, \underline{\omega}], \\ 0 & \text{dla } \omega \in [-\pi, -\underline{\omega}) \cup (\underline{\omega}, \pi], \end{cases} \quad (2.60)$$

$$G_{\bar{B}}(\omega) \equiv \bar{B}(e^{-i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in [-\bar{\omega}, \bar{\omega}], \\ 0 & \text{dla } \omega \in [-\pi, -\bar{\omega}) \cup (\bar{\omega}, \pi]. \end{cases} \quad (2.61)$$

Ze względu na to, że wzmocnienia „idealnych” filtrów typu dolno-przepustowego przyjmują wartość jedności dla $\omega = 0$, wagi tego typu filtrów, które są symetryczne i bezwzględnie zbieżne, sumują się również do jedności. Wzmocnienie „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego może zostać zapisane równoważnie do (2.57) jako $G_B(\omega) = G_{\bar{B}}(\omega) - G_{\underline{B}}(\omega)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. Tym samym wielomian reprezentujący „idealny” filtr pasmowo-przepustowy przyjmuje równoważną do (2.56) postać $B(L) = \bar{B}(L) - \underline{B}(L)$, a więc wagi „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego mogą zostać zapisane równoważnie do (2.59) jako $B_j = \bar{B}_j - \underline{B}_j$ dla $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gdzie wagi „idealnych” filtrów dolno-przepustowych stanowią analogicznie do (2.58) rozwiązania odwrotnych transformat Fouriera (z czynnikiem $1/2\pi$) wzmocnień $G_{\bar{B}}(\omega)$ oraz $G_{\underline{B}}(\omega)$:

$$\bar{B}_j = \begin{cases} \frac{\bar{\omega}}{\pi} & \text{dla } j = 0, \\ \frac{\sin(\bar{\omega}j)}{\pi j} & \text{dla } j = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (2.62)$$

$$\underline{B}_j = \begin{cases} \frac{\underline{\omega}}{\pi} & \text{dla } j = 0, \\ \frac{\sin(\underline{\omega}j)}{\pi j} & \text{dla } j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.63)$$

Komponent cykliczny wynikający z „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego może zostać zapisany równoważnie do (2.56) jako $y_t^c = y_t^\eta - y_t^s = (\bar{B}(L) - \underline{B}(L))y_t$.

Oprócz „idealnego” filtra dolno- i pasmowo-przepustowego możliwe jest również wyróżnienie „idealnego” filtra górno-przepustowego, który jest specyficznym przypadkiem „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, a dokładnie jest to „idealny” filtr pasmowo-przepustowy, dla którego górna częstotliwość ucięcia $\bar{\omega} = \pi$, tj. $\tau_L = 2$. Z drugiej strony komponent uzyskany za pomocą „idealnego” filtra górno-przepustowego, oznaczony jako $\tilde{y}_t$, stanowi różnicę pomiędzy wejściowym szeregiem czasowym a komponentem trendu uzyskanym za pomocą „idealnego” filtra dolno-przepustowego o częstotliwości ucięcia $\underline{\omega}$, czyli jest to komponent postaci $\tilde{y}_t = y_t - y_t^s = (1 - \underline{B}(L))y_t$, który zawiera wahania cykliczne, sezonowe i nieregularne. W związku z tym „idealny” filtr górno-przepustowy jest dany poprzez wielomian $\tilde{B}(L) = 1 - \underline{B}(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \tilde{B}_j L^j$, gdzie wagi $\tilde{B}_j$ spełniające warunek symetrii oraz bezwzględnej zbieżności przyjmują postać $\tilde{B}_0 = 1 - \underline{B}_0$ i $\tilde{B}_j = -\underline{B}_j$ dla $j \neq 0$ oraz sumują się do zera, tj. $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \tilde{B}_j = 0$. Wzmocnienie „idealnego” filtra górno-przepustowego, będące funkcją parzystą, przyjmuje postać:

$$G_{\tilde{B}}(\omega) \equiv \tilde{B}(e^{-i\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \in [-\pi, \underline{\omega}] \cup [\omega, \pi], \\ 0 & \text{dla } \omega \in (-\underline{\omega}, \underline{\omega}), \end{cases} \quad (2.64)$$

co jest równoważne z zapisem $G_{\tilde{B}}(\omega) = 1 - G_{\underline{B}}(\omega)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. Podobnie jak w poprzednich przypadkach poprzez rozwiązanie odwrotnej transformaty Fouriera (z czynnikiem $1/(2\pi)$) wzmocnienia $G_{\tilde{B}}(\omega)$ uzyskuje się wagi „idealnego” filtra górno-przepustowego, które przyjmują postać:

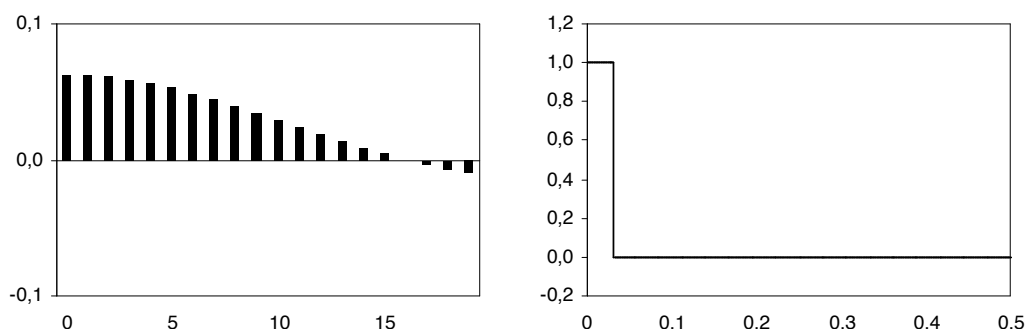
$$\tilde{B}_j = \begin{cases} 1 - \frac{\omega}{\pi} & \text{dla } j = 0, \\ -\frac{\sin(\omega j)}{\pi j} & \text{dla } j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.65)$$

Warto zauważyć, że wzmocnienia „idealnych” filtrów częstotliwościowych przyjmują zawsze wartości rzeczywiste, a zatem filtry tego typu nie powodują przesunięcia fazowego pomiędzy zmienną wyjściową i wejściową. Część urojona wzmocnienia jest zawsze równa zero dla każdej częstotliwości ω , a więc przesunięcie fazowe w przypadku każdej częstotliwości ω dla „idealnego” filtra częstotliwościowego jest również równe zero. W rozdziale 3 pokazano, że w przypadku aproksymacji „idealnych” filtrów częstotliwościowych dla szeregu czasowego o skończonej próbie obserwacji stwierdzenie to nie jest zawsze prawdziwe.

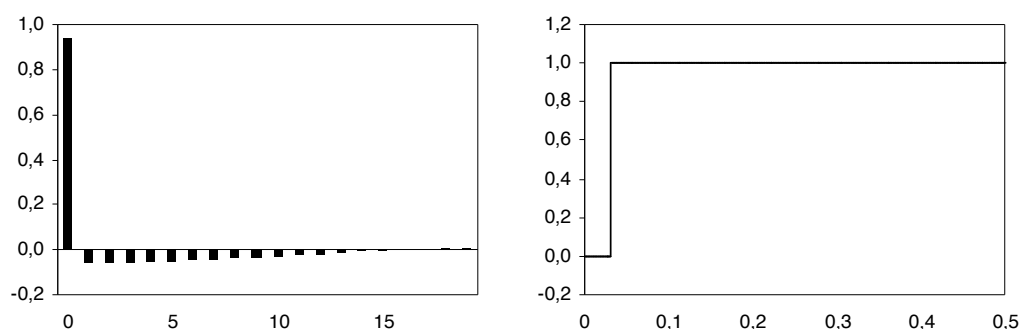
Rysunek 2.6 przedstawia w lewym panelu wagi oraz w prawym panelu wzmocnienia „idealnych” filtrów typu dolno-, górno- i pasmowo-przepustowego. W przypadku każdego filtra „idealnego” przedstawiono pierwsze 20 wag dla $j = 0, 1, \dots, 19$ i przyjęto częstotliwość ucięcia $\underline{\omega}$ dla okresu $\tau_U = 32$ kwartały (tj. 8 lat), dodatkowo w przypadku „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego przyjęto, że górna częstotliwość ucięcia $\bar{\omega}$ odpowiada okresowi $\tau_L = 6$ kwartałów (tj. 1,5 roku). Parametry te wynikają ze stylizowanych faktów na temat cyklu koniunkturalnego (por. Baxter i King (1995), s. 8).

Rysunek 2.6. Wagi (lewy panel) i wzmocnienia (prawy panel) „idealnych” filtrów typu dolno-, górno- i pasmowo-przepustowego

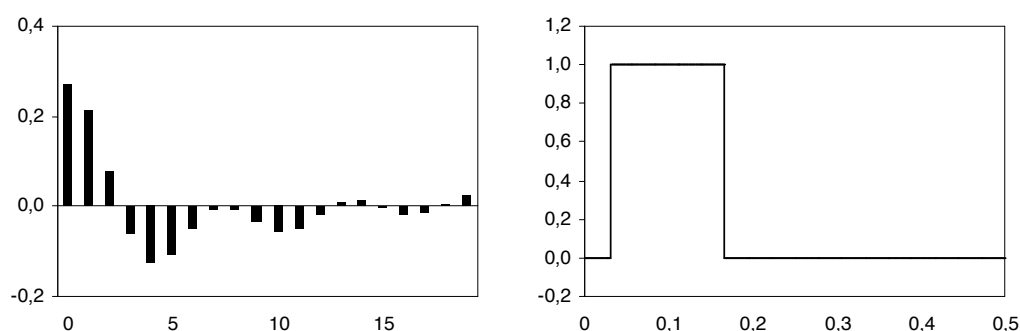
a) „idealny” filtr dolno-przepustowy



b) „idealny” filtr górno-przepustowy



c) „idealny” filtr pasmowo-przepustowy



Uwaga: osie horyzontalne wykresów w lewym panelu przedstawiają indeksy wag, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez wagi. Osie horyzontalne wykresów w prawym panelu przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne tych wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez wzmocnienia.

Źródło: opracowanie własne.

Wykresy wag obrazują odpowiedź danego filtra w momencie t na jednostkowy impuls wejściowej zmiennej z okresu $t \pm j$. We wszystkich przypadkach jest widoczne stopniowe wygasanie wag wraz ze wzrostem przesunięcia w czasie (wzrostem wartości j). W szczególności „idealny” filtr pasmowo-przepustowy charakteryzuje się „oscylacyjnym” przebiegiem wag. Korespondujące wzmocnienia obrazują charakterystyki częstotliwościowe omawianych filtrów.

Rysunek 2.7 przedstawia wpływ „idealnych” filtrów typu dolno-, górno- i pasmowo-przepustowego zobrazowanych na rysunku 2.6 na pseudospektrum mocy procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄ z wcześniejszych przykładów (linia szara). (Pseudo)spektra mocy komponentów wynikających z zastosowania danego filtra (linia czarna) są dane poprzez iloczyn pseudospektrum mocy procesu opisującego wejściową zmienną i funkcji przenoszenia

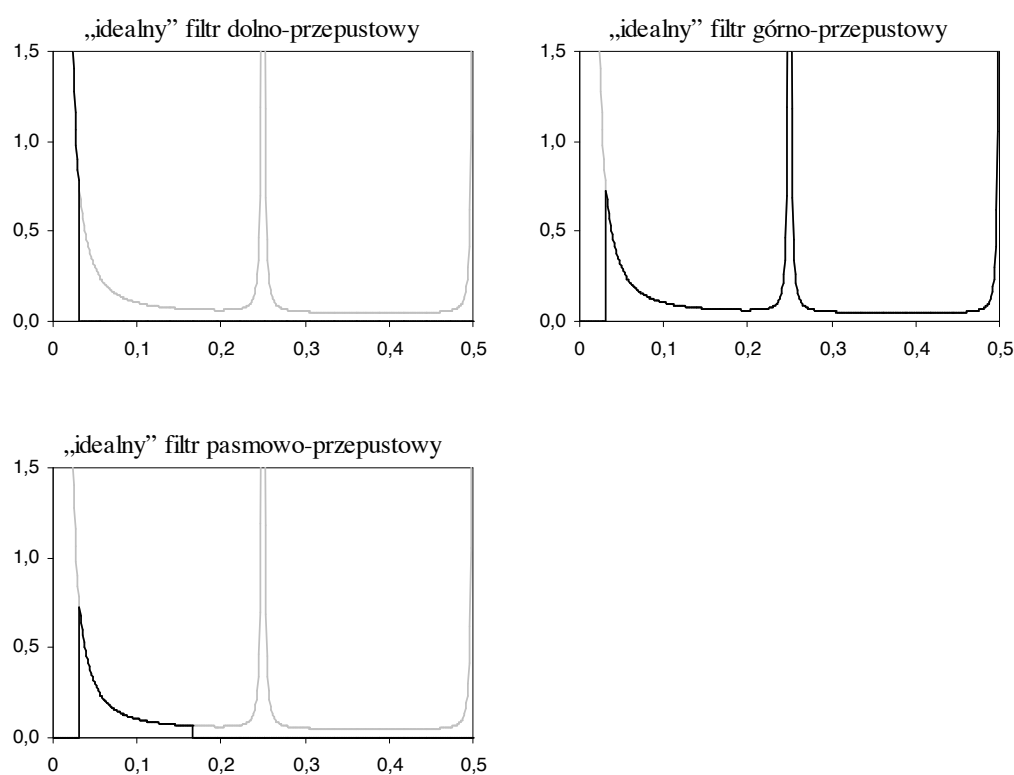
mocy danego filtra. Przykładowo w przypadku „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego spektrum mocy składowej cyklicznej przyjmuje postać:

$$S_{y^c}(\omega) = |G_B(\omega)|^2 S_y(\omega) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.66)$$

gdzie $|G_B(\omega)|^2$ jest funkcją przenoszenia mocy „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego.

Dla każdego filtra „idealnego” funkcja ta pokrywa się z jego wzmocnieniem.

Rysunek 2.7. Wpływ „idealnych” filtrów częstotliwościowych na pseudospektrum mocy wejściowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów odnoszą się do wartości przyjmowanych przez (pseudo)spektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

Na zakończenie rozważań na temat „idealnych” filtrów częstotliwościowych warto wspomnieć o związku wymienionych narzędzi z dynamicznym współczynnikiem korelacji $\rho_{yx}(\omega)$, a w zasadzie z wynikającym z niego współczynnikiem korelacji w określonym paśmie częstotliwości $\rho_{yx}([\omega_1, \omega_2])$. Przypuśćmy, że mamy do czynienia z dwoma

komponentami cyklicznymi, jeden z nich wynika z zastosowania „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego $B(L)$, o dolnej i górnej częstotliwości ucięcia $\underline{\omega}$ i $\bar{\omega}$, do procesu $\{y_t\}$, natomiast drugi jest wynikiem zastosowania tego samego „idealnego” filtra $B(L)$ do procesu $\{x_t\}$. Wówczas współczynnik korelacji pomiędzy komponentami $x_t^c = B(L)x_t$ i $y_t^c = B(L)y_t$ jest równy współczynnikowi korelacji pomiędzy procesem $\{x_t\}$ i $\{y_t\}$ w paśmie częstotliwości $[-\bar{\omega}, -\underline{\omega}] \cup [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ (por. Croux et al. (1999), s. 8):

$$\text{corr}(y_t^c, x_t^c) = \rho_{yx}([\underline{\omega}, \bar{\omega}]). \quad (2.67)$$

Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono teoretyczne aspekty analizy szeregów czasowych w dziedzinie częstotliwości. Metody tego typu opierają się na założeniu, że zmienne ekonomiczne mogą być traktowane jako realizacje procesów stochastycznych. Pokazano, że analiza spektralna odnosi się w głównej mierze do zmiennych spełniających warunki stacjonarności, aczkolwiek możliwe jest wykorzystanie metod spektralnych również do zmiennych niestacjonarnych. Metody analizy spektralnej umożliwiają dokonywanie dekompozycji zmiennych ekonomicznych na poszczególne składowe, które powinny być rozumiane jako komponenty obrazujące zachowanie się danej zmiennej w długim, średnim oraz krótkim okresie, nadając tym samym ekonomiczną interpretację poszczególnym składowym szeregu czasowego. Kluczową rolę w procesie dekompozycji szeregu czasowego odgrywają odpowiednie filtry, które w każdym przypadku mają na celu wyizolowanie z badanej zmiennej komponentu obrazującego wahania o określonym charakterze. Zatem dzięki wykorzystaniu odpowiednich filtrów można dokonywać m.in. ekstrakcji komponentów obrazujących wahania o charakterze koniunkturalnym. Z kolei dzięki metodom analizy cross-spektralnej możliwym jest poddawanie uzyskanych komponentów o danej charakterystyce częstotliwościowej porównaniu i ocenie np. pod kątem synchronizacji wahań koniunkturalnych w różnych gospodarkach, czy też pod kątem badania współzależności poszczególnych zmiennych ekonomicznych w danej gospodarce w założonym paśmie częstotliwości, co m.in. może stanowić metodę wnioskowania na temat stylizowanych faktów o koniunkturze w danej gospodarce.

3

Pomiar cyklu koniunkturalnego w skończonej próbie obserwacji

Wprowadzenie

W większości przypadków zmienne, które obrazują fluktuacje koniunkturalne nie są bezpośrednio obserwowalne na podstawie danych statystycznych. Innymi słowy interesujące badacza wahania cykliczne pozostają zazwyczaj „ukryte” w danych statystycznych. Tym samym w skończonych próbach obserwacji, a więc na bazie obserwowalnych szeregów czasowych, takich jak np. realny PKB, estymacja zmiennej obrazującej kształtowanie się wahań cyklicznych, które są utożsamiane z fluktuacjami koniunkturalnymi, sprowadza się do wykorzystania odpowiedniej metody estymacji. Podobnie w skończonych próbach obserwacji analiza własności oraz współzależności oszacowanych zmiennych cyklicznych w dziedzinie częstotliwości wymaga zastosowania odpowiednich metod estymacji. W poprzednim rozdziale przedstawiono teoretyczne rozważania na temat metod pomiaru i analizy własności wahań koniunkturalnych. Przedmiotem zainteresowania w dalszej części są metody ekonometryczne, które są wykorzystywane do tych celów w przypadku skończonych prób obserwacji.

Struktura rozdziału jest następująca. W części 3.1. omówiono metody estymacji dotyczące analizy spektralnej i cross-spektralnej. Część 3.2. przedstawia aproksymacje filtrów do dekompozycji typu „trend-cykl”. Część 3.3. skupia się na modelach strukturalnych, które podobnie do filtrów omówionych w części 3.2. służą do dekompozycji szeregu czasowego na komponent trendu i komponent cykliczny. Rozdział kończy podsumowanie.

3.1. Analiza spektralna i cross-spektralna – estymacja

W rozdziale 2 przedstawiono m.in. zagadnienia związane z wyznaczaniem spektrum mocy dla słabo stacjonarnego procesu stochastycznego typu ARMA oraz pseudospektrum mocy dla niestacjonarnego procesu typu ARIMA. Tym samym prezentowana w rozdziale 2

metoda wyznaczania spektrum mocy ma zastosowanie jedynie w przypadku, gdy znany jest proces stochastyczny generujący dane (*ang. data generating process*). Gdy próba obserwacji jest skończona, tzn. w przypadku obserwowalnego szeregu czasowego $\{y_t\}_{t=1}^T$, dla którego nie jest znany proces generujący dane, wyznaczenie spektrum mocy procesu, którego realizację stanowi szereg y_t , wiąże się z zastosowaniem odpowiedniej metody estymacji.

Istnieją dwa podejścia do estymacji spektrum mocy w przypadku skończonej próby obserwacji szeregu czasowego y_t . Pierwszym z nich jest metoda estymacji parametrycznej (*ang. parametric estimation*), która polega na dopasowaniu do analizowanego szeregu czasowego odpowiedniego modelu będącego procesem typu ARMA bądź ARIMA – w zależności od tego, czy badany szereg czasowy jest stacjonarny, czy nie. Naturalnie estymacja spektrum mocy powinna dotyczyć zmiennych stacjonarnych, ponieważ definicja spektrum mocy jest ściśle związana z procesami stochastycznymi, które charakteryzuje ta własność. W przypadku zmiennych niestacjonarnych, gdzie spektrum mocy nie jest dobrze zdefiniowane, estymacja prowadzi do uzyskania estymatora pseudospektrum mocy. W celu określenia, czy analizowany szereg czasowy jest stacjonarny, czy też nie, należy przeprowadzić test pierwiastka jednostkowego (*ang. unit root test*), na przykład test ADF (por. Dickey i Fuller (1979)) i test stacjonarności, na przykład test KPSS (por. Kwiatkowski et al. (1992)), co tym samym prowadzi do określenia stopnia integracji badanej zmiennej. Kwestia związana z doбором odpowiedniego rzędu opóźnień wielomianu autoregresyjnego i wielomianu średniej ruchomej modelu ARMA opisującego szereg czasowy y_t bądź szereg zróżnicowany, jeśli szereg y_t jest przyrosto-stacjonarny, wiąże się z kolei z analizą tzw. funkcji autokorelacji z próby – SACF (*ang. sample autocorrelation function*) i funkcji autokorelacji cząstkowej z próby – SPACF (*ang. sample partial autocorrelation function*)³⁶. Ważną rolę w doborze rzędu opóźnień odgrywają również testy diagnostyczne oszacowanego modelu pod kątem weryfikacji hipotezy o braku autokorelacji składnika losowego, czyli sprawdzenia czy jest spełnione założenie, że składnik losowy ε_t jest realizacją procesu białego szumu. Pomocne przy doborze rzędu opóźnień modelu mogą być również kryteria informacyjne typu AIC, SIC,

³⁶ Funkcja SACF i SPACF zostały opisane w dalszej części (por. s. 70). Dobór rzędu opóźnień modelu na podstawie analizy tych funkcji odpowiada etapowi identyfikacji w podejściu do modelowania ARIMA zaproponowanemu przez prekursorów współczesnej analizy szeregów czasowych – George’a Boxa i Gwilyma Jenkinsa (por. Box i Jenkins (1983)). Analiza funkcji SACF i SPACF polega na porównaniu ich przebiegu z kształtowaniem się funkcji ACF i PACF procesów stochastycznych będących potencjalnymi modelami analizowanego szeregu czasowego i tym samym znalezienia rzędu opóźnień wielomianu AR i wielomianu MA procesu będącego relatywnie najlepszym modelem obserwowalnego szeregu czasowego.

FPE czy HQ³⁷. Oszacowania parametrów modelu opisującego szereg czasowy y_t są natomiast uzyskiwane metodą największej wiarygodności (por. Hamilton (1994), s. 117). Gdy znane są oszacowania parametrów, można następnie wyznaczyć parametryczny estymator spektrum mocy procesu generującego szereg czasowy y_t . Odbywa się to poprzez podstawienie uzyskanych oszacowań parametrów do równania spektrum mocy procesu będącego modelem szeregu czasowego y_t . Podejście parametryczne do estymacji spektrum mocy jest związane z ryzykiem błędnej specyfikacji modelu, co w konsekwencji może prowadzić do błędnej estymacji spektrum mocy procesu, który wygenerował analizowany szereg czasowy y_t . Warto jednak podkreślić, że nawet w przypadku błędnej specyfikacji modelu, jeżeli autokowariancje dopasowanego do danych modelu są bliskie autokowariancji rzeczywistego modelu generującego dane, metoda estymacji parametrycznej spektrum mocy może zapewnić uzyskanie dobrego estymatora (por. Hamilton (1994), s. 165).

Drugim podejściem do estymacji spektrum mocy na podstawie obserwowalnej zmiennej są metody estymacji nieparametrycznej (*ang. nonparametric estimation*), które prowadzą do uzyskania estymatora spektrum mocy bez potrzeby założenia *a priori* odnośnie procesu generującego dane. Estymacja nieparametryczna spektrum mocy procesu generującego obserwowalny szereg czasowy y_t bazuje na estymatorach autokowariancji z próby (*ang. sample autocovariances*). Estymator autokowariancji γ_k procesu generującego szereg czasowy $\{y_t\}_{t=1}^T$ przy danym opóźnieniu k jest oznaczany jako $\hat{\gamma}_k$ i przyjmuje postać:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1+k}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.1)$$

gdzie $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t$ stanowi estymator średniej μ procesu generującego dane szeregu y_t . Naturalnie estymatory autokowariancji, tak jak autokowariancje procesu generującego dane, spełniają własność symetryczności, tzn. $\hat{\gamma}_{-k} = \hat{\gamma}_k$. Z kolei estymator współczynnika autokorelacji ρ_k procesu generującego szereg czasowy $\{y_t\}_{t=1}^T$ przy danym opóźnieniu k jest oznaczany jako $\hat{\rho}_k$ i przyjmuje postać:

³⁷ AIC – kryterium informacyjne Akaike, SIC – kryterium informacyjne Schwarza, FPE – kryterium informacyjne *final prediction error*, HQ – kryterium informacyjne Hannana-Quinna.

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \text{ dla } k = 0, \pm 1, \dots, \pm(T-1). \quad (3.2)$$

Tym samym na podstawie ciągu empirycznych autokowariancji $\{\hat{\gamma}_k\}_{k=-(T-1)}^{T-1}$ zdefiniowany jest ciąg empirycznych współczynników autokorelacji $\{\hat{\rho}_k\}_{k=-(T-1)}^{T-1}$, czyli wspomniana wcześniej funkcja SACF³⁸, która również spełnia warunek symetryczności ($\hat{\rho}_{-k} = \hat{\rho}_k$) i przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$ ³⁹. Wykorzystując empiryczny ciąg autokowariancji można wyznaczyć estymator spektrum mocy procesu generującego szereg czasowy $\{y_t\}_{t=1}^T$. Estymator spektrum mocy uzyskany przy wykorzystaniu empirycznych autokowariancji $\hat{\gamma}_k$ nosi nazwę periodogramu z próby (*ang. sample periodogram*) i przyjmuje postać:

$$I_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k} = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{T-1} \hat{\gamma}_k \cos(\omega k) \right] \text{ dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.3)$$

Periodogram $I_y(\omega)$ przyjmuje nieujemne wartości rzeczywiste i jest funkcją parzystą, co oznacza, że dla celów analitycznych można ograniczyć dziedzinę częstotliwości do przedziału $[0, \pi]$. Wartości periodogramu są zazwyczaj obliczane dla dyskretnych częstotliwości

³⁸ Funkcja SPACF jest uzyskiwana bezpośrednio na podstawie funkcji SACF. Współczynniki funkcji SPACF, będące estymatorami współczynników funkcji PACF i oznaczane jako $\hat{r}_{kk}$ dla $k = 1, 2, \dots, T-1$ są dane poprzez zapis macierzowy postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{k1} \\ \hat{r}_{k2} \\ \vdots \\ \hat{r}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_k \end{bmatrix}.$$

Współczynnik dla $k=0$ jest równy korespondującemu współczynnikowi funkcji SACF, tzn. $\hat{r}_{00} = \hat{\rho}_0 = 1$. Jak łatwo zauważyć, dla $k=1$ prawdą jest również, że $\hat{r}_{11} = \hat{\rho}_1$. Podobnie jak funkcja SACF, funkcja SPACF jest parzysta, tzn. spełnia warunek symetryczności ($\hat{r}_{-kk} = \hat{r}_{kk}$). Ponadto funkcja SPACF przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$, tak jak funkcja SACF.

³⁹ Dla każdego z opóźnień k ujemna i dodatnia wartość krytyczna, przy poziomie istotności α , dla współczynników funkcji SACF oraz SPACF wynosi odpowiednio $U_{\alpha/2}/\sqrt{T}$ i $U_{1-\alpha/2}/\sqrt{T}$, gdzie $U_{\alpha/2}$ i $U_{1-\alpha/2}$ oznaczają punkty standardowego rozkładu normalnego, $U \sim N(0, 1)$, odpowiednio dla prawdopodobieństwa $\alpha/2$ i $1-\alpha/2$. Współczynnik funkcji S(P)ACF dla danego opóźnienia k , który przekracza wartość krytyczną, czyli jest co do modułu większy niż dodatnia wartość krytyczna, jest statystycznie istotny, tzn. że przy poziomie istotności α istnieje podstawa do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o tym, że współczynnik ten jest równy zero.

Fouriera ω_j , tzn. $I_y(\omega_j) = 2\pi^{-1}[\hat{\gamma}_0 + 2\sum_{k=1}^{T-1}\hat{\gamma}_k \cos(\omega_j k)]$, gdzie $\omega_j = 2\pi j/T = 2\pi/\tau_j$ dla $j=1,2,\dots,T/2$ w przypadku T parzystego lub dla $j=1,2,\dots,(T-1)/2$ w przypadku T nieparzystego. Wielkość $\tau_j = T/j$ oznacza okres cyklu powiązanego z j -tą częstotliwością ω_j . Zatem okres najdłuższego cyklu możliwego do zidentyfikowania na podstawie T -elementowej próby obserwacji szeregu czasowego y_t wynosi $\tau_1 = T$. Naturalnie dyskretne częstotliwości znormalizowane przyjmują postać $f_j = \omega_j/2\pi = j/T = 1/\tau_j$. Przy estymacji spektrum mocy za pomocą periodogramu, zakładając poziom istotności α , $100 \cdot (1-\alpha)\%$ przedział ufności dla spektrum mocy jest dany jako:

$$\frac{2I_y(\omega_j)}{\chi^2_2(1-\alpha/2)} \leq S_y(\omega_j) \leq \frac{2I_y(\omega_j)}{\chi^2_2(\alpha/2)}, \quad (3.4)$$

gdzie $\chi^2_2(\alpha/2)$ i $\chi^2_2(1-\alpha/2)$ oznaczają punkty rozkładu χ^2 o 2 stopniach swobody odpowiednio dla prawdopodobieństwa $\alpha/2$ i $1-\alpha/2$. Periodogram jest asymptotycznie nieobciążonym estymatorem spektrum mocy, ale nie jest estymatorem zgodnym, tzn. że jego wariancja nie zmniejsza się wraz ze wzrostem dostępnej liczby obserwacji. W celu zredukowania wariancji periodogramu dopuszcza się jego wygładzanie, jednakże odbywa się to kosztem utraty nieobciążoności estymatora.

Rozróżnia się dwa podejścia do estymacji wygładzonej postaci periodogramu, pierwsze z nich zakłada wygładzanie w dziedzinie częstotliwości (*ang. smoothing in the frequency domain*), natomiast drugie wygładzanie w dziedzinie czasu (*ang. smoothing in the time domain*), a dokładniej w dziedzinie opóźnień (*ang. smoothing in the lag domain*). Zgodnie z pierwszym podejściem istnieje możliwość estymacji spektrum mocy dla częstotliwości ω_j za pomocą pewnej średniej ważonej wartości periodogramu w sąsiedztwie ω_j . Wagi, które będą wykorzystane do estymacji są określone mianem jądra spektralnego, bądź też okna spektralnego, i są oznaczane jako κ_h dla $h=0,\pm 1,\dots,\pm H$. Parametr H określa tu ile częstotliwości jest wykorzystywanych przy estymacji i nosi nazwę szerokości pasma przenoszenia (*ang. bandwidth*), a więc określa szerokość tzw. okna spektralnego. Wagi κ_h są symetryczne, $\kappa_{-h} = \kappa_h$, oraz sumują się do jedności, tzn. $\sum_{h=-H}^H \kappa_h = 1$. Estymator spektrum mocy dla częstotliwości ω_j uzyskany za pomocą okna spektralnego κ_h przyjmuje postać symetrycznej średniej ruchomej:

$$\hat{S}_y(\omega_j) = \sum_{h=-H}^H \kappa_h I_y(\omega_{j+h}). \quad (3.5)$$

Należy dodać, że wartości $\hat{S}_y(\omega_j)$ są obliczane dla tej samej ilości dyskretnych częstotliwości Fouriera, co w przypadku korespondującego periodogramu, ponieważ przy wygładzaniu uwzględnia się to, że spektrum mocy jest okresową funkcją ω_j , tzn. $S_y(\omega_j + 2\pi k) = S_y(\omega_j)$ gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Przy estymacji spektrum mocy za pomocą $\hat{S}_y(\omega_j)$, zakładając poziom istotności α , $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ przedział ufności dla spektrum mocy jest dany jako:

$$\frac{v \hat{S}_y(\omega_j)}{\chi_v^2(1 - \alpha/2)} \leq S_y(\omega_j) \leq \frac{v \hat{S}_y(\omega_j)}{\chi_v^2(\alpha/2)}, \quad (3.6)$$

gdzie $\chi_v^2(\alpha/2)$ i $\chi_v^2(1 - \alpha/2)$ oznaczają punkty rozkładu χ^2 o $v = 2 / \sum_{h=-H}^H \kappa_h^2$ stopniach swobody odpowiednio dla prawdopodobieństwa $\alpha/2$ i $1 - \alpha/2$. W celu estymacji spektrum mocy na podstawie metody wygładzania periodogramu w dziedzinie częstotliwości Hamilton (1994) sugeruje wykorzystanie wag postaci:

$$\kappa_h = \begin{cases} (H + 1 - |h|) / (H + 1)^2 & \text{dla } |h| \leq H, \\ 0 & \text{dla } |h| > H. \end{cases} \quad (3.7)$$

Powyższe okno spektralne jest nazywane oknem trójkątnym (*ang. triangular window*). Powszechnie wykorzystywanym oknem spektralnym jest również tzw. okno Daniella, które jest nazywane oknem prostokątnym (*ang. rectangular window*). Wagi κ_h przyjmują wówczas postać:

$$\kappa_h = \begin{cases} 1/(2H + 1) & \text{dla } |h| \leq H, \\ 0 & \text{dla } |h| > H. \end{cases} \quad (3.8)$$

Zgodnie z podejściem wygładzania periodogramu w dziedzinie opóźnień estymator spektrum mocy jest dany jako:

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-K}^K w_k \hat{\gamma}_k e^{-i\omega k} = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^K w_k \hat{\gamma}_k \cos(\omega k) \right] \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.9)$$

gdzie wagi w_k dla $k = 0, \pm 1, \dots, \pm K$ są określone mianem okna opóźnień, natomiast parametr K określa ilość autokowariancji wykorzystywanych przy estymacji i nosi nazwę opóźnienia ucięcia (*ang. truncation lag*), a więc określa szerokość okna opóźnień⁴⁰. Parametr K bywa również nazywany szerokością pasma przenoszenia. Wagi w_k są symetryczne, $w_{-k} = w_k$, oraz spełniają warunek $w_0 = 1$. Warto zauważyć, że przy estymacji spektrum mocy na podstawie metody wygładzania w dziedzinie opóźnień uzyskiwany jest estymator dla częstotliwości z przedziału $[-\pi, \pi]$, a nie tylko dla dyskretnych częstotliwości Fouriera, tak jak miało to miejsce w przypadku periodogramu oraz jego wygładzonej postaci w dziedzinie częstotliwości. Przy estymacji spektrum mocy za pomocą $\hat{S}_y(\omega)$, zakładając poziom istotności α , $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ przedział ufności dla spektrum mocy jest dany jako:

$$\frac{v \hat{S}_y(\omega)}{\chi_v^2(1 - \alpha/2)} \leq S_y(\omega) \leq \frac{v \hat{S}_y(\omega)}{\chi_v^2(\alpha/2)}, \quad (3.10)$$

gdzie $\chi_v^2(\alpha/2)$ i $\chi_v^2(1 - \alpha/2)$ oznaczają punkty rozkładu χ^2 o $v = 2T / \sum_{k=-K}^K w_k^2$ stopniach swobody odpowiednio dla prawdopodobieństwa $\alpha/2$ i $1 - \alpha/2$. Najprostszym oknem opóźnień jest tzw. okno prostokątne, zwane również oknem obcięty (*ang. truncated window*), którego wagi przyjmują postać:

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } |k| \leq K, \\ 0 & \text{dla } |k| > K. \end{cases} \quad (3.11)$$

Okno prostokątne powoduje występowanie tzw. efektu Gibbsa (*ang. Gibbs effect*), ponieważ działa na zasadzie bezpośredniego ucięcia nieskończonej odpowiedzi impulsowej. Efekt ten polega na „oscylacyjnym” charakterze przebiegu estymatora spektrum mocy i stanowi własność niepożądaną, ponieważ wnioskowanie na podstawie tego typu estymatora może prowadzić do identyfikacji jako istotnych takich cykli, które w danych nie występują. Tym

⁴⁰ Autokowariancje o opóźnieniu wyższym niż K nie są uwzględniane przy estymacji spektrum mocy na podstawie metody wygładzania w dziedzinie opóźnień, co wydaje się być dobrym rozwiązaniem, ponieważ autokowariancje o wysokich opóźnieniach charakteryzuje niska wiarygodność z uwagi na to, że w przypadku skróconej próby obserwacji, są one szacowane na podstawie krótkich próbek.

samym preferowanym rozwiązaniem w przypadku estymacji spektrum mocy na podstawie wygładzania periodogramu w dziedzinie opóźnień jest zastosowanie okna, które nie powoduje występowania efektu Gibbsa. Wśród okien tego typu można wyróżnić okno Bartletta, jak również jego zmodyfikowaną wersję, okno Parzena, czy również rodzinę okien Blackmana-Tukeya. Przykładowo wagi zmodyfikowanego okna Bartletta są dane jako:

$$w_k = \begin{cases} 1 - |k|/(K+1) & \text{dla } |k| \leq K, \\ 0 & \text{dla } |k| > K. \end{cases} \quad (3.12)$$

Wagi okna Parzena są natomiast dane jako:

$$w_k = \begin{cases} 1 - 6(k/K)^2 + 6(|k|/K)^3 & \text{dla } |k| \leq K/2, \\ 2(1 - |k|/K)^3 & \text{dla } K/2 \leq |k| \leq K, \\ 0 & \text{dla } |k| > K. \end{cases} \quad (3.13)$$

Wygładzanie periodogramu zarówno w dziedzinie częstotliwości, jak i w dziedzinie opóźnień prowadzi do redukcji jego wariancji i sprawia, że interpretacja spektrum mocy staje się łatwiejsza w związku z gładkim przebiegiem estymatorów spektrum mocy. Hamilton (1994) pokazuje, że obydwa podejścia do estymacji spektrum mocy są sobie równoważne. Redukcja wariancji periodogramu odbywa się kosztem wzrostu obciążenia uzyskanego estymatora. Balans pomiędzy wariancją i obciążeniem jest sterowany poprzez dobór szerokości okna spektralnego, czy też okna opóźnień, w zależności od rozpatrywanej metody estymacji. Jeżeli chodzi o dobór szerokości okien spektralnych i opóźnień, to sugeruje się, aby parametr H w przypadku okien spektralnych, podobnie jak parametr K w przypadku okien opóźnień, był dobierany indywidualnie przez badacza. Może on wtedy porównać uzyskane estymatory spektrum mocy dla różnych wartości tych parametrów, a następnie wybrać ten parametr, który według jego subiektywnej oceny odpowiada najbardziej wiarygodnemu estymatorowi (por. Hamilton (1994), s. 167). Istnieje również podejście automatycznego wyboru szerokości okna opóźnień na podstawie liczby obserwacji w próbie. Zgodnie z podejściem Chatfielda (1996) parametr określający opóźnienie ucięcia w przypadku danego okna opóźnień może być dobrany na bazie reguły $K = \text{int}(2\sqrt{T})$, gdzie T określa liczbę obserwacji w próbie analizowanego szeregu czasowego (por. Chatfield (1996), s. 115).

W przypadku analizy cross-spektralnej w skończonych próbach obserwacji, tzn. gdy dane są dwa szeregi czasowe $\{y_t\}_{t=1}^T$ i $\{x_t\}_{t=1}^T$, istnieje również podejście estymacji parametrycznej i nieparametrycznej. W przypadku estymacji parametrycznej procedura postępowania sprowadza się do estymacji modelu wektorowej autoregresji (VAR), na bazie którego dokonywane jest parametryczne oszacowanie miar takich jak koherencja, korelacja dynamiczna, wzmocnienie i przesunięcie fazowe⁴¹. Natomiast przy estymacji nieparametrycznej, analogicznie do analizy spektralnej, wyróżnia się dwa podejścia: wygładzanie cross-periodogramu w dziedzinie częstotliwości oraz wygładzanie cross-periodogramu w dziedzinie opóźnień. Przy estymacji cross-spektrum mocy za pomocą cross-periodogramu postępuje się tak samo jak w przypadku estymacji spektrum mocy za pomocą periodogramu, tzn. należy zamienić ciąg teoretycznych cross-kowariancji przez ciąg empiryczny, wykorzystując w tym celu estymator cross-kowariancji pomiędzy szeregami czasowymi $\{x_t\}_{t=1}^T$ i $\{y_t\}_{t=1}^T$:

$$\hat{\gamma}_k^{yx} = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=1+k}^T (y_t - \bar{y})(x_{t-k} - \bar{x}) & \text{dla } k = 0, 1, \dots, T-1, \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T+k} (y_t - \bar{y})(x_{t-k} - \bar{x}) & \text{dla } k = -1, -2, \dots, -(T-1), \end{cases} \quad (3.14)$$

gdzie $\bar{y} = T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t$ i $\bar{x} = T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t$ ⁴². Cross-periodogram pomiędzy szeregami czasowymi $\{x_t\}_{t=1}^T$ i $\{y_t\}_{t=1}^T$ jest wówczas dany jako:

$$I_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_k^{yx} e^{-i\omega k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_k^{yx} \cos(\omega k) - i \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_k^{yx} \sin(\omega k) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.15)$$

⁴¹ Opis tej procedury został zawarty w części 3.3.1., która jest poświęcona modelom klasy VAR.

⁴² Wykorzystując estymator cross-kowariancji oraz estymatory wariancji zmiennej y_t i x_t uzyskuje się estymator współczynnika cross-korelacji dla danego opóźnienia $k = 0, \pm 1, \dots, \pm(T-1)$, który przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$ i jest dany jako $\hat{\rho}_k^{yx} = \hat{\gamma}_k^{yx} / \sqrt{\hat{\gamma}_0^y \hat{\gamma}_0^x}$, gdzie estymatory wariancji zmiennych y_t i x_t są kolejno dane jako $\hat{\gamma}_0^y = T^{-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2$ i $\hat{\gamma}_0^x = T^{-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2$. Ciąg empirycznych współczynników cross-korelacji $\{\hat{\rho}_k^{yx}\}_{k=-(T-1)}^{T-1}$ jest określany mianem funkcji cross-korelacji z próby – SCCF (*ang. sample cross-correlation function*). Warto zauważyć, że przesunięcia $k > 0$ wskazują, że zmienna x_t wyprzedza zmienną y_t , natomiast przesunięcia $k < 0$ informują o tym, że zmienna x_t opóźnia się w stosunku do zmiennej y_t . Dla każdego z opóźnień k ujemna i dodatnia wartość krytyczna, przy poziomie istotności α , dla współczynnika cross-korelacji jest taka sama jak w przypadku funkcji SACF oraz SPACF.

Podobnie do periodogramu jest on zazwyczaj obliczany dla dyskretnych częstotliwości Fouriera ω_j , a do celów analitycznych dziedzina częstotliwości może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$. Cross-periodogram $I_{yx}(\omega)$ przyjmuje wartości zespolone. Część rzeczywista i ujemna część urojona cross-periodogramu, tzn. wielkości $C_{yx}(\omega) = 2\pi^{-1} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_k^{yx} \cos(\omega k)$ oraz $Q_{yx}(\omega) = 2\pi^{-1} \sum_{k=-(T-1)}^{T-1} \hat{\gamma}_k^{yx} \sin(\omega k)$, stanowią estymatory kospektrum mocy i kwadraturowego spektrum mocy z próby. W celu estymacji statystyk cross-spektralnych, tj. wzmocnienia, przesunięcia fazowego, koherencji i dynamicznego współczynnika korelacji, wymaga się zastosowania wygładzonych postaci kospektrum mocy, kwadraturowego spektrum mocy oraz spektrum mocy zmiennej y_t oraz x_t . Estymacja kospektrum mocy i kwadraturowego spektrum mocy na podstawie metody wygładzania w dziedzinie częstotliwości odbywa się w analogiczny sposób jak w przypadku estymacji spektrum mocy przy wykorzystaniu danego okna spektralnego, por. wzór (3.5). Tak samo jak w przypadku estymacji spektrum mocy przy wygładzaniu uwzględnia się to, że kospektrum mocy i kwadraturowe spektrum mocy są okresowymi funkcjami częstotliwości ω_j . Przy estymacji na podstawie metody wygładzania w dziedzinie opóźnień postępuje się natomiast podobnie jak w przypadku estymacji spektrum mocy na podstawie tej metody przy wykorzystaniu danego okna opóźnień, por. wzór (3.9). Dobór parametrów określających szerokość danego okna spektralnego czy też okna opóźnień odbywa się na podstawie tych samych kryteriów, co przy estymacji spektrum mocy. Estymacja wzmocnienia, przesunięcia fazowego, koherencji i dynamicznego współczynnika korelacji na bazie wygładzonych danych metodą kospektrum mocy i kwadraturowego spektrum mocy odbywa się natomiast w tak samo jak w przykładzie przedstawionym w części 2.3., czyli zgodnie z definicją danej statystyki cross-spektralnej. Dla uzyskanych w ten sposób statystyk cross-spektralnych możliwe jest wyznaczenie korespondujących wartości krytycznych i przedziałów ufności. Wartość krytyczna koherencji przy poziomie istotności α dla danej częstotliwości ω wynosi⁴³:

$$\hat{K}_{yx}^2(\omega)^* = \frac{2F_{2,v-2}(1-\alpha)}{v-2 + 2F_{2,v-2}(1-\alpha)}, \quad (3.16)$$

⁴³ Oczywiście w przypadku estymatorów uzyskanych na podstawie metody wygładzania w dziedzinie częstotliwości, we wzorze (3.16) występują dyskretne częstotliwości Fouriera ω_j . Podobna uwaga dotyczy wzorów (3.17)-(3.18).

gdzie $F_{2,v-2}(1-\alpha)$ oznacza punkt rozkładu F -Snedecora o 2 i $v-2$ stopniach swobody przypadający dla prawdopodobieństwa $1-\alpha$. Naturalnie liczba stopni swobody v jest określona w sposób adekwatny do wykorzystanej przy estymacji metody wygładzania, w sposób analogiczny jak miało to miejsce przy estymacji spektrum mocy. Wartość koherencji dla danej częstotliwości, która znajduje się powyżej wartości krytycznej jest statystycznie istotna, tzn. że przy poziomie istotności α istnieje podstawa do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o tym, że wartość koherencji dla danej częstotliwości jest równa zero. Wstęgi $100 \cdot (1-\alpha)\%$ przedziału ufności dla wzmocnienia są dane przez formułę:

$$\hat{G}_{yx}(\omega) \pm \hat{G}_{yx}(\omega) \sqrt{\frac{2}{v-2} \cdot F_{2,v-2}(1-\alpha) \cdot \frac{1 - \hat{K}_{yx}^2(\omega)}{\hat{K}_{yx}^2(\omega)}}, \quad (3.17)$$

gdzie $\hat{G}_{yx}(\omega)$ jest estymatorem wzmocnienia, natomiast $\hat{K}_{yx}^2(\omega)$ oznacza estymator koherencji, który został uzyskany na podstawie danej metody wygładzania. Z kolei wstęgi $100 \cdot (1-\alpha)\%$ przedziału ufności dla przesunięcia fazowego są dane jako:

$$\hat{\phi}_{yx}(\omega) \pm \sin^{-1} \sqrt{\frac{2}{v-2} \cdot F_{2,v-2}(1-\alpha) \cdot \frac{1 - \hat{K}_{yx}^2(\omega)}{\hat{K}_{yx}^2(\omega)}}, \quad (3.18)$$

gdzie $\hat{\phi}_{yx}(\omega)$ jest estymatorem przesunięcia fazowego, uzyskanym na podstawie danej metody wygładzania. Przedział ufności dla przesunięcia fazowego nie jest dobrze zdefiniowany w przypadku, gdy koherencja dla danej częstotliwości nie jest istotnie różna od zera. Wówczas wyrażenie pod pierwiastkiem we wzorze (3.18) przyjmuje wartości większe od jedności, co tym samym oznacza, że funkcja $\sin^{-1}$ nie jest wówczas zdefiniowana. Tym samym przy częstotliwości, gdzie koherencja pozostaje nieistotna statystycznie, przedział ufności dla przesunięcia fazowego nie istnieje. Dla estymatora dynamicznego współczynnika korelacji dla danej częstotliwości ω – gdy mowa o estymacji na podstawie wygładzania w dziedzinie opóźnień, lub ω_j – gdy mowa o estymacji na podstawie wygładzania w dziedzinie częstotliwości, czyli dla statystyki $\hat{\rho}_{yx}(\omega)$ lub $\hat{\rho}_{yx}(\omega_j)$, korespondujące wartości krytyczne (dodatnie i ujemne) są uzyskiwane analogicznie do przypadku funkcji SACF. Zatem współczynnik dla danej częstotliwości, który przekracza wartość krytyczną, czyli jest co do modułu większy niż dodatnia wartość krytyczna, jest statystycznie istotny, tzn. że przy

poziomie istotności α istnieje podstawa do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o tym, że współczynnik ten jest równy zero.

3.2. Aproksymacje filtrów do dekompozycji typu „trend-cykl”

W tej części przedstawiono aproksymacje filtrów, które służą do dekompozycji szeregu czasowego na składową trendu i składową cykliczną.

3.2.1. Filtr Hodricka-Prescotta

Najpowszechniej wykorzystywanym narzędziem do przeprowadzania dekompozycji typu „trend-cykl” jest metoda filtra Hodricka-Prescotta (1997)⁴⁴. Filtr Hodricka-Prescotta (filtr HP), który umożliwia estymację komponentu trendu wejściowego szeregu czasowego, ma zbliżone działanie do filtra typu dolno-przepustowego. Komponent cykliczny wynikający z zastosowania filtra HP jest natomiast składową, która została uzyskana za pomocą filtra o zbliżonym działaniu do filtra typu górno-przepustowego. Przy zastosowaniu filtra HP nie jest wymagane założenie dotyczące procesu generującego dane, niemniej jednak należy pamiętać, że stosowanie tego narzędzia ma sens jedynie w przypadku zmiennych niestacjonarnych (zintegrowanych), ponieważ celem jest estymacja i usunięcie z danych wejściowych trendu stochastycznego. Filtr HP umożliwia estymację trendów stochastycznych na podstawie zmiennych zintegrowanych do drugiego stopnia włącznie. Naturalnie komponenty cykliczne uzyskiwane w ramach dekompozycji filtra HP są zmiennymi stacjonarnymi. Należy również podkreślić, że filtr HP nie jest wrażliwy na obecność składowych deterministycznych w zmiennej wejściowej, a tym samym przed jego zastosowaniem nie jest wymagane usuwanie średniej, dryfu czy też na przykład trendu liniowego. Należy jednak mieć na uwadze, że działanie filtra HP jest zbliżone do filtra górno-przepustowego, a więc jest wymagane, aby filtr stosowano do zmiennych niezawierających wahań sezonowych (szereg czasowy po usunięciu składowej sezonowej lub szereg czasowy obrazujący składową trend-cykl). W przeciwnym wypadku komponent cykliczny wynikający z zastosowania filtra HP będzie zawierał wahania sezonowe. Niech szereg czasowy o skończonej próbie obserwacji $\{y_t\}_{t=1}^T$ będzie zmienną niestacjonarną i pozbawioną wahań sezonowych. Filtr HP umożliwia

⁴⁴ Filtr ten został przedstawiony po raz pierwszy w pracy Hodricka i Prescottta z 1980 r.

przeprowadzenie addytywnej dekompozycji zmiennej y_t na komponent trendu g_t i komponent cykliczny c_t :

$$y_t = g_t + c_t \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, T. \quad (3.19)$$

Estymacja komponentu trendu g_t w ramach filtra HP sprowadza się do rozwiązania problemu poszukiwania minimum:

$$\min_{\{g_t\}_{t=1}^T} \left[\sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\Delta^2 g_t)^2 \right], \quad (3.20)$$

gdzie λ stanowi nieujemny parametr rzeczywisty, zwany parametrem wygładzającym (*ang. smoothing parametr*), który określa stopień „gładkości” trendu⁴⁵. Gdy $\lambda \rightarrow 0$, dopasowanie trendu do obserwowanego szeregu czasowego staje się coraz silniejsze, a w granicznym przypadku $\lambda = 0$ otrzymuje się $g_t = y_t$. W przeciwnym przypadku, czyli gdy $\lambda \rightarrow +\infty$, trend wynikający z zastosowania filtra HP jest taki sam jak deterministyczny trend liniowy dopasowany metodą najmniejszych kwadratów (MNK, *ang. least squares*) do zmiennej y_t . Z warunków pierwszego rzędu dla problemu (3.20) uzyskuje się oznaczony układ T równań liniowych o łącznej liczbie T niewiadomych (układ Cramera)⁴⁶. Rozwiązaniem tego układu jest zmienna $\hat{g}_t$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ stanowiąca estymator komponentu trendu g_t . Zmienna $\hat{c}_t$ będąca estymatorem komponentu cyklicznego c_t jest dana jako $\hat{c}_t = y_t - \hat{g}_t$ dla $t = 1, 2, \dots, T$.

Poniżej przedstawiono zapis macierzowy rozwiązania problemu (3.20). Niech trzy wektory kolumnowe wymiaru $T \times 1$ postaci $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_T]'$, $\mathbf{\hat{g}} = [\hat{g}_1 \ \hat{g}_2 \ \dots \ \hat{g}_T]'$ oraz $\mathbf{\hat{c}} = [\hat{c}_1 \ \hat{c}_2 \ \dots \ \hat{c}_T]'$ spełniają warunek (3.19), tzn. $\mathbf{y} = \mathbf{\hat{g}} + \mathbf{\hat{c}}$. Ponadto niech macierz kwadratowa $\mathbf{L}$ wymiaru $T \times T$ będzie macierzą pierwszych opóźnień (*ang. first order lag matrix*) postaci:

⁴⁵ Szczegółowy opis doboru parametru λ został zawarty w dalszej części (por. s. 82).

⁴⁶ Warunki pierwszego rzędu dla problemu (3.20) uzyskuje się w wyniku przyrównania do zera pochodnych funkcji celu $L = \sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (g_t - 2g_{t-1} + g_{t-2})^2$ kolejno względem g_t dla $t = 1, 2, \dots, T$, tj. $\partial L / \partial g_t = 0$ dla $t = 1, 2, \dots, T$.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Wówczas macierz pierwszych różnic (*ang. first difference matrix*) wymiaru $T \times T$ jest zdefiniowana jako $\Delta \equiv \mathbf{L}\mathbf{L}'(\mathbf{I} - \mathbf{L})$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową wymiaru $T \times T$. Macierz drugich różnic (*ang. second difference matrix*) wymiaru $T \times T$ jest natomiast zdefiniowana jako $\Delta^2 \equiv \mathbf{L}^2(\mathbf{L}^2)'\Delta\Delta$, gdzie $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}\mathbf{L}$ jest macierzą drugich opóźnień (*ang. second order lag matrix*) wymiaru $T \times T$. Następnie możliwe jest zapisanie macierzy kwadratowej wymiaru $T \times T$ danej jako $\Omega = (\Delta^2)'\Delta^2$, która przyjmuje postać:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & & & \dots & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & & & & & & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Wówczas wektory $\hat{\mathbf{g}}$ i $\hat{\mathbf{c}}$, których elementy stanowią estymatory poszukiwanych komponentów trendu i cyklu dla $t = 1, 2, \dots, T$, są kolejno dane jako:

$$\hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{I} + \lambda\Omega)^{-1}\mathbf{y}, \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{y} - (\mathbf{I} + \lambda\Omega)^{-1}\mathbf{y} = (\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \lambda\Omega)^{-1})\mathbf{y}. \quad (3.24)$$

Do celów dalszej analizy zapisano dwie macierze $\hat{\mathbf{G}} = (\mathbf{I} + \lambda\Omega)^{-1}$ i $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I} - (\mathbf{I} + \lambda\Omega)^{-1} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{G}}$ wymiaru $T \times T$. Zarówno estymator komponentu trendu, jak i

cyklu może zostać zapisany w formie średniej ważonej obserwacji wejściowego szeregu czasowego y_t . Dla estymatora trendu $\hat{g}_t$ zapis ten przyjmuje postać:

$$\hat{g}_t = \hat{G}_t(L)y_t, \text{ gdzie } \hat{G}_t(L) = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} L^j \text{ dla } t = 1, 2, \dots, T, \quad (3.25)$$

gdzie wagi $\hat{G}_{j,t}$ stanowią odpowiednie elementy macierzy $\hat{\mathbf{G}}$. Wagi $\hat{G}_{j,t}$ zależą od indeksu t i tym samym podlegają zmianom w czasie, podobnie jak zakres sumowania po j , który również zależy od czasu. Filtr HP jest zatem filtrem asymetrycznym. Jeżeli elementy macierzy $\hat{\mathbf{G}}$ są dane jako g_{th} dla $t = 1, 2, \dots, T$ i $h = 1, 2, \dots, T$, tzn. $\hat{\mathbf{G}} = [g_{th}]$, wówczas wagi filtra HP w zapisie (3.25) są dane jako $\hat{G}_{j,t} = g_{th}$, gdzie $h = t - j$ dla $t = 1, 2, \dots, T$. Zapis typu (3.25) dla estymatora komponentu cyklicznego $\hat{c}_t$ jest analogiczny, przy czym wagi $\hat{C}_{j,t}$ filtra $\hat{C}_t(L) = 1 - \hat{G}_t(L)$ są naturalnie odpowiednimi elementami macierzy $\hat{\mathbf{C}}$. W przypadku filtra HP służącego do estymacji komponentu trendu g_t (filtr typu dolno-przepustowego) spełniony jest warunek sumowalności wag $\hat{G}_{j,t}$ do jedności, tj. $\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} = 1$ dla $t = 1, 2, \dots, T$, co bezpośrednio wynika z sumowalności elementów wierszowych macierzy $\hat{\mathbf{G}}$ do jedności. Elementy kolumnowe macierzy $\hat{\mathbf{G}}$ również spełniają ten warunek. W przypadku estymatora komponentu cyklicznego $\hat{c}_t$, wagi filtra HP (filtr typu górno-przepustowego) sumują się do zera, tzn. $\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{C}_{j,t} = 0$ dla $t = 1, 2, \dots, T$, co wynika z tego, że elementy wierszowe macierzy $\hat{\mathbf{C}}$ sumują się do zera. Elementy kolumnowe macierzy $\hat{\mathbf{C}}$ także sumują się do zera. Ponadto wagi filtra $\hat{C}_t(L)$ są powiązane z wagami filtra $\hat{G}_t(L)$ poprzez relacje $\hat{C}_{0,t} = 1 - \hat{G}_{0,t}$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ i $\hat{C}_{j,t} = -\hat{G}_{j,t}$ dla $j \neq 0$ oraz $t = 1, 2, \dots, T$.

Aby opisać dobór parametru wygładzającego λ dla filtra HP, rozważymy jego zastosowanie do szeregu czasowego y_t o nieskończonej próbie obserwacji, czyli szeregu czasowego postaci $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ (ang. *infinite sample Hodrick-Prescott filter*). Wówczas estymatory komponentu trendu i cyklu mogą zostać zapisane w postaci symetrycznej nieskończonej średniej ruchomej zmiennej y_t (reprezentacja filtra Wienera-Kołmogorowa), tzn. $\hat{g}_t = G(L)y_t$ oraz $\hat{c}_t = C(L)y_t$, gdzie spełniony jest warunek $G(L) + C(L) = 1$. Wielomiany opisujące filtr HP w przypadku szeregu czasowego $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ są dane jako

$G(L) = \left(1 + \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2\right)^{-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G_j L^j$, gdzie $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G_j| < +\infty$ i $G_{-j} = G_j$ oraz
 $C(L) = 1 - G(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j L^j$, gdzie $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |C_j| < +\infty$ i $C_{-j} = C_j$. Naturalnie wagi filtra
 dolno-przepustowego $G(L)$ sumują się do jedności, a wagi filtra górno-przepustowego $C(L)$
 do zera, tzn. $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} G_j = 1$ i $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_j = 0$. Ponadto spełniona jest własność $C_0 = 1 - G_0$ oraz
 $C_j = -G_j$ dla $j \neq 0$. Wzmocnienie danego filtra HP jest zdefiniowane jako transformata
 Fouriera (bez czynnika $1/2\pi$) wielomianu reprezentującego filtr w dziedzinie czasu. W
 przypadku filtra $G(L)$ wzmocnieniem jest parzysta funkcja $G(z)$ dla $z = e^{-i\omega}$, przyjmująca
 wartości rzeczywiste z przedziału $[0,1]$, czyli:

$$G_G(\omega) \equiv G(e^{-i\omega}) = \frac{1}{1 + \lambda(1 - e^{-i\omega})^2(1 - e^{i\omega})^2} = \frac{1}{1 + 4\lambda(1 - \cos(\omega))^2} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.26)$$

Wzmocnienie $G_G(\omega)$ może zostać zapisane równoważnie do (3.26) jako
 $G_G(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} G_j e^{-i\omega j} = G_0 + 2 \sum_{j=1}^{+\infty} G_j \cos(\omega j)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. Naturalnie w przypadku
 wzmocnienia filtra $C(L)$ jest spełniona zależność $G_C(\omega) = 1 - G_G(\omega)$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. W
 związku z tym, że wzmocnienie filtra HP jest funkcją parzystą, dziedzina częstotliwości może
 zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$. Wagi filtra dolno- i górno-przepustowego w
 wariancie nieskończonej próby obserwacji mogą być obliczone na podstawie odwrotnej
 transformaty Fouriera (z czynnikiem $1/2\pi$) danego wzmocnienia. Przykładowo, dla filtra
 dolno-przepustowego odpowiednia formuła przyjmuje wówczas postać
 $G_j = 2\pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} G_G(\omega) e^{i\omega j} d\omega$ dla $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Parametr λ determinuje stopień „gładkości” trendu. Hodrick i Prescott (1997)
 zaproponowali wartość $\lambda = 1600$ w przypadku filtra stosowanego na danych kwartalnych.
 Gomez (1999), jak również Maravall i del Rio (2001) – dowodząc, że filtr HP może być
 traktowany jako filtr typu Butterwortha – wskazali, że ta wartość parametru wygładzającego
 odpowiada okresowi częstotliwości ucięcia dla filtra dolno- i górno-przepustowego, który
 wynosi około 40 kwartałów. Powyższy stan rzeczy można zobrazować za pomocą
 wzmocnienia dolno-przepustowego filtra Butterwortha II rzędu, tzn.:

$$G_G(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\sin(\omega_0/2)} \right)^4} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.27)$$

gdzie ω_0 oznacza częstotliwość ucięcia. Należy zauważyć, że $G_G(\omega_0) = 0,5$, co oznacza, że częstotliwość ucięcia, a tym samym okres odpowiadający tej częstotliwości, odpowiada 50% realizacji wzmocnienia. Wzmocnienie dane wzorem (3.27) może zostać zapisane jako $G_G(\omega) = 1/(1 + \beta \sin^4(\omega/2))$, gdzie parametr β przyjmuje postać $\beta = [\sin^4(\omega_0/2)]^{-1}$. Następnie, dzięki wykorzystaniu zależności $2\sin^2(\omega/2) = 1 - \cos(\omega)$, wzmocnienie można zapisać jako $G_G(\omega) = 1/(1 + 0,25\beta(1 - \cos(\omega))^2)$. Zatem wzmocnienie dolno-przepustowego filtra Butterwortha II rzędu jest takie samo jak wzmocnienie dolno-przepustowego filtra HP (3.26) dla równości $0,25\beta = 4\lambda$. Wynika z tego, że parametr wygładzający filtra HP wynosi $\lambda = \beta/16$ i może być zapisany jako funkcja ω_0 , czyli $\lambda = [16\sin^4(\omega_0/2)]^{-1} = [4(1 - \cos(\omega_0))^2]^{-1}$. W związku z tym, znając zależność pomiędzy λ i ω_0 , można wyznaczyć zależność pomiędzy λ a okresem częstotliwości ω_0 . Zapisując częstotliwość ucięcia jako $\omega_0 = 2\pi/\tau_0$, gdzie $2 < \tau_0 < +\infty$, można otrzymać wzór na τ_0 jako funkcję λ , który jest dany w następujący sposób:

$$\tau_0 = 2\pi \left[\cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \right) \right]^{-1}. \quad (3.28)$$

Zgodnie z (3.28) dla parametru $\lambda = 1600$ można wykazać, że stosując filtr HP, rozumiany jako filtr górno-przepustowy, w przypadku danych kwartalnych, uzyskuje się komponent zawierający cykle o długościach krótszych niż 39,7 kwartału. Należy podkreślić, że tego typu podejście do interpretacji parametru λ w przypadku filtra HP daje również możliwość ustalenia wartości tego parametru dla danych miesięcznych czy też rocznych. Zakładając, że celem jest wyznaczenie parametrów λ dla danych rocznych i miesięcznych, które będą porównywalne z parametrem $\lambda = 1600$ dla danych kwartalnych, metoda Maravalla i del Rio prowadzi do uzyskania na podstawie wzoru $\lambda_j = [4(1 - \cos(2\pi j/39,7))^2]^{-1}$, gdzie $j = 4$ dla danych rocznych oraz $j = 1/3$ dla danych miesięcznych, kolejno wartości 6,66 oraz 129119,78. Innym sposobem ustalenia wartości parametru wygładzającego filtra HP dla

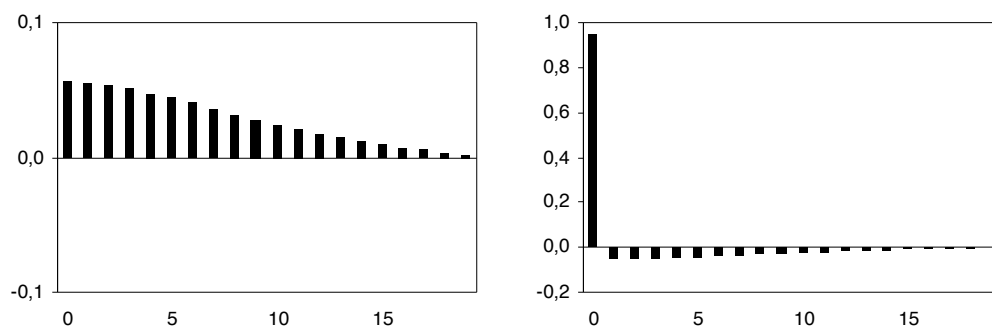
danych rocznych i miesięcznych jest koncepcja Ravna i Uhliga (2002). Zgodnie z tym podejściem wzór umożliwiający przeliczanie parametru λ w zależności od rozpatrywanego typu danych przyjmuje postać:

$$\lambda_k = 1600(0,25k)^4, \quad (3.29)$$

gdzie k oznacza liczbę obserwacji w roku. Dla danych rocznych $k = 1$, a więc λ przyjmuje wartość 6,25. Z kolei dla danych miesięcznych, gdzie $k = 12$, parametr λ wynosi 129600. Warto zauważyć, że są to wartości zbliżone do uzyskanych na podstawie metody Maravalla i del Rio. Niemniej jednak należy pamiętać, że metoda Ravna i Uhliga nie umożliwia powiązania parametru λ z dowolnym pasmem częstotliwości, które ma być opuszczone przez filtr HP, tak jak ma to miejsce w przypadku podejścia Maravalla i del Rio.

W lewym panelu rysunku 3.1 przedstawiono wagi dolno-przepustowego filtra HP dla parametru wygładzającego $\lambda = 1600$. Prawy panel rysunku 3.1 przedstawia natomiast wagi korespondującego filtra górno-przepustowego. Prezentowane wagi dotyczą filtrów właściwych dla nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej y_t . W przypadku każdego filtra przedstawiono pierwsze 20 wag dla $j = 0, 1, \dots, 19$.

Rysunek 3.1. Wagi dolno- (lewy panel) i górno-przepustowego (prawy panel) filtra HP w nieskończonej próbie obserwacji



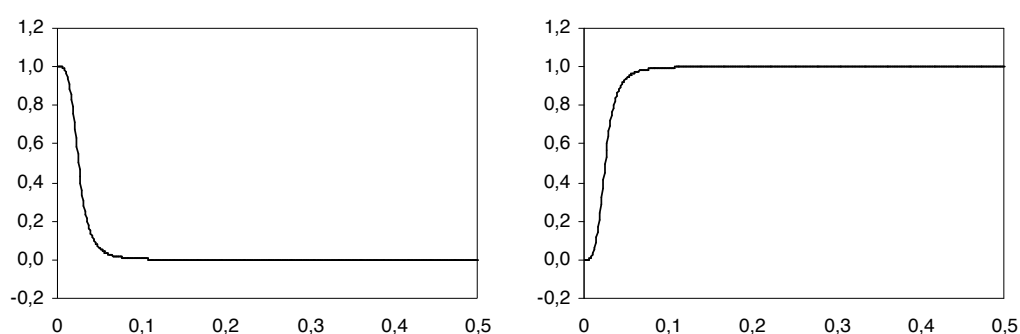
Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy wag, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez wagi.

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wykresy obrazują odpowiedź danego filtra HP w momencie t na jednostkowy impuls wejściowej zmiennej z okresu $t \pm j$. W obydwu przypadkach widać stopniowe wygasanie wag wraz ze wzrostem przesunięcia w czasie (wzrostem wartości j).

Rysunek 3.2 przedstawia wzmocnienie dolno- i górno-przepustowego filtra HP w przypadku szeregu czasowego o nieskończonej liczbie obserwacji. W lewym panelu rysunku zobrazowano wzmocnienie filtra dolno-przepustowego, czyli funkcję $G_G(\omega)$, natomiast w prawym panelu rysunku przedstawiono korespondujące wzmocnienie filtra górno-przepustowego, czyli funkcję $G_C(\omega)$. Jako wartość parametru wygładzającego przyjęto $\lambda = 1600$.

Rysunek 3.2. Wzmocnienie dolno- (lewy panel) i górno-przepustowego (prawy panel) filtra HP w nieskończonej próbie obserwacji



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez wzmocnienia.

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wykresy wskazują, że charakterystyka częstotliwościowa dolno- i górno-przepustowego filtra HP jest zbliżona do charakterystyki częstotliwościowej „idealnego” filtra dolno- i górno-przepustowego o częstotliwości ucięcia wynikającej z okresu około 40 kwartałów.

W przypadku skończonej próby obserwacji jakość estymacji komponentu trendu i korespondującego komponentu cyklicznego za pomocą filtra HP przy końcach próby obserwacji może być obciążona stosunkowo dużym błędem. Taki stan rzeczy wynika z asymetryczności filtra HP. W celu zobrazowania tego problemu w przypadku implementacji filtra HP w skończonej próbie obserwacji, rozważymy jego reprezentację w dziedzinie częstotliwości w przypadku filtra dolno-przepustowego⁴⁷. W skończonej T -elementowej próbie obserwacji szeregu czasowego y_t wzmocnienie dolno-przepustowego filtra HP jest zdefiniowane jako transformata Fouriera (pomijany jest czynnik $1/2\pi$) wielomianu $\hat{G}_t(L)$, a

⁴⁷ Analogiczne obliczenia mogą być przeprowadzone w przypadku górno-przepustowego filtra HP.

więc jest to funkcja $\hat{G}_t(z)$ dla $z = e^{-i\omega}$, która zależy od indeksu t . Dla $t = 1, 2, \dots, T$ wzmocnienie dolno-przepustowego filtra HP przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} G_{\hat{G}_t}(\omega) &\equiv \hat{G}_t(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} e^{-i\omega j} = \\ &= \Re G_{\hat{G}_t}(\omega) + i \Im G_{\hat{G}_t}(\omega) = \\ &= \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \cos(\omega j) - i \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \sin(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Jedynie w przypadku T nieparzystego dla środkowej obserwacji $t = (T+1)/2$ wzmocnienie przyjmuje wartości rzeczywiste. W pozostałych przypadkach, jak również dla $t = 1, 2, \dots, T$, gdzie T jest parzyste, wzmocnienie przyjmuje wartości zespolone. Część rzeczywista i urojona wzmocnienia dla $t = 1, 2, \dots, T$ przyjmują odpowiednio postać:

$$\Re G_{\hat{G}_t} = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \cos(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.31)$$

$$\Im G_{\hat{G}_t} = - \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \sin(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.32)$$

Tym samym aby zobrazować zachowanie się filtra HP w dziedzinie częstotliwości należy poddać analizie moduł wzmocnienia $|G_{\hat{G}_t}(\omega)|$, który przyjmuje wartości rzeczywiste. Moduł wzmocnienia dolno-przepustowego filtra HP jest funkcją parzystą, która dla $t = 1, 2, \dots, T$ jest dana jako:

$$\begin{aligned} |G_{\hat{G}_t}(\omega)| &= \left(\Re G_{\hat{G}_t}(\omega)^2 + \Im G_{\hat{G}_t}(\omega)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\left(\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \cos(\omega j) \right)^2 + \left(\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \sin(\omega j) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Funkcja przenoszenia mocy dolno-przepustowego filtra HP stanowi kwadrat modułu wzmocnienia, tj. $|G_{\hat{G}_t}(\omega)|^2$. Z kolei przesunięcie fazowe filtra, będące funkcją nieparzystą, jest dane dla $t = 1, 2, \dots, T$ w następujący sposób:

$$\varphi_{\hat{G}_t}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im G_{\hat{G}_t}(\omega)}{\Re G_{\hat{G}_t}(\omega)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{- \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \sin(\omega j)}{\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{G}_{j,t} \cos(\omega j)} \right) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.34)$$

Wykorzystując moduł wzmocnienia i przesunięcie fazowe można zapisać wzmocnienie dolno-przepustowego filtra HP w postaci wykładniczej dla $t = 1, 2, \dots, T$, czyli:

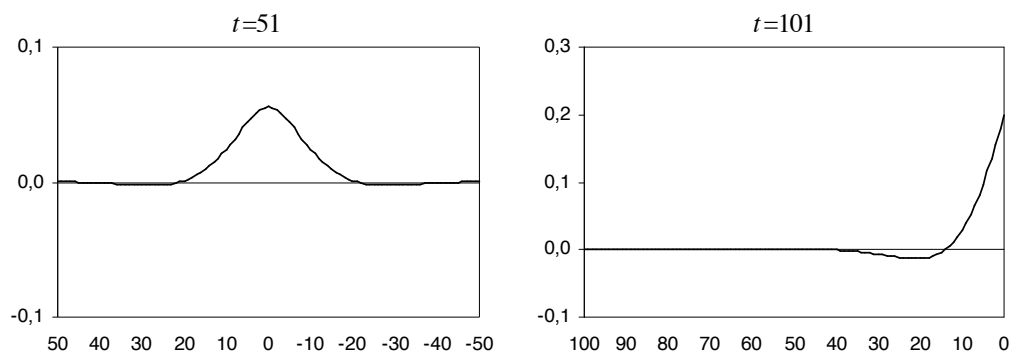
$$G_{\hat{G}_t}(\omega) = |G_{\hat{G}_t}(\omega)| e^{i\varphi_{\hat{G}_t}(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.35)$$

Naturalnie dla celów analizy kształtowania się modułu wzmocnienia i przesunięcia fazowego dolno-przepustowego filtra HP dziedzina częstotliwości może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$.

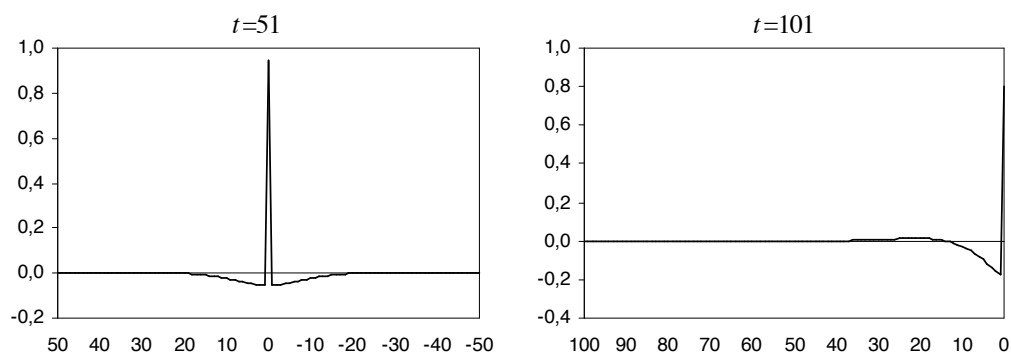
Rysunek 3.3 przedstawia wagi dolno- i górno-przepustowego filtra HP w przypadku szeregu czasowego o nieparzystej próbie obserwacji $T = 101$ dla środkowej obserwacji $t = 51$ oraz końcowej $t = 101$. Gdy $t = 51$, waga przypadająca dla $j = 50$ odpowiada obserwacji y_1 , natomiast waga dla $j = -50$ obserwacji y_{101} . Analogicznie gdy $t = 101$ waga dla $j = 100$ odpowiada obserwacji y_1 , a waga dla $j = 0$ obserwacji y_{101} . Ponadto warto zauważyć, że dla $t = 1$ wagi stanowiłyby lustrzane odbicie względem $j = 0$ wag dla $t = 101$, oraz że ich indeksacja przebiegałaby od 0 do -100. Naturalnie podobna własność zachodzi dla pozostałych t . W każdym przypadku prezentowanym na rysunku 3.3 przyjęto, że parametr wygładzający wynosi $\lambda = 1600$. Rysunek 3.4 przedstawia natomiast moduł wzmocnienia i przesunięcie fazowe dolno-przepustowego filtra HP w przypadku $T = 101$ dla środkowej obserwacji $t = 51$ i ostatniej $t = 101$. Dodatkowo na rysunku zamieszczono analogiczne funkcje dla filtra HP odpowiedniego dla nieskończonej próby obserwacji. Rysunek 3.5 przedstawia analogiczną sytuację dla górno-przepustowego filtra HP. W każdym przypadku przyjęto, że parametr wygładzający filtra HP wynosi $\lambda = 1600$. Warto zauważyć, że w każdym przypadku moduł wzmocnienia danego filtra dla $t = 1$ miałby analogiczny przebieg jak dla $t = 101$. W przypadku przesunięcia fazowego dla $t = 1$ mielibyśmy natomiast do czynienia z lustrzanym odbiciem względem osi horyzontalnej danego wykresu dla $t = 101$. Własności te wynikają bezpośrednio ze wzorów (3.33)-(3.34) oraz schematu wag na początku i końcu próby. Naturalnie analogiczne własności zachodzą dla pozostałych t .

Rysunek 3.3. Wagi filtrów HP dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) filtr dolno-przepustowy



b) filtr górno-przepustowy

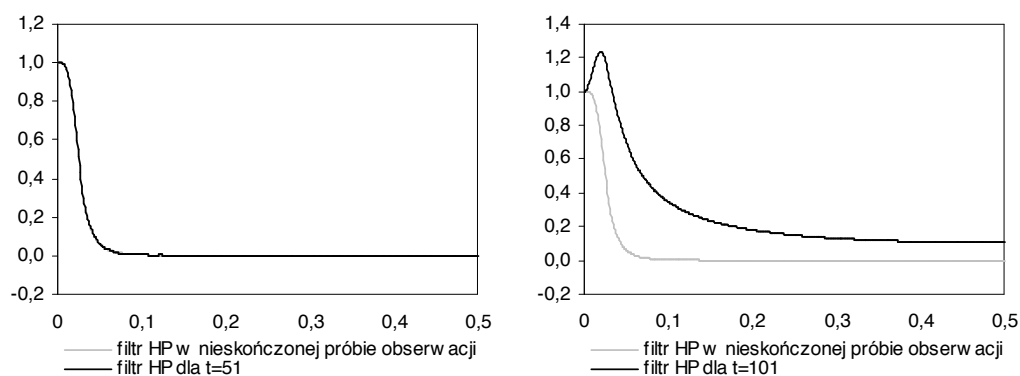


Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy wag, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez wagi.

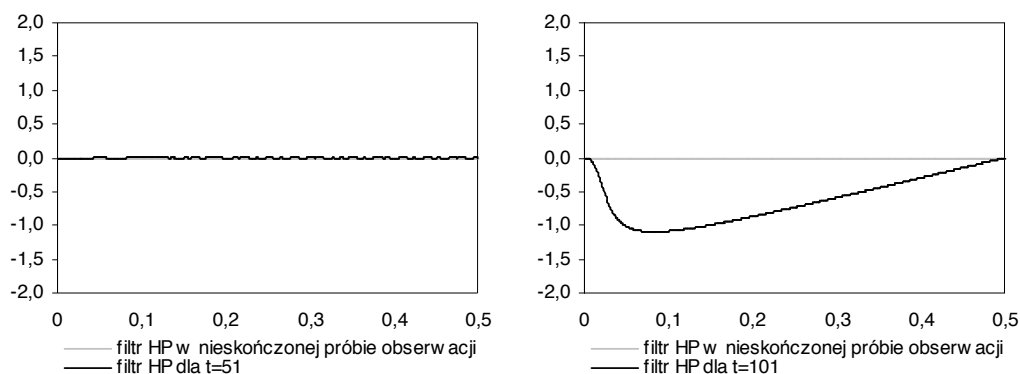
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.4. Dolno-przepustowy filtr HP dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) moduł wzmocnienia



b) przesunięcie fazowe

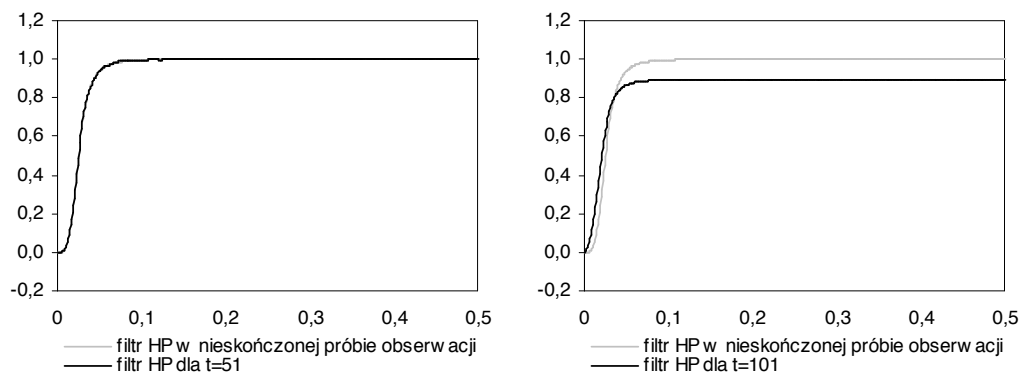


Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez moduły wzmocnień i przesunięcia fazowe.

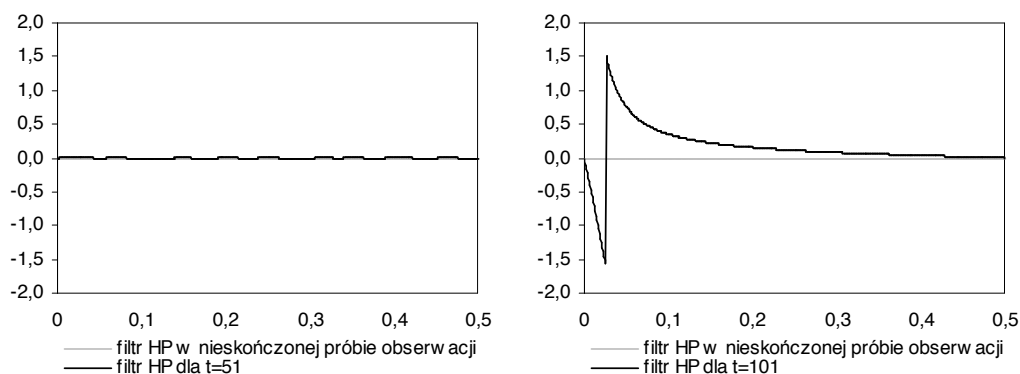
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.5. Górno-przepustowy filtr HP dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) moduł wzmocnienia



b) przesunięcie fazowe



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez moduły wzmocnień i przesunięcia fazowe.

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wykresy wskazują na następujące własności związane z filtrami HP. Po pierwsze, jakość estymacji poszukiwanych komponentów na początku i końcu próby obserwacji jest zdecydowanie gorsza niż w środku próby obserwacji, na co wskazują moduły wzmocnień analizowanych filtrów HP (przy końcach próby obserwacji moduł wzmocnienia danego filtra HP odbiega w istotny sposób od wzmocnienia danego filtra odpowiadającego nieskończonej próbie obserwacji). Po drugie, przesunięcia fazowe wskazują na występowanie przy końcach próby obserwacji problemu związanego z przesunięciem w czasie zmiennej uzyskiwanej na wyjściu w stosunku do zmiennej wejściowej. Powyższe własności sygnalizują, że przy końcach próby obserwacji estymator komponentu uzyskanego za pomocą danego filtra HP jest obciążony. Jest to bezpośrednio związane z tym, że filtr HP jest filtrem asymetrycznym. Obciążenie estymatorów przy końcach próby obserwacji jest nieuniknione w przypadku filtrów asymetrycznych, niemniej jednak filtry te umożliwiają estymację komponentów składających się z tej samej liczby obserwacji co wejściowy szereg czasowy. Należy podkreślić, że pomimo problemów przy końcach próby obserwacji jakość estymatora danej składowej w przypadku filtra HP poprawia się w miarę zbliżania się do środka próby obserwacji (w ten sam sposób od początku, jak i od końca próby).

W dotychczasowych rozważaniach pokazano, że filtr HP ma równoważną reprezentację jako filtr typu Wienera-Kołmogorowa, jak również należy do rodziny filtrów typu Butterwortha. Ponadto filtr ten może być również zapisany w formie modelu nieobserwowalnych komponentów typu UCARIMA (por. King i Rebelo (1993)). Wówczas możliwym jest dokonanie zapisu filtra HP w reprezentacji przestrzeni stanów (*ang. state space*) i oszacowanie parametrów tak skonstruowanego systemu za pomocą algorytmu filtra Kalmana (por. Dueker i Nelson (2002))⁴⁸. Należy również zauważyć, że w literaturze przedmiotu można odnaleźć zmodyfikowane wersje filtra HP (por. Schleicher (2003), Araujo et al. (2003)). Jedną z ciekawszych odmian filtra HP jest metodologia Kaiser i Maravalla (1999, 2002), którzy zaproponowali rozszerzenie metody oczyszczania sezonowego i ekstrakcji składowych szeregów czasowych TRAMO/SEATS o estymację składowej obrazującej wahania koniunkturalne. W tym celu wykorzystano filtr HP, który w ramach metody TRAMO/SEATS ma modelową interpretację, tzn. że uzyskana składowa cykliczna ma reprezentację stacjonarnego procesu ARMA, podczas gdy komponent trendu jest reprezentowany przez niestacjonarny proces typu ARIMA. Idea tzw. zmodyfikowanego filtra HP (filtr MHP, *ang. modified Hodrick-Prescott filter*) polega na ekstrakcji składowej

⁴⁸ Tę formę reprezentacji filtra HP opisano w części 3.3.2.

cyklicznej na podstawie szeregu czasowego komponentu trend-cykl, który na początku i końcu próby obserwacji został rozszerzony o prognozy wynikające z procesu ARIMA dopasowanego do tej składowej w ramach dekompozycji TRAMO/SEATS. W procedurze filtra MHP wykorzystuje się to, że jest on filtrem typu Wienera-Kołmogorowa, co tym samym prowadzi do uzyskania estymatora składowej cyklicznej o minimalnym błędzie średniokwadratowym (estymator MMSE). Interpretacja parametru wygładzającego λ w ramach filtra MHP pozostaje taka sama jak w standardowej specyfikacji filtra HP. W skończonych próbach obserwacji implementacja filtra MHP odbywa się zgodnie z algorytmem Burmana-Wilsons (por. Kaiser i Maravall (2001)). Opis tego algorytmu dla parametru wygładzającego λ i wejściowej zmiennej będącej składową trend-cykl uzyskaną w ramach metody TRAMO/SEATS został przedstawiony poniżej.

Punktem startowym do opisu zasady działania filtra MHP jest reprezentacja filtra HP w nieskończonej próbie obserwacji zmiennej wejściowej. Ekstrakcja składowej trendu i składowej cyklicznej w ramach filtra MHP odbywa się na bazie zmiennej wejściowej będącej składową trend-cykl. Przykładowo w przypadku procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄ składowa ta jest reprezentowana przez proces IMA(2,2), który uzyskiwany jest za pomocą metody TRAMO/SEATS. Z kolei rozbitcie tego procesu na składową trendu i składową cykliczną za pomocą filtra MHP prowadzi do uzyskania kolejno procesu ARIMA(2,2,2) dla trendu i ARMA(2,2) dla cyklu (por. Kaiser i Maravall (2002), s. 22). Tym samym można zapisać wejściową zmienną trend-cykl oraz jej komponent trendu i cyklu kolejno jako procesy postaci:

$$\Delta^2 \eta_t = (1 + \theta_1^\eta L + \theta_2^\eta L^2) \varepsilon_{\eta,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{\eta,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_{\varepsilon_\eta}^2), \quad (3.36a)$$

$$(1 + \theta_1^{HP} L + \theta_2^{HP} L^2) \Delta^2 g_t = (1 + \theta_1^\eta L + \theta_2^\eta L^2) \varepsilon_{g,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{g,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_{\varepsilon_g}^2), \quad (3.36b)$$

$$(1 + \theta_1^{HP} L + \theta_2^{HP} L^2) c_t = (1 + \theta_1^\eta L + \theta_2^\eta L^2) \varepsilon_{c,t}, \text{ gdzie } \varepsilon_{c,t} \sim i.i.d.N(0, \sigma_{\varepsilon_c}^2). \quad (3.36c)$$

W ramach filtra MHP estymator o minimalnym błędzie średniokwadratowym (estymator MMSE) dla składowej trendu jest uzyskiwany za pomocą dolno-przepustowego filtra typu Wienera-Kołmogorowa. Estymator ten jest dany jako⁴⁹ (por. Kaiser i Maravall (2002), s. 7):

$$\hat{g}_t = G(L) \hat{\eta}_t = \frac{k_g}{\theta^{HP}(L) \theta^{HP}(L^{-1})} \hat{\eta}_t, \quad (3.37)$$

⁴⁹ Zapis ten wynika z modelowej reprezentacji filtra HP zaproponowanej przez Kinga i Rebelo (1993) (por. przypis 51, s. 93).

gdzie $\hat{\eta}_t$ oznacza estymator MMSE składowej trend-cykl (uzyskany w ramach metody TRAMO/SEATS), $k_g = 1/V_{HP}$, $V_{HP} = (1 + 6\lambda) / (1 + (\theta_1^{HP})^2 + (\theta_2^{HP})^2)$ oraz $\theta^{HP}(L) = 1 + \theta_1^{HP}L + \theta_2^{HP}L^2$. Z kolei estymator MMSE dla składowej cyklicznej jest dany za pomocą korespondującego filtra górno-przepustowego i przyjmuje postać:

$$\hat{c}_t = C(L)\hat{\eta}_t = \frac{k_c(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{\theta^{HP}(L)\theta^{HP}(L^{-1})}\hat{\eta}_t, \quad (3.38)$$

gdzie $k_c = \lambda/V_{HP}$. Naturalnie w wyniku agregacji tych komponentów uzyskuje się zmienną wejściową⁵⁰, tzn. $\hat{\eta}_t = \hat{g}_t + \hat{c}_t$. Równocześnie należy zaznaczyć, że wariancje składników losowych w równaniach opisujących składową trendu i składową cykliczną są powiązane z wariancją składnika losowego składowej trend-cykl poprzez relacje $\sigma_{\varepsilon_g}^2 = k_g \sigma_{\varepsilon_\eta}^2$ oraz $\sigma_{\varepsilon_c}^2 = k_c \sigma_{\varepsilon_\eta}^2$. Estymatory składowych trendu i cyklu mogą zostać zapisane równoważnie do (3.37) i (3.38) kolejno jako $\hat{g}_t = G(L)\hat{\eta}_t = G(L)T(L)y_t$ i $\hat{c}_t = C(L)\hat{\eta}_t = C(L)T(L)y_t$, gdzie $T(L)$ jest wielomianem opisującym filtr Wienera-Kołmogorowa do ekstrakcji składowej trend-cykl w ramach metody TRAMO/SEATS na podstawie wejściowej zmiennej y_t . Parametry wielomianu $\theta^{HP}(L)$ są dane jako $\theta_1^{HP} = 2M$ i $\theta_2^{HP} = M^2 + N^2$, gdzie M i N stanowią kolejno część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej $R = M + iN$. Liczba R jest liczbą mającą najmniejszy moduł spośród pary liczb zespolonych $\{(m_1 + in_1), (m_2 + in_2)\}$, gdzie kolejno części rzeczywiste i urojone tych liczb są dane jako $m_1 = (-a + r)/2$, $m_2 = (-a - r)/2$ i $n_1 = (z - b)/2$, $n_2 = (-z - b)/2$. Z kolei wielkości a , b , r i z są dane kolejno jako $a = 2$, $b = 1/\sqrt{\lambda}$, $r = ab/z$ i $z = \sqrt{(1/2\lambda)(1 + \sqrt{1 + 16\lambda})}$. W przypadku parametru wygładzającego $\lambda = 1600$ za pomocą powyższych równań uzyskuje się, że $\theta_1^{HP} = -1,7771$, $\theta_2^{HP} = 0,7994$ oraz $V_{HP} = 2001,4$. Wówczas parametry k_g i k_c wynoszą odpowiednio 0,0005 i 0,7994. Gdy znamy wartości parametrów opisujących filtry Wienera-Kołmogorowa dla danego λ , można przystąpić do estymacji poszukiwanych składowych estymatora MMSE komponentu trend-cykl na podstawie skończonej T -elementowej próby obserwacji tej

⁵⁰ Należy zaznaczyć, że spełniona jest równość $\theta^{HP}(L)\theta^{HP}(L^{-1}) = k_g + k_c(1-L)^2(1-L^{-1})^2$.

zmiennej, która została rozszerzona o cztery prognozy na końcu i początku próby⁵¹. W tym celu wykorzystuje się fakt, że wielomian opisujący filtr dolno-przepustowy może zostać zapisany jako:

$$G(L) = \frac{k_g}{\theta^{HP}(L)\theta^{HP}(L^{-1})} = k_g \left(\frac{\Psi(L)}{\theta^{HP}(L)} + \frac{\Psi(L^{-1})}{\theta^{HP}(L^{-1})} \right), \quad (3.39)$$

gdzie $\Psi(L) = \psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2$. Poszukiwane parametry ψ_0 , ψ_1 oraz ψ_2 stanowią wówczas rozwiązanie równania postaci $\begin{bmatrix} \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \end{bmatrix}' = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$, gdzie macierz $\mathbf{A}$ wymiaru 3×3 jest dana jako:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta_1^{HP} & 1 & 0 \\ \theta_2^{HP} & \theta_1^{HP} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_2^{HP} \\ 0 & \theta_2^{HP} & \theta_1^{HP} \\ \theta_2^{HP} & \theta_1^{HP} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Dla przypadku parametru wygładzającego $\lambda = 1600$ wartości poszukiwanych parametrów są następujące $\begin{bmatrix} \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \end{bmatrix}' = [-44,8605 \quad 11,1143 \quad 56,1146]'$. Korzystając z (3.39), estymator komponentu trendu może zostać zapisany jako $\hat{g}_t = k_g (\hat{\eta}_t^B + \hat{\eta}_t^F)$, gdzie $\hat{\eta}_t^B = (\Psi(L)/\theta^{HP}(L))\hat{\eta}_t$ i $\hat{\eta}_t^F = (\Psi(L^{-1})/\theta^{HP}(L^{-1}))\hat{\eta}_t$. Dla celów dalszych obliczeń jest wymagane wykorzystanie macierzy wymiaru 4×4 , która jest zdefiniowana jako:

⁵¹ Prognozy wprzód i wstecz dla estymatora MMSE składowej trend-cykl są uzyskiwane w ramach metody TRAMO/SEATS. Przykładowo w przypadku procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄, gdzie składowa trend-cykl jest dana jako proces IMA(2,2), prognozy te wynikają właśnie z procesu IMA(2,2) danego równaniem (3.36a). W tym miejscu należy podkreślić, że wynik estymacji poszukiwanych składowych za pomocą filtra MHP byłby zawsze identyczny z wynikiem uzyskanym za pomocą standardowego filtra HP, jeżeli prognozy wprzód i wstecz dla dekomponowanej zmiennej, oznaczonej np. jako y_t , byłyby generowane na podstawie procesu IMA(2,2) postaci $\Delta^2 y_t = (1 + \theta_1^{HP} L + \theta_2^{HP} L^2) \varepsilon_t^{HP}$, gdzie $\varepsilon_t^{HP} \sim i.i.d.N(0, V_{HP})$. *De facto* tego typu proces generujący dane oznacza, że składowa trendu jest traktowana jako proces I(2), tzn. $\Delta^2 g_t = e_t$, gdzie $e_t \sim i.i.d.N(0,1)$, natomiast składowa cykliczna jest dana jako proces I(0) postaci $c_t \sim i.i.d.N(0, \lambda)$, który jest ortogonalny do e_t . Należy zauważyć, że parametr wygładzający filtra HP jest dany jako stosunek wariancji c_t do wariancji e_t . Naturalnie dekompozycja przyjmuje postać $y_t = g_t + c_t$. Reprezentacja tego typu dla filtra HP została zaproponowana przez Kinga i Rebelo (1993). W części 3.3.2. przedstawiono zapis filtra HP według Kinga i Rebelo w formie *state space*.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \theta_1^{HP} & \theta_2^{HP} & 0 \\ 0 & 1 & \theta_1^{HP} & \theta_2^{HP} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.41)$$

Następnie są przeprowadzane obliczenia, które prowadzą do uzyskania estymatora $\hat{g}_t$ na podstawie szeregu czasowego estymatora MMSE składowej trend-cykl, przy uwzględnieniu czterech prognoz tej zmiennej na początku i końcu próby obserwacji, tj. na podstawie szeregu czasowego $\{\hat{\eta}_t\}_{t=-3}^{T+4}$. Obliczenia te można podsumować w trzech etapach:

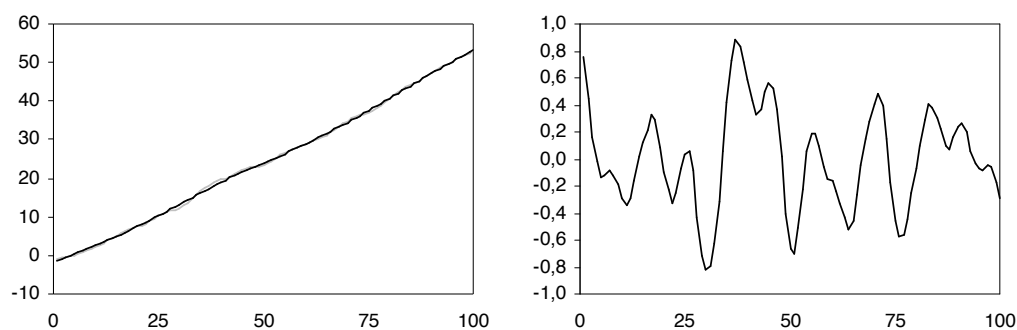
- i) dla $t = -3, -2, \dots, T+2$ są obliczane wartości $y_{1,t} = \psi_0 \hat{\eta}_t + \psi_1 \hat{\eta}_{t+1} + \psi_2 \hat{\eta}_{t+2}$, następnie są obliczane wartości $\hat{\eta}_t^F$ dla $t = T+1, T+2, \dots, T+4$ za pomocą równania $\begin{bmatrix} \hat{\eta}_{T+1}^F & \hat{\eta}_{T+2}^F & \hat{\eta}_{T+3}^F & \hat{\eta}_{T+4}^F \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{1,T+1} & y_{1,T+2} \end{bmatrix}$, a następnie dla $t = T, T-1, \dots, -3$ są obliczane rekursywnie wartości $\hat{\eta}_t^F = -\theta_1^{HP} \hat{\eta}_{t+1}^F - \theta_2^{HP} \hat{\eta}_{t+2}^F + y_{1,t}$,
- ii) dla $t = -1, 0, \dots, T+4$ są obliczane wartości $y_{2,t} = \psi_0 \hat{\eta}_t + \psi_1 \hat{\eta}_{t-1} + \psi_2 \hat{\eta}_{t-2}$, następnie są obliczane wartości $\hat{\eta}_t^B$ dla $t = -3, -2, \dots, 0$ za pomocą równania $\begin{bmatrix} \hat{\eta}_0^B & \hat{\eta}_{-1}^B & \hat{\eta}_{-2}^B & \hat{\eta}_{-3}^B \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_{2,0} & y_{2,-1} \end{bmatrix}$, a następnie dla $t = 1, 2, \dots, T+4$ są obliczane rekursywnie wartości $\hat{\eta}_t^B = -\theta_1^{HP} \hat{\eta}_{t-1}^B - \theta_2^{HP} \hat{\eta}_{t-2}^B + y_{2,t}$,
- iii) dla $t = -3, -2, \dots, T+4$ są obliczane wartości $\hat{g}_t = k_g (\hat{\eta}_t^B + \hat{\eta}_t^F)$, które stanowią estymator MMSE komponentu trendu wraz z czterema prognozami wprzód i wstecz, korespondujący estymator MMSE składowej cyklicznej wraz z prognozami jest dany jako $\hat{c}_t = \hat{\eta}_t - \hat{g}_t$ dla $t = -3, -2, \dots, T+4$.

Na rysunku 3.6 przedstawiono dekompozycję składowej trend-cykl przykładowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄ z poprzedniego rozdziału (szereg czasowy liczący 100 obserwacji) na komponent trendu i komponent cyklu za pomocą filtra HP i filtra MHP przy parametrze wygładzającym $\lambda = 1600$. Dekompozycja w przypadku standardowego filtra HP polegała na zastosowaniu danego filtra HP na szeregu czasowym obrazującym estymator MMSE składowej trend-cykl z dekompozycji TRAMO/SEATS. Z kolei dekompozycja danym filtrem MHP została przeprowadzona zgodnie z algorytmem Burmana-Wilsona dla szeregu obrazującego estymator MMSE składowej trend-cykl. W lewym panelu rysunku 3.6

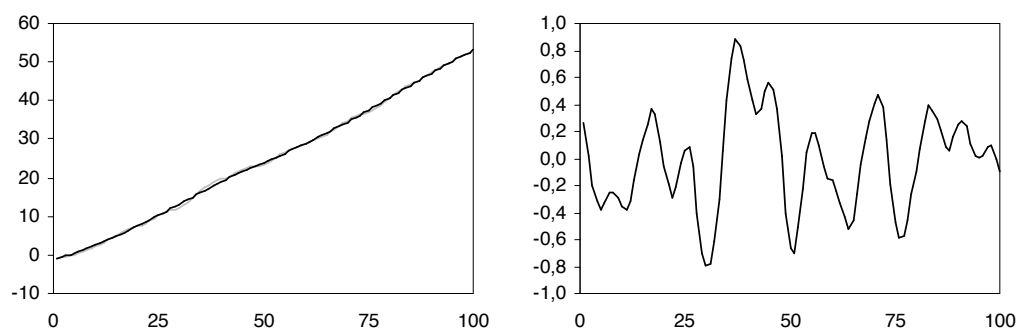
zamieszczono estymator MMSE filtra HP lub MHP składowej trendu na tle estymatora MMSE składowej trend-cykl, wynikającego z procedury TRAMO/SEATS dla $t = 1, 2, \dots, 100$, z kolei w prawym panelu rysunku zobrazowano kształtowanie się estymatora MMSE filtra HP bądź MHP składowej cyklicznej dla $t = 1, 2, \dots, 100$. Obydwie dekompozycje różni jedynie przebieg uzyskanych komponentów dla początkowych i końcowych obserwacji w próbie, co wynika bezpośrednio z tego, że filtr MHP w stosunku do filtra HP wykorzystuje przy estymacji informacje płynące z „właściwych” prognoz MMSE dekomponowanej zmiennej. W pozostałej części próby obserwacji uzyskane komponenty są do siebie bardzo zbliżone.

Rysunek 3.6. Przykładowa dekompozycja składowej trend-cykl z metody TRAMO/SEATS za pomocą filtra HP i MHP na składową trendu (lewy panel) i cyklu (prawy panel)

a) filtr HP dla $\lambda = 1600$



b) filtr MHP dla $\lambda = 1600$



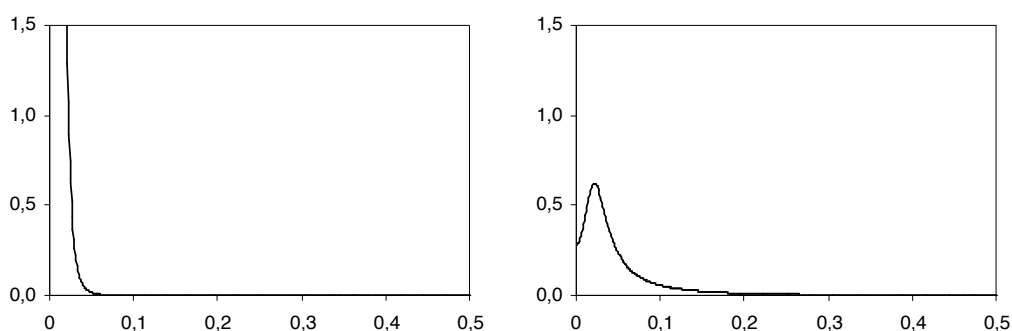
Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy obserwacji, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez szereg czasowy.

Źródło: opracowanie własne.

Podobnie jak w przypadku przedstawionych w rozdziale 2 filtrów Wienera-Kołmogorowa, które są wykorzystywane w ramach metody TRAMO/SEATS, również na bazie parametrów opisujących filtr HP jako filtr Wienera-Kołmogorowa w ramach modelu

UCARIMA i parametrów dla procesu opisującego składową trend-cykl, można wyprowadzić pseudospektrum mocy procesu składowej trendu i spektrum mocy procesu składowej cyklu. Dla przykładowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄ składowa trendu jest opisywana przez niestacjonarny proces ARIMA(2,2,2), który jest dany jako $(1 - 1,7771L + 0,7994L^2)\Delta^2 g_t = (1 + 0,0829L - 0,9171L^2)\varepsilon_{g,t}$, gdzie $\varepsilon_{g,t} \sim i.i.d.N(0;0,00002)$, natomiast składowa cyklu jest dana przez stacjonarny proces ARMA(2,2) postaci $(1 - 1,7771L + 0,7994L^2)c_t = (1 + 0,0829L - 0,9171L^2)\varepsilon_{c,t}$, gdzie $\varepsilon_{c,t} \sim i.i.d.N(0;0,0320)$. W wyniku agregacji składowe te dają proces IMA(2,2) opisujący składową trend-cykl, czyli $\Delta^2 \eta_t = (1 + 0,0829L - 0,9171L^2)\varepsilon_{\eta,t}$, gdzie $\varepsilon_{\eta,t} \sim i.i.d.N(0;0,0400)$. W lewym panelu rysunku 3.7 przedstawiono pseudospektrum mocy powyższego procesu składowej trendu g_t , natomiast w prawym panelu tego rysunku zamieszczono spektrum mocy korespondującego procesu składowej cyklicznej c_t . Warto zauważyć, że w wyniku agregacji obydwu rozkładów otrzymywane jest pseudospektrum mocy składowej trend-cykl.

Rysunek 3.7. Pseudospektrum mocy przykładowego procesu składowej trendu (lewy panel) i spektrum mocy przykładowego procesu składowej cyklicznej (prawy panel)



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów przedstawiają wartości przyjmowane przez (pseudo)spektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

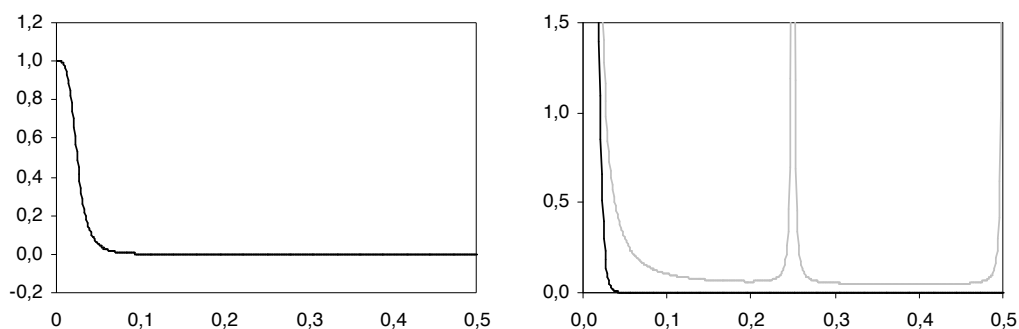
Na rysunku 3.8 zobrazowano w dziedzinie częstotliwości efekt połączenia filtra HP z metodą TRAMO/SEATS. Rysunek ten przedstawia wzmocnienia filtrów powstałych w wyniku połączenia dolno- i górno-przepustowego filtra HP z filtrem Wienera-Kołmogorowa zastosowanym do ekstrakcji składowej trend-cykl⁵² w procedurze TRAMO/SEATS dla

⁵² W przypadku filtra do ekstrakcji składowej trendu wzmocnienie przyjmuje postać $G(e^{-i\omega})T(e^{-i\omega})$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$, gdzie $G(e^{-i\omega})$ stanowi wzmocnienie dolno-przepustowego filtra HP, por. wzór (3.26),

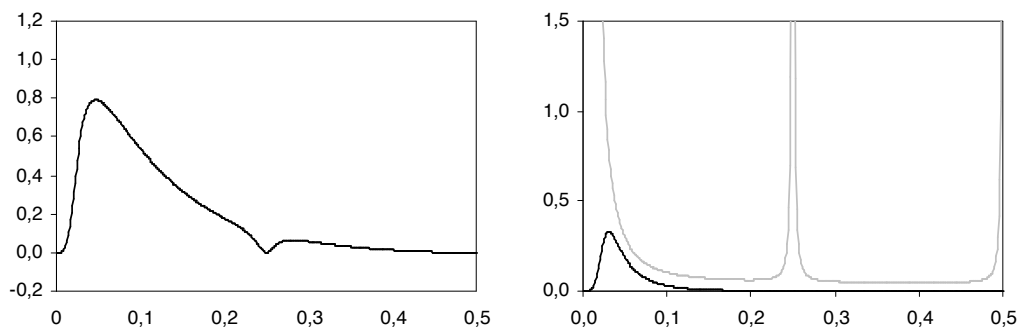
dekompozycji przykładowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄ (lewy panel). Wzmocnienia odnoszą się do filtrów właściwych dla przypadku nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej y_t będącej procesem SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄. Dla każdego filtra w prawym panelu rysunku 3.8 zamieszczono (pseudo)spektrum mocy estymatora MMSE odpowiedniej składowej na tle pseudospektrum mocy wejściowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄ (linia szara).

Rysunek 3.8. Wzmocnienia przykładowych filtrów będących połączeniem danego filtra HP i filtra Wienera-Kołmogorowa do ekstrakcji składowej trend-cykl z procedury TRAMO/SEATS dla przypadku nieskończonej próby obserwacji wejściowej zmiennej (lewy panel) wraz z odpowiadającymi im (pseudo)spektrami mocy estymatorów MMSE składowych trendu i cyklu (prawy panel)

a) filtr do ekstrakcji składowej trendu



b) filtr do ekstrakcji składowej cyklicznej



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów w lewym panelu wartości przyjmowane przez wzmocnienia, natomiast osie wertykalne wykresów w prawym panelu wartości przyjmowane przez (pseudo)spektra mocy.

Źródło: opracowanie własne.

natomiast $T(e^{-i\omega})$ stanowi wzmocnienie filtra Wienera-Kołmogorowa do ekstrakcji składowej trend-cykl. Korespondujące wzmocnienie filtra do ekstrakcji składowej cyklicznej jest dane jako $(1 - G(e^{-i\omega}))T(e^{-i\omega})$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$.

3.2.2. Filtr Baxter-Kinga

Filtr Baxter-Kinga (1995) jest aproksymacją „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, por. wzór (2.56). Filtr Baxter-Kinga (filtr BK) może być stosowany zarówno do ekstrakcji składowych cyklicznych na podstawie zmiennych stacjonarnych, jak i niestacjonarnych – zintegrowanych co najwyżej w stopniu drugim. Przy zastosowaniu filtra BK, podobnie jak w przypadku filtra HP, nie jest wymagane założenie dotyczące procesu generującego dane. Również podobnie jak filtr HP, filtr BK jest odporny na obecność dryfu w przypadku zmiennych zintegrowanych w stopniu pierwszym oraz innych składowych deterministycznych, które mogą występować w danych poddawanych filtracji. W przypadku filtra BK należy również mieć na uwadze wpływ wahań sezonowych na uzyskany estymator komponentu cyklicznego. A zatem zastosowanie filtra BK wymaga uprzedniego oczyszczenia wejściowego szeregu czasowego z wahań sezonowych w celu wyeliminowania tzw. efektu „wycieku” mocy spektralnej zgromadzonej na częstotliwościach sezonowych, o czym wspomniano szerzej w dalszej części (por. s. 103).

Procedura pasmowo-przepustowego filtra BK jest następująca. Niech szereg czasowy o skończonej próbie obserwacji $\{y_t\}_{t=1}^T$ będzie zmienną (nie)stacjonarną i pozbawioną wahań sezonowych. Celem jest estymacja składowej cyklicznej zmiennej y_t , a więc estymacja komponentu y_t^c , który ma moc jedynie w paśmie częstotliwości $\{[-\bar{\omega}, -\underline{\omega}] \cup [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\} \in [-\pi, \pi]$, gdzie $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega} < \pi$. Wielkość τ_U oznacza okres odpowiadający dolnej częstotliwości ucięcia, tzn. $\underline{\omega} = 2\pi/\tau_U$, natomiast τ_L okres odpowiadający górnej częstotliwości ucięcia, tzn. $\bar{\omega} = 2\pi/\tau_L$, co tym samym oznacza, że $2 < \tau_L < \tau_U < +\infty$. Estymator komponentu y_t^c wynikający z zastosowania filtra BK jest dany jako (por. Baxter i King (1995), s. 5):

$$\hat{y}_t^c = \hat{B}_J(L)y_t, \text{ gdzie } \hat{B}_J(L) = \sum_{j=-J}^J \hat{B}_j L^j \text{ dla } t = 1+J, 2+J, \dots, T-J, \quad (3.42)$$

gdzie wagi $\hat{B}_j$ spełniają warunek symetryczności, tzn. $\hat{B}_{-j} = \hat{B}_j$. Korespondujący estymator komponentu niecyklicznego jest dany jako różnica $y_t - \hat{y}_t^c$ dla $t = 1+J, 2+J, \dots, T-J$. Parametr J , podobnie jak w przypadku estymacji spektrum mocy poprzez wygładzanie periodogramu w dziedzinie opóźnień, jest określany mianem opóźnienia ucięcia (*ang.*

truncation lag). Dobór wartości tego parametru został skomentowany w dalszej części (por. s. 100). Z uwagi na konstrukcję filtra BK (symetryczna średnia ruchoma) uzyskiwany estymator komponentu cyklicznego jest szeregiem czasowym, który składa się z $T - 2J$ obserwacji. Zestaw wag $\hat{B}_j$ dla ustalonego parametru J stanowi rozwiązanie problemu poszukiwania minimum:

$$\min_{\hat{B}_j, j=-J, \dots, J} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B(e^{-i\omega}) - \hat{B}_j(e^{-i\omega})|^2 d\omega, \quad (3.43)$$

gdzie $B(e^{-i\omega})$ oznacza wzmocnienie „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, natomiast $\hat{B}_j(e^{-i\omega})$ wzmocnienie aproksymowanego pasmowo-przepustowego filtra BK. Wzmocnienie filtra (3.42) jest dane zgodnie z definicją jako transformata Fouriera (pomijany jest czynnik $1/2\pi$) wielomianu $\hat{B}_j(L)$, a więc jest to funkcja $\hat{B}_j(z)$ dla $z = e^{-i\omega}$. Ponadto z uwagi na to, że wagi filtra BK są symetryczne, funkcja ta przyjmuje wartości rzeczywiste i jest dana jako⁵³:

$$G_{\hat{B}_j}(\omega) \equiv \hat{B}_j(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-J}^J \hat{B}_j e^{-i\omega j} = \hat{B}_0 + 2 \sum_{j=1}^J \hat{B}_j \cos(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.44)$$

Warunkiem ograniczającym dla problemu (3.43) jest wymóg sumowalności wag do zera, tj. $\sum_{j=-J}^J \hat{B}_j = 0$, co zapewnia, że warunek $\hat{B}_j(e^{-i0}) = 0$ jest spełniony, a tym samym filtr BK usuwa z danych wejściowych trend stochastyczny wywołany obecnością pierwiastka jednostkowego, który jest powiązany z zerową częstotliwością. Wagi $\hat{B}_j$ dla $j = 0, \pm 1, \dots, \pm J$, będące rozwiązaniem (3.43), są dane jako:

$$\hat{B}_j = B_j + \theta, \quad (3.45)$$

gdzie wagi B_j odpowiadają wagom „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, por. wzory (2.58)-(2.59), natomiast parametr θ , który zapewnia sumowalność wag $\hat{B}_j$ do zera, przyjmuje postać:

⁵³ Warto podkreślić, że z uwagi na swoją konstrukcję filtr BK nie wprowadza przesunięcia fazowego pomiędzy wejściową i wyjściową zmienną. Symetryczny charakter filtra dla każdej obserwacji w próbie powoduje, że część urojona wzmocnienia tego filtra jest zawsze równa zeru.

$$\theta = \frac{-\sum_{j=-J}^J B_j}{2J+1}. \quad (3.46)$$

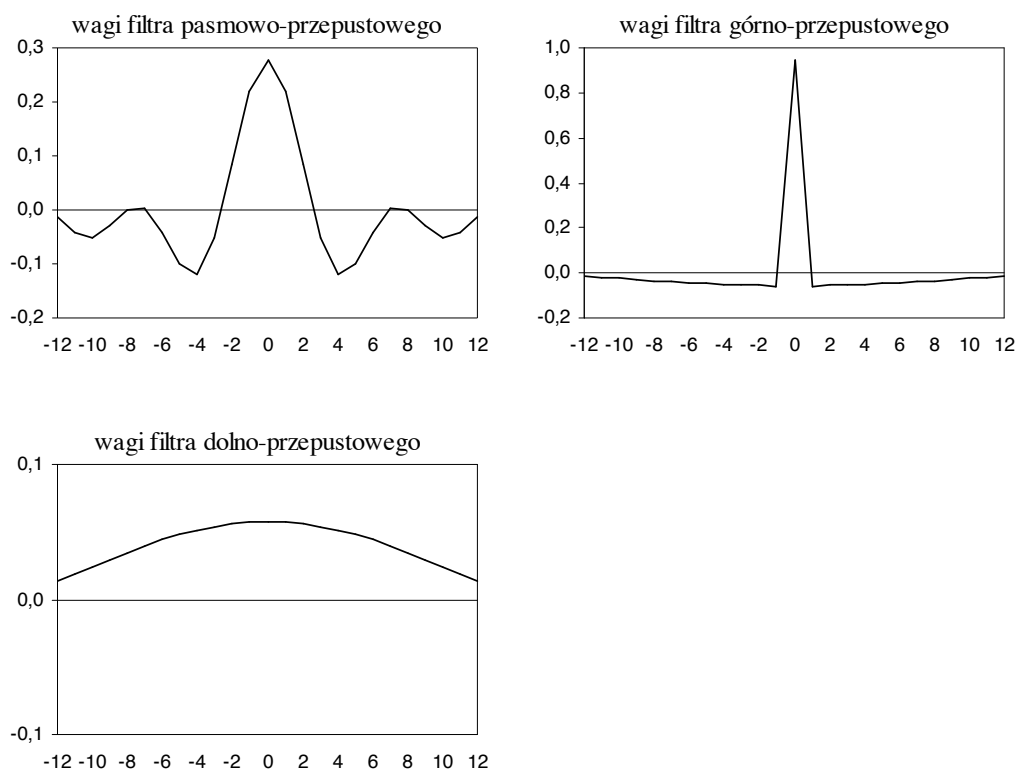
W analogiczny sposób do konstrukcji filtra pasmowo-przepustowego można uzyskać filtr dolno- i górno-przepustowy. W przypadku filtra górno-przepustowego rozwiązanie sprowadza się do zastąpienia wag „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego przez wagi „idealnego” filtra górno-przepustowego. Tym samym dla filtra górno-przepustowego typu BK wagi przyjmują postać $\hat{B}_j = \tilde{B}_j + \theta$ dla $j = 0, \pm 1, \dots, \pm J$, gdzie $\tilde{B}_j$ stanowią wagi „idealnego” filtra górno-przepustowego, por. wzór (2.65), oraz analogicznie do filtra pasmowo-przepustowego parametr $\theta = \left(-\sum_{j=-J}^J \tilde{B}_j\right)/(2J+1)$ zapewnia spełnienie warunku $\sum_{j=-J}^J \hat{B}_j = 0$. Tego typu operacja jest równoważna z ustawieniem górnej częstotliwości ucięcia filtra pasmowo-przepustowego na poziomie π . W przypadku filtra dolno-przepustowego dokonuje się zamiany wag „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego na wagi „idealnego” filtra dolno-przepustowego oraz nakłada się warunek ograniczający, który wymusza sumowalność wag do jedności, z uwagi na to, że celem filtra dolno-przepustowego jest estymacja komponentu trendu. Tym samym dla filtra dolno-przepustowego typu BK wagi przyjmują postać $\hat{B}_j = \underline{B}_j + \theta$ dla $j = 0, \pm 1, \dots, \pm J$, gdzie $\underline{B}_j$ stanowią wagi „idealnego” filtra dolno-przepustowego, por. wzór (2.63), natomiast parametr $\theta = \left(1 - \sum_{j=-J}^J \underline{B}_j\right)/(2J+1)$ zapewnia spełnienie warunku $\sum_{j=-J}^J \hat{B}_j = 1$, co tym samym gwarantuje, że wzmocnienie tego filtra przyjmuje wartość jedności dla zerowej częstotliwości, tzn. $\hat{B}_j(e^{-i0}) = 1$.

Kluczową kwestię w przypadku estymacji składowej cyklicznej szeregu czasowego za pomocą pasmowo-przepustowego filtra BK, jak również filtra górno-przepustowego, czy komponentu trendu w przypadku filtra dolno-przepustowego, stanowi dobór opóźnienia ucięcia J . Baxter i King (1995) sugerowali wykorzystanie filtrów, dla których $J = 12$ w przypadku danych kwartalnych. Oznacza to, że gdy używamy filtra tego typu, uzyskiwany komponent jest krótszy o 12 obserwacji kwartalnych (3 lata) na początku i końcu próby obserwacji w stosunku do wejściowego szeregu czasowego. Naturalnie, zwiększanie wartości parametru J oznacza z jednej strony lepszą jakość aproksymacji „idealnego” filtra, z drugiej natomiast wpływa na skracanie długość szeregu czasowego uzyskiwanego w wyniku filtracji. W przypadku danych rocznych autorzy filtra sugerują przyjęcie $J = 3$, natomiast w

przypadku danych miesięcznych $J = 36$, co tym samym jest spójne z sugerowaną przez nich wartością dla danych kwartalnych⁵⁴.

Rysunek 3.9 przedstawia wagi pasmowo-, górno- i dolno-przepustowego filtra BK dla $J = 12$. W każdym przypadku prezentowanym na rysunku 3.9 przyjęto, że częstotliwość ucięcia odpowiada okresowi $\tau_U = 32$ kwartały, dodatkowo dla filtra pasmowo-przepustowego przyjęto, że górna częstotliwość ucięcia wynika z okresu $\tau_L = 6$ kwartałów.

Rysunek 3.9. Wagi filtrów typu BK dla opóźnienia ucięcia $J = 12$



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy wag, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez wagi.

Źródło: opracowanie własne.

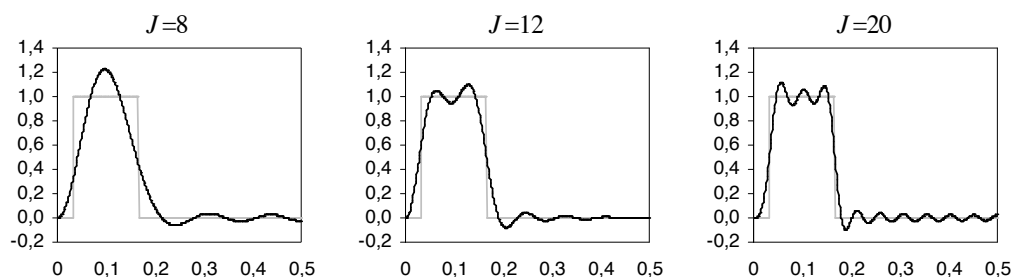
Na rysunku 3.10 zobrazowano wpływ parametru J na wzmocnienie filtra BK⁵⁵. Prezentowane wzmocnienia zostały zobrazowane na tle wzmocnienia korespondującego filtra

⁵⁴ W celu „uniknięcia” problemu związanego z tym, że filtr BK generuje szereg czasowy o krótszej liczbie obserwacji niż zmienna wejściowa można zastosować podejście polegające na implementacji danego filtra do szeregu czasowego, który został rozszerzony o prognozy wprzód i wstecz na podstawie dopasowanego do wejściowej zmiennej modelu ARIMA. Przykładowo, w przypadku filtra uwzględniającego 12 opóźnień wiąże się to z koniecznością wygenerowania 12 prognoz wprzód i wstecz.

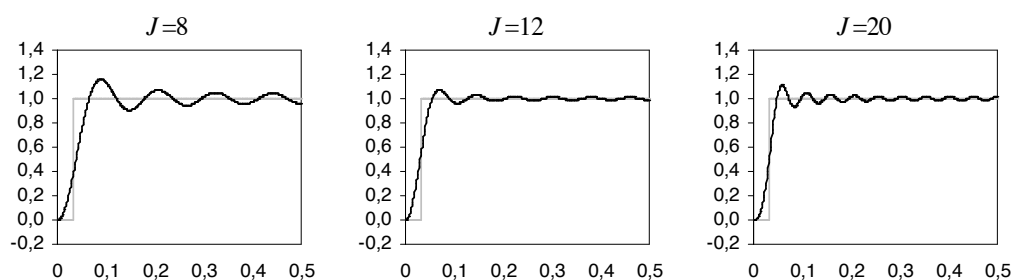
„idealnego”. W każdym przypadku prezentowanym na rysunku 3.10 przyjęto, że częstotliwość ucięcia odpowiada okresowi $\tau_U = 32$ kwartały, dodatkowo dla filtra pasmowo-przepustowego przyjęto, że górna częstotliwość ucięcia wynika z okresu $\tau_L = 6$ kwartałów.

Rysunek 3.10. Wzmocnienia filtrów typu BK dla opóźnień ucięcia $J = \{8, 12, 20\}$

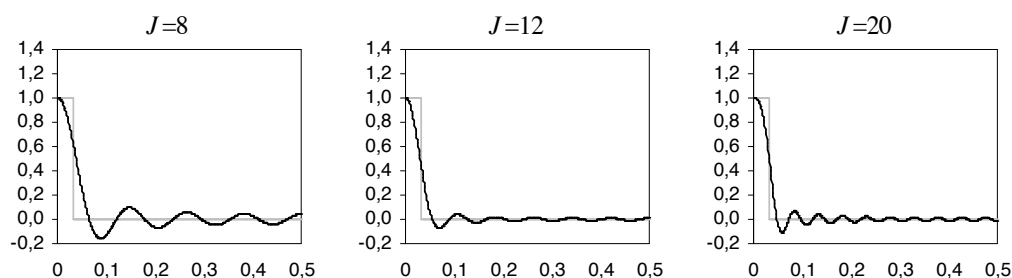
a) filtr pasmowo-przepustowy



b) filtr górno-przepustowy



c) filtr dolno-przepustowy



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez wzmocnienia.

Źródło: opracowanie własne.

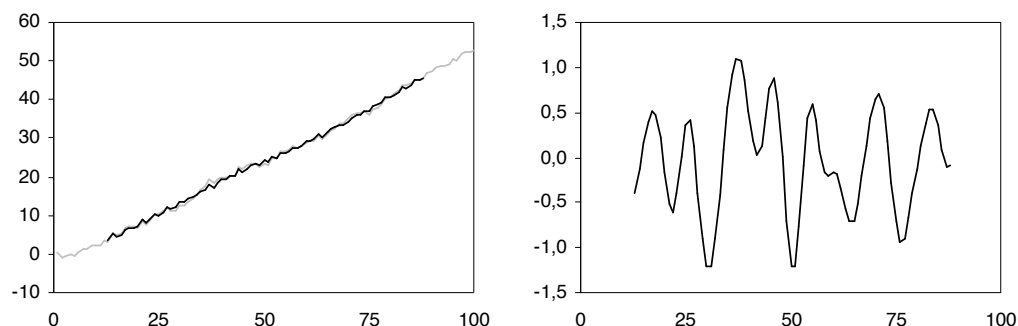
⁵⁵ Z uwagi na to, że wzmocnienie filtra BK jest funkcją parzystą dziedzina częstotliwości może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$.

Powyższe wykresy wskazują na następujące własności związane z filtrami typu BK. Po pierwsze, filtry BK charakteryzuje efekt Gibbsa⁵⁶. Wykresy te wskazują również na wcześniej wspomnianą zależność, zgodnie z którą zwiększenie liczby opóźnień J oznacza lepszą jakość aproksymacji filtra „idealnego” w dziedzinie częstotliwości. Po drugie, skupiając uwagę na przypadku filtra pasmowo-przepustowego, można dojść do wniosku, że filtry BK charakteryzują się efektem „wycieku” mocy spektralnej zgromadzonej na częstotliwościach w pobliżu obszaru poza opuszczanym pasmem. Ponadto filtry te charakteryzuje efekt „kompresji” w obrębie granicy opuszczanego przez filtr pasma. Efekty te ulegają zmniejszeniu wraz ze wzrostem liczby opóźnień J . Po trzecie, w pasmowo-przepustowych filtrach BK występuje efekt „wycieku” mocy spektralnej zgromadzonej na częstotliwościach sezonowych, co potwierdza, że filtry BK należy stosować do zmiennych, które zostały oczyszczone z wahań sezonowych.

Na rysunku 3.11 przedstawiono dekompozycję oczyszczonego z wahań sezonowych za pomocą metody TRAMO/SEATS przykładowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄, czyli zmiennej y_t^{SA} (szereg czasowy liczący 100 obserwacji), na komponent niecykliczny i cykliczny przy użyciu pasmowo-przepustowego filtra typu BK dla opóźnienia ucięcia $J = 12$. Częstotliwości ucięcia zastosowanego filtra BK odpowiadają zakresowi wahań pomiędzy 6 a 32 kwartałami. W lewym panelu rysunku 3.11 zamieszczono szereg czasowy estymatora składowej niecyklicznej na tle wejściowego szeregu czasowego, natomiast w prawym panelu przedstawiono szereg czasowy estymatora składowej cyklicznej.

⁵⁶ Efekt Gibbsa polega na „oscylacyjnym” charakterze przebiegu wzmocnienia filtra aproksymowanego i jest związany z tym, że funkcji skokowej, jaką jest wzmocnienie filtra „idealnego”, nie można dokładnie przybliżyć za pomocą skończonej sumy ważonych funkcji okresowych. Warto zauważyć, że aproksymacja metodą filtra BK polega na bezpośrednim ucięciu nieskończonej odpowiedzi impulsowej filtra „idealnego”, co zawsze prowadzi do występowania efektu Gibbsa.

Rysunek 3.11. Przykładowa dekompozycja zmiennej oczyszczonej z wahań sezonowych za pomocą metody TRAMO/SEATS na składową niecykliczną (lewy panel) i cykliczną (prawy panel) przy użyciu pasmowo-przepustowego filtra typu BK



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy obserwacji, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez szereg czasowy.

Źródło: opracowanie własne.

3.2.3. Filtr Christiano-Fitzgeralda

Kolejnym przykładem podejścia do aproksymacji „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego $B(L) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_j L^j$ jest metoda Christiano-Fitzgeralda (1999), która ma zarówno cechy wspólne filtra Baxter-Kinga, jak i filtra Hodricka-Prescotta. Filtr Christiano-Fitzgeralda (filtr CF), podobnie jak filtr HP, umożliwia uzyskanie wyjściowego szeregu czasowego, który składa się z tej samej liczby obserwacji, co szereg wejściowy. Tym samym dla danej zmiennej – w wyniku zastosowania filtra CF – uzyskuje się szereg o takiej samej długości co szereg uzyskany filtrem HP. Ustawienie dolnej i górnej częstotliwości ucięcia pasmowo-przepustowego filtra CF odbywa się natomiast w analogiczny sposób jak w przypadku filtra BK. Podstawową cechą odróżniającą filtr CF od poprzednio opisanych filtrów jest wymóg określenia typu procesu generującego dane przed przystąpieniem do filtracji. Filtr CF wymaga określenia, czy poddawany dekompozycji szereg czasowy jest zmienną stacjonarną czy niestacjonarną. W przypadku niestacjonarności ważnym jest również określenie jej typu, a więc rozróżnienie pomiędzy przyrosto-stacjonarnością pierwszego rzędu (jeden pierwiastek jednostkowy) a trendo-stacjonarnością. Dla zmiennych przyrosto-stacjonarnych pierwszego rzędu, czyli zintegrowanych w stopniu pierwszym – $I(1)$, filtr CF wymaga uprzedniego usunięcia dryfu, o ile jest on obecny⁵⁷. Z kolei dla zmiennych trendo-

⁵⁷ Jeżeli obserwowalny szereg czasowy $\{x_t\}_{t=1}^T$ jest niestacjonarny i istnieje podejrzenie występowania dryfu, wówczas wartości szeregu czasowego oczyszczonego z dryfu przyjmują postać $y_t = x_t - (t-1)\hat{\mu}$ dla

stacjonarnych filtr CF wymaga usunięcia trendu deterministycznego (zazwyczaj liniowego). W przypadku zmiennych zintegrowanych w stopniu pierwszym filtr CF nosi nazwę filtra I(1), natomiast w przypadku zmiennych stacjonarnych nazywa się go filtrem I(0). Warto zauważyć, że do zmiennej trendo-stacjonarnej należy zastosować filtr I(0) po uprzednim oczyszczeniu zmiennej z trendu deterministycznego (powstała po usunięciu trendu zmienna jest stacjonarna). Analogicznie w przypadku zmiennej stacjonarnej wokół średniej, zastosowanie filtra I(0) musi być poprzedzone usunięciem średniej z szeregu czasowego poddawanego filtracji. Podobnie jak w przypadku filtra BK, filtr CF również wymaga, aby wejściowy szereg czasowy był oczyszczony z wahań sezonowych, z uwagi na występowanie efekt „wycieku” mocy spektralnej zgromadzonej na częstotliwościach sezonowych, co zostało zobrazowane w dalszej części (por. s. 117).

Procedura pasmowo-przepustowego filtra I(1) jest następująca. Niech szereg czasowy o skończonej próbie obserwacji $\{y_t\}_{t=1}^T$ będzie zmienną zintegrowaną w stopniu pierwszym, bez dryfu i pozbawioną wahań sezonowych. Wówczas estymacja składowej cyklicznej zmiennej y_t , a więc estymacja komponentu y_t^c , który ma moc jedynie w paśmie częstotliwości $\{[-\bar{\omega}, -\underline{\omega}] \cup [\underline{\omega}, \bar{\omega}]\} \in [-\pi, \pi]$, gdzie $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega} < \pi$, odbywa się za pomocą filtra I(1)⁵⁸. Estymator komponentu y_t^c wynikający z zastosowania filtra I(1) jest dany jako⁵⁹ (por. Christiano i Fitzgerald (1999), s. 6):

$$\hat{y}_t^c = \hat{B}_t(L)y_t, \text{ gdzie } \hat{B}_t(L) = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} L^j \text{ dla } t = 1, 2, \dots, T. \quad (3.47)$$

Warto zauważyć, że wagi $\hat{B}_{j,t}$ zależą od indeksu t i tym samym podlegają zmianom w czasie, podobnie jak zakres sumowania po j , który również zależy od czasu. Tak skonstruowany filtr I(1) jest więc filtrem asymetrycznym, co oznacza, że może on

$t = 1, 2, \dots, T$, gdzie wielkość $\hat{\mu} = (x_T - x_1)/(T-1)$ stanowi estymator dryfu. Usunięcie dryfu jest równoznaczne z usunięciem średniej pierwszych przyrostów szeregu x_t i ponownej integracji tak powstałej zmiennej, co w efekcie prowadzi do uzyskania zmiennej y_t , przyjmując warunek początkowy $y_1 = x_1$.

⁵⁸ Naturalnie wielkość τ_U oznacza okres odpowiadający dolnej częstotliwości ucięcia, tzn. $\underline{\omega} = 2\pi/\tau_U$, natomiast τ_L okres odpowiadający górnej częstotliwości ucięcia, tzn. $\bar{\omega} = 2\pi/\tau_L$, co tym samym oznacza, że $2 < \tau_L < \tau_U < +\infty$.

⁵⁹ Korespondujący estymator komponentu niecyklicznego jest dany jako różnica $y_t - \hat{y}_t^c$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ w przypadku zmiennej wejściowej oczyszczonej z dryfu oraz jako różnica $x_t - \hat{y}_t^c$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ w przypadku zmiennej wejściowej zawierającej dryf.

wprowadzać pewne przesunięcie fazowe komponentu cyklicznego w stosunku do wejściowego szeregu czasowego na początku i na końcu próby obserwacji. Własność ta została opisana w dalszej części (por. s. 117). Jedyne w przypadku t będącego środkiem próby obserwacji dla T nieparzystego, a więc dla $t = (T+1)/2$, mamy do czynienia z filtrem symetrycznym, a tym samym z zerowym przesunięciem fazowym dla każdej częstotliwości w paśmie opuszczanym przez filtr. Zestaw wag $\hat{B}_{j,t}$ dla ustalonego t stanowi rozwiązanie problemu poszukiwania minimum:

$$\min_{\hat{B}_{j,t}, j=-(T-t), \dots, t-1} E\left((y_t^c - \hat{y}_t^c)^2 \mid \{y_t\}_{t=1}^T\right) \text{ dla } t=1, 2, \dots, T. \quad (3.48)$$

Problem (3.48) może zostać równoważnie zapisany w dziedzinie częstotliwości jako:

$$\min_{\hat{B}_{j,t}, j=-(T-t), \dots, t-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| B(e^{-i\omega}) - \hat{B}_t(e^{-i\omega}) \right|^2 S_y(\omega) d\omega \text{ dla } t=1, 2, \dots, T, \quad (3.49)$$

gdzie $B(e^{-i\omega})$ oznacza wzmocnienie „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, $\hat{B}_t(e^{-i\omega})$ wzmocnienie aproksymowanego pasmowo-przepustowego filtra $I(1)$ ⁶⁰, natomiast $S_y(\omega)$ odpowiada pseudospektrum mocy procesu błędzenia losowego pierwszego rzędu dla którego wariancja procesu białego szumu jest jednostkowa. Tym samym dla filtra $I(1)$ pseudospektrum mocy procesu $\{y_t\}$ przyjmuje postać $S_y(\omega) = (2\pi)^{-1} (2 - 2\cos(\omega))^{-1}$ dla $\omega \in [-\pi, \pi]$. Wymagane jest ponadto, aby wzmocnienie filtra $I(1)$ przyjmowało wartość zera dla częstotliwości $\omega = 0$ w przypadku każdego t , ponieważ filtr ten ma usuwać z danych wejściowych trend stochastyczny wywołany obecnością pierwiastka jednostkowego, który jest powiązany właśnie z zerową częstotliwością. Tym samym warunkiem ograniczającym dla problemu (3.48)-(3.49) jest wymóg sumowalności wag do zera, tj. $\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} = 0$ dla $t=1, 2, \dots, T$, co zapewnia, że warunek $\hat{B}_t(e^{-i0}) = 0$ jest spełniony dla każdego t . Warto podkreślić, że problem (3.49) jest zbliżony do przypadku aproksymacji filtra pasmowo-przepustowego metodą Baxter-Kinga, z tą jednak różnicą, że mamy obecnie do czynienia z aproksymacją filtra, którego wagi podlegają zmianom w czasie, a ponadto przy aproksymacji uwzględnione są własności stochastyczne zmiennej $I(1)$, co bezpośrednio wynika z obecności

⁶⁰ Szczegółowy wzór dla wzmocnienia filtra CF został zamieszczony w dalszej części (por. s. 112).

w funkcji celu problemu (3.49) pseudospektrum mocy $S_y(\omega)$. W przypadku filtra BK problem poszukiwania minimum może zostać zapisany równoważnie do (3.43) w postaci

$$\min_{\hat{B}_j, j=-J, \dots, J} \int_{-\pi}^{\pi} |B(e^{-i\omega}) - \hat{B}_j(e^{-i\omega})|^2 S_y(\omega) d\omega, \text{ przy warunku ograniczającym } \sum_{j=-J}^J \hat{B}_j = 0, \text{ gdzie}$$

$$S_y(\omega) = (2\pi)^{-1}.$$

Zatem przy aproksymacji Baxter-Kinga charakterystyka stochastyczna I(1) nie występuje. Rozwiązaniem problemu (3.48)-(3.49) są następujące zestawy wag dla $t = 1, 2, \dots, T$:

$$\hat{B}_{j,t} = \begin{cases} \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-t-1} B_j & \text{dla } j = -(T-t), \\ B_j & \text{dla } j = -(T-t-1), -(T-t-2), \dots, t-2, \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{t-2} B_j & \text{dla } j = t-1, \end{cases} \quad (3.50)$$

gdzie wagi B_j odpowiadają wagom „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, por. wzory (2.58)-(2.59). Wagi filtra I(1) są więc takie same jak wagi „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, z wyjątkiem końca i początku próby obserwacji, gdzie mamy do czynienia z wagami zmodyfikowanymi, co zapewnia, że wagi filtra I(1) sumują się do zera dla każdego t , co oznacza, że filtr eliminuje trend stochastyczny i uzyskany komponent cykliczny jest stacjonarny.

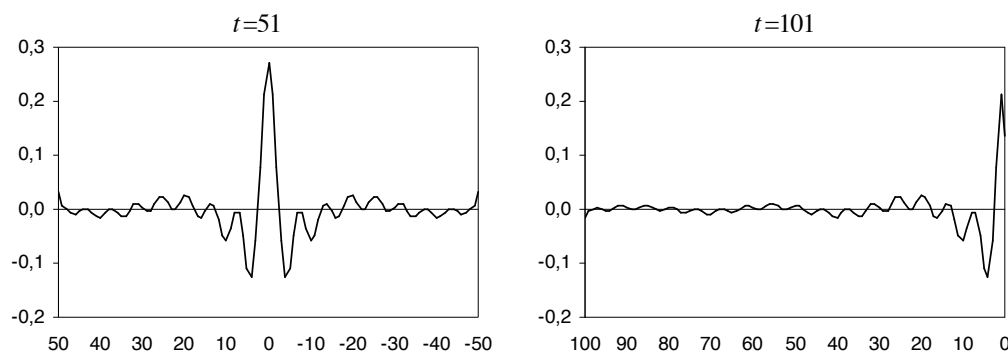
W analogiczny sposób do pasmowo-przepustowego filtra I(1) można skonstruować za pomocą metody Christiano-Fitzgeralda górno-przepustowy filtr I(1). W tym przypadku należy jedynie zastąpić wagi „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego przez wagi „idealnego” filtra górno-przepustowego, por. wzór (2.65), co jest równoważne z ustawieniem górnej częstotliwości ucięcia filtra pasmowo-przepustowego na poziomie π . W przypadku dolno-przepustowego filtra I(1) konstruowanego metodą Christiano-Fitzgeralda, oprócz zamiany na wagi „idealnego” filtra dolno-przepustowego, por. wzór (2.63), należy również dokonać zmian w kalkulacji wag dotyczących końców próby obserwacji w celu spełnienia warunku sumowalności wag do jedności. Jest to wynikiem zmiany warunku ograniczającego dla problemu optymalizacyjnego typu (3.49) na sumowalność wag do jedności⁶¹.

⁶¹ W przypadku dolno-przepustowego filtra I(1), czyli $\hat{B}_t(L) = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} L^j$ dla $t = 1, 2, \dots, T$, wagi dotyczące końcowych obserwacji przyjmują odpowiednio postać $\hat{B}_{-(T-t),t} = (1 + B_0)/2 - \sum_{j=0}^{T-t-1} B_j$ oraz

Rysunek 3.12 przedstawia wagi pasmowo-, górno- i dolno-przepustowego filtra I(1) w przypadku szeregu czasowego o nieparzystej próbie obserwacji $T = 101$ dla środkowej obserwacji $t = 51$ oraz końcowej $t = 101$. Gdy $t = 51$, waga przypadająca dla $j = 50$ odpowiada obserwacji y_1 , natomiast waga dla $j = -50$ obserwacji y_{101} . Podobnie gdy $t = 101$ waga dla $j = 100$ odpowiada obserwacji y_1 , a waga dla $j = 0$ obserwacji y_{101} . Dla $t = 1$ wagi stanowiłyby lustrzane odbicie względem $j = 0$ wag dla $t = 101$, natomiast ich indeksacja przebiegałaby od 0 do -100. Naturalnie podobna własność zachodzi dla pozostałych t . W każdym przypadku prezentowanym na rysunku 3.12 przyjęto, że częstotliwość ucięcia odpowiada okresowi $\tau_U = 32$ kwartały, dodatkowo w przypadku pasmowo-przepustowego filtra I(1) przyjęto, że górna częstotliwość ucięcia wynika z okresu $\tau_L = 6$ kwartałów.

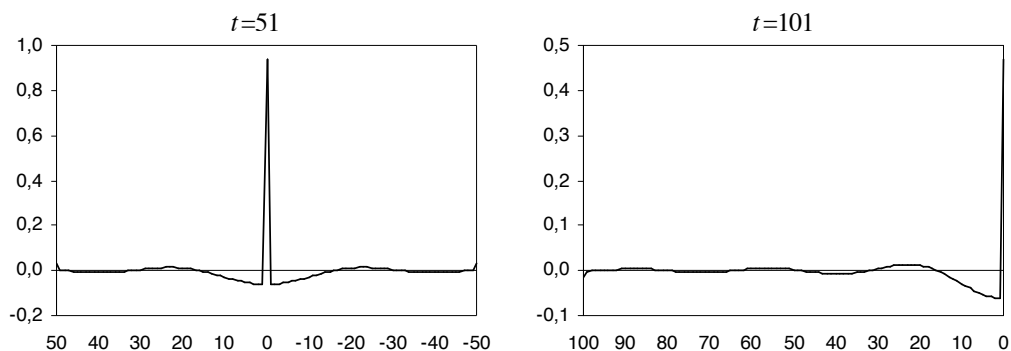
Rysunek 3.12. Wagi filtrów typu I(1) dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) filtr pasmowo-przepustowy

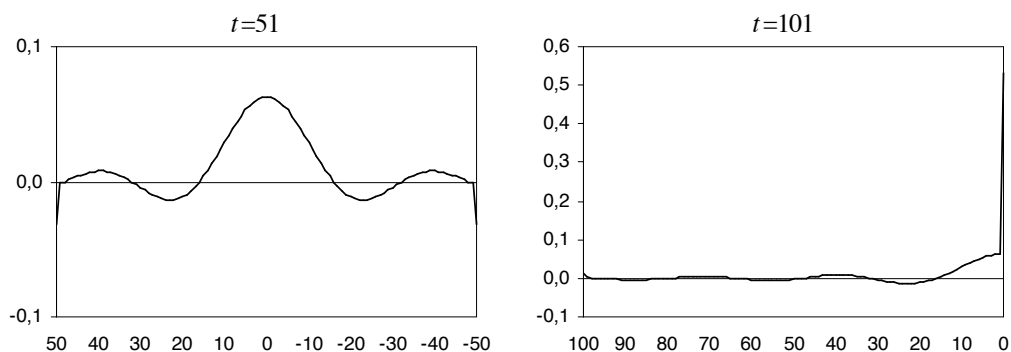


$\hat{B}_{t-1,t} = (1 + \underline{B}_0) / 2 - \sum_{j=0}^{t-2} \underline{B}_j$ dla $t = 1, 2, \dots, T$, gdzie wagi $\underline{B}_j$ odpowiadają „idealnemu” filtrowi dolno-przepustowemu. Pozostałe wagi $\hat{B}_{j,t}$ dla $j = -(T-t-1), -(T-t-2), \dots, t-2$ oraz $t = 1, 2, \dots, T$ są takie same jak wagi „idealnego” filtra dolno-przepustowego. Tym samym warunek $\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} = 1$ jest spełniony dla każdego t . Wagi dolno- i górno-przepustowego filtra I(1) są ze sobą powiązane poprzez analogiczne relacje jak miało to miejsce w przypadku wag filtrów HP do ekstrakcji składowej trendu i cyklu. Należy podkreślić, że w przypadku, gdy poddawany filtracji dolno-przepustowym filtrem I(1) wejściowy szereg czasowy został oczyszczony z dryfu, uzyskiwany w wyniku filtracji wyjściowy szereg czasowy trendu odnosi się również do zmiennej oczyszczonej. W celu uzyskania komponentu trendu adekwatnego do wejściowego szeregu czasowego zawierającego dryf, jest wymagane jego ponowne uwzględnienie w szeregu czasowym uzyskanym w wyniku filtracji. W tym celu do komponentu trendu należy dodać zmienną postaci $(t-1)\hat{\mu}$ dla $t = 1, 2, \dots, T$, gdzie wielkość $\hat{\mu}$ stanowi estymator dryfu wejściowego szeregu czasowego.

b) filtr górno-przepustowy



c) filtr dolno-przepustowy



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy wag, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez wagi.

Źródło: opracowanie własne.

Każdy filtr CF, tak jak filtr HP, może zostać zapisany w postaci macierzowej. Niech $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_T]'$ oznacza $T \times 1$ wymiarowy wektor obserwacji zmiennej y_t , natomiast $\hat{\mathbf{y}}^c = [\hat{y}_1^c \ \hat{y}_2^c \ \dots \ \hat{y}_T^c]'$ będzie $T \times 1$ wymiarowym wektorem składającym się z obserwacji składowej cyklicznej zmiennej y_t uzyskanej pasmowo-przepustowym filtrem I(1). Wówczas macierz $\hat{\mathbf{B}} = [b_{it}]$ wymiaru $T \times T$, której wiersze stanowią zestawy wag filtra I(1) dla każdego t , opisuje zależność pomiędzy wektorem $\hat{\mathbf{y}}^c$ i wektorem $\mathbf{y}$, która wyraża się analogicznie jak w przypadku filtra HP jako:

$$\hat{\mathbf{y}}^c = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{y}. \quad (3.51)$$

Wykorzystując własność symetryczności wag „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego,

$B_{-j} = B_j$, elementy b_{th} macierzy $\hat{\mathbf{B}}$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ mogą zostać zapisane jako:

$$b_{th} = \begin{cases} \hat{B}_{t-1,t} = \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{t-2} B_j & \text{dla } h = 1, \\ \hat{B}_{t-h,t} = B_{|t-h|} & \text{dla } h = 2, 3, \dots, T-1, \\ \hat{B}_{-(T-t),t} = \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-t-1} B_j & \text{dla } h = T. \end{cases} \quad (3.52)$$

Przykładowo dla T nieparzystego ogólna postać macierzy $\hat{\mathbf{B}}$ jest dana jako:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{B_0}{2} & B_1 & B_2 & \dots & B_{T-7} & B_{T-6} & B_{T-5} & B_{T-4} & B_{T-3} & B_{T-2} & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-2} B_j \\ -\frac{B_0}{2} & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{T-7} & B_{T-6} & B_{T-5} & B_{T-4} & B_{T-3} & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-3} B_j \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^1 B_j & B_1 & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{T-7} & B_{T-6} & B_{T-5} & B_{T-4} & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-4} B_j \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^2 B_j & B_2 & B_1 & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{T-7} & B_{T-6} & B_{T-5} & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-5} B_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-3} B_j & B_{T-3} & \dots & B_2 & B_1 & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{T-3} & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-3} B_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-5} B_j & B_{T-5} & B_{T-6} & B_{T-7} & \dots & B_2 & B_1 & B_0 & B_1 & B_2 & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^2 B_j \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-4} B_j & B_{T-4} & B_{T-5} & B_{T-6} & B_{T-7} & \dots & B_2 & B_1 & B_0 & B_1 & \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^1 B_j \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-3} B_j & B_{T-3} & B_{T-4} & B_{T-5} & B_{T-6} & B_{T-7} & \dots & B_2 & B_1 & B_0 & -\frac{B_0}{2} \\ \frac{B_0}{2} - \sum_{j=0}^{T-2} B_j & B_{T-2} & B_{T-3} & B_{T-4} & B_{T-5} & B_{T-6} & B_{T-7} & \dots & B_2 & B_1 & \frac{B_0}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Macierz powstała w wyniku usunięcia pierwszego i ostatniego wiersza oraz pierwszej i ostatniej kolumny macierzy $\hat{\mathbf{B}}$, zarówno dla parzystej, jak i nieparzystej liczby obserwacji T , jest macierzą symetryczną, a na jej głównej przekątnej leżą wagi B_0 . W przypadku macierzy (3.53) środkowy wiersz, czyli wiersz odpowiadający $t = (T+1)/2$ dla T nieparzystego, opisuje filtr symetryczny. Suma elementów t -tego wiersza macierzy $\hat{\mathbf{B}}$ jest równa zero, tzn. $\sum_{h=1}^T b_{th} = 0$ dla $t = 1, 2, \dots, T$, z kolei elementy składające się na h -tą kolumnę macierzy $\hat{\mathbf{B}}$

nie sumują się do zera, tzn. $\sum_{t=1}^T b_{th} \neq 0$ dla $h=1,2,\dots,T$. Brak spełnienia warunku sumowalności do zera elementów kolumnowych macierzy $\hat{\mathbf{B}}$ bezpośrednio implikuje wrażliwość filtra I(1) na obecność dryfu w dekomponowanej zmiennej, dlatego też wymaga się jego usunięcia przed filtracją, jak również brak możliwości estymacji stacjonarnego komponentu cyklicznego zmiennej posiadającej dwa pierwiastki jednostkowe, czyli zmiennej I(2). Problem ten nie występuje w przypadku filtra HP i BK. Przypomnijmy, że zarówno elementy wierszowe, jak i kolumnowe macierzy typu (3.53) w przypadku górnoprzepustowego filtra HP sumują się do zera, kolejno dla każdego t i h , co oznacza, że filtr ten jest w stanie eliminować dwa pierwiastki jednostkowe oraz, że nie jest wrażliwy na obecność dryfu w wejściowym szeregu czasowym. Z kolei w przypadku filtra BK mamy do czynienia z filtrem symetrycznym o stałych w czasie wagach sumujących się do zera dla każdego $t = 1+J, 2+J, \dots, T-J$, co tym samym implikuje brak wrażliwości tego filtra na obecność dryfu i zdolność usuwania do dwóch pierwiastków jednostkowych.

Pasmowo-przepustowy filtr I(0) jest skonstruowany analogicznie do pasmowo-przepustowego filtra I(1). Filtr I(0) jest również asymetryczny i dany równaniem (3.47), z tą jednak różnicą, że wszystkie jego wagi są takie same jak wagi „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego, tzn. $\hat{B}_{jt} = B_j$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ oraz $j = -(T-t), -(T-t-1), \dots, t-1$. Wagi te są rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego postaci (3.49) z tą jednak różnicą, że spektrum mocy przyjmuje postać $S_y(\omega) = (2\pi)^{-1}$ dla wszystkich częstotliwości ω oraz nie jest nałożony warunek ograniczający, który wymusza sumowalność wag do zera⁶². Przy aproksymacji pasmowo-przepustowego filtra I(0) nie wymaga się spełnienia tego warunku, ponieważ filtr ten jest przeznaczony do dekompozycji zmiennych stacjonarnych, których spektra mocy dla częstotliwości $\omega = 0$ są skończone (brak pierwiastka jednostkowego)⁶³. W zapisie macierzowym filtra I(0) mamy do czynienia z symetryczną macierzą typu $\hat{\mathbf{B}}$, której główna przekątna zawiera wagi B_0 . Podobnie w tym przypadku jedynie dla T nieparzystego i $t = (T+1)/2$ filtr I(0) jest symetryczny. W przypadku filtra I(0) zarówno elementy wierszy, jak i kolumn macierzy $\hat{\mathbf{B}}$ nie sumują się do zera, co również oznacza, że wzmocnienie filtra

⁶² Warto zauważyć, że dla symetrycznego filtra I(0) uwzględnienie warunku sumowalności wag do zera dałoby w rezultacie tę samą aproksymację co metoda Baxter-Kinga.

⁶³ Przypomnijmy, że w przypadku „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego wagi faktycznie sumują się do zera, jednakże jest to suma postaci $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} B_j = 0$, a więc każda część tej sumy dla pewnego zakresu indeksów j , różnego od $j = -\infty, \dots, +\infty$, jest różna od zera.

$I(0)$ jest różne od zera dla $\omega = 0$ w przypadku każdego t . Również na bazie metodologii filtra $I(0)$ możliwe jest konstruowanie filtra górno- i dolno-przepustowego. Wagi tego typu filtrów $I(0)$ są takie same jak w przypadku odpowiednich filtrów „idealnych”⁶⁴.

Warto podkreślić, że Christiano i Fitzgerald (1999) rozważają również inne niż filtry asymetryczne typy aproksymacji „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego. Wśród rozważanych przez autorów przypadków można również odnaleźć specyfikację równoważną do aproksymacji Baxter-Kinga oraz inne typy filtrów symetrycznych, których „szerokość” może zmieniać się wraz z czasem. Niemniej jednak autorzy rekomendują stosowanie pasmowo-przepustowego filtra typu $I(1)$ lub $I(0)$ w zależności od występowania w danym szeregu czasowym pierwiastka jednostkowego na zerowej częstotliwości. Niewątpliwą zaletą tego typu filtrów jest to, że umożliwiają one uzyskanie komponentu cyklicznego, który składa się z tej samej liczby obserwacji co szereg wejściowy. Trzeba jednak pamiętać, że komponent cykliczny uzyskiwany za pomocą filtra CF podlega rewizjom w czasie w miarę dostępności nowych obserwacji wejściowego szeregu czasowego. Podobny problem dotyczył filtra HP, który tak jak filtr CF jest filtrem asymetrycznym. Jedynie w przypadku filtra BK problem rewizji estymatora komponentu cyklicznego w czasie nie występuje, ponieważ dla każdej obserwacji t mamy w tym przypadku do czynienia z filtrem symetrycznym. Należy również pamiętać, że jakość estymacji komponentu cyklicznego za pomocą filtra CF przy końcach próby obserwacji może być obciążona stosunkowo dużym błędem, podobnie jak w przypadku filtra HP. W celu zobrazowania tego problemu w przypadku filtra CF, rozważymy jego reprezentację w dziedzinie częstotliwości. Wzmocnienie filtra CF⁶⁵ jest zdefiniowane jako transformata Fouriera (pomijany jest czynnik $1/2\pi$) wielomianu $\hat{B}_t(L)$, a więc jest to funkcja $\hat{B}_t(z)$ dla $z = e^{-i\omega}$, która zależy od indeksu t . Dla $t = 1, 2, \dots, T$ wzmocnienie filtra CF przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} G_{\hat{B}_t}(\omega) &\equiv \hat{B}_t(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} e^{-i\omega j} = \\ &= \Re G_{\hat{B}_t}(\omega) + i \Im G_{\hat{B}_t}(\omega) = \\ &= \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \cos(\omega j) - i \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \sin(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

⁶⁴ W przypadku górno-przepustowego filtra $I(0)$ suma wag dla każdego t jest różna od zera, natomiast w przypadku dolno-przepustowego filtra $I(0)$ suma ta dla wszystkich t pozostaje różna od jedności.

⁶⁵ Prezentowany opis jest właściwy zarówno dla filtra $I(1)$, jak i $I(0)$.

Jedynie w przypadku T nieparzystego dla środkowej obserwacji $t = (T+1)/2$, wzmocnienie przyjmuje wartości rzeczywiste. W pozostałych przypadkach, jak również dla $t = 1, 2, \dots, T$, gdzie T jest parzyste, wzmocnienie przyjmuje wartości zespolone. Część rzeczywista i urojona wzmocnienia dla $t = 1, 2, \dots, T$ przyjmują odpowiednio postać:

$$\Re G_{\hat{B}_t} = \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \cos(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.55)$$

$$\Im G_{\hat{B}_t} = - \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \sin(\omega j) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.56)$$

W celu zobrazowania zachowania się filtra CF w dziedzinie częstotliwości należy poddać analizie moduł wzmocnienia $|G_{\hat{B}_t}(\omega)|$, który przyjmuje wartości rzeczywiste. Moduł wzmocnienia filtra CF jest funkcją parzystą, która dla $t = 1, 2, \dots, T$ jest dana jako:

$$\begin{aligned} |G_{\hat{B}_t}(\omega)| &= \left(\Re G_{\hat{B}_t}(\omega)^2 + \Im G_{\hat{B}_t}(\omega)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\left(\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \cos(\omega j) \right)^2 + \left(\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \sin(\omega j) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Naturalnie funkcja przenoszenia mocy filtra CF jest kwadratem modułu wzmocnienia, tj. $|G_{\hat{B}_t}(\omega)|^2$. Z kolei przesunięcie fazowe filtra CF, będące funkcją nieparzystą, jest dane dla $t = 1, 2, \dots, T$ w następujący sposób:

$$\varphi_{\hat{B}_t}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im G_{\hat{B}_t}(\omega)}{\Re G_{\hat{B}_t}(\omega)} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{- \sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \sin(\omega j)}{\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \hat{B}_{j,t} \cos(\omega j)} \right) \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.58)$$

Dzięki wykorzystaniu modułu wzmocnienia i przesunięcia fazowego można zapisać wzmocnienie filtra CF w postaci wykładniczej dla $t = 1, 2, \dots, T$, czyli:

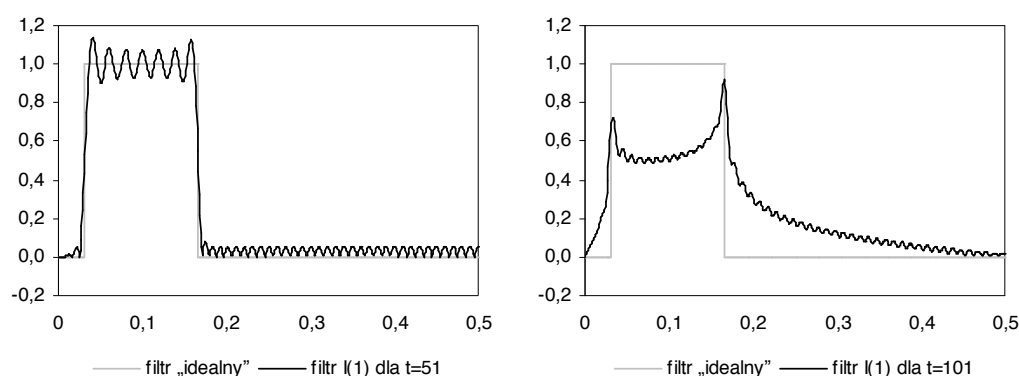
$$G_{\hat{B}_t}(\omega) = |G_{\hat{B}_t}(\omega)| e^{i\varphi_{\hat{B}_t}(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (3.59)$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach dla celów analizy kształtowania się modułu wzmocnienia i przesunięcia fazowego filtra CF, dziedzina częstotliwości może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$.

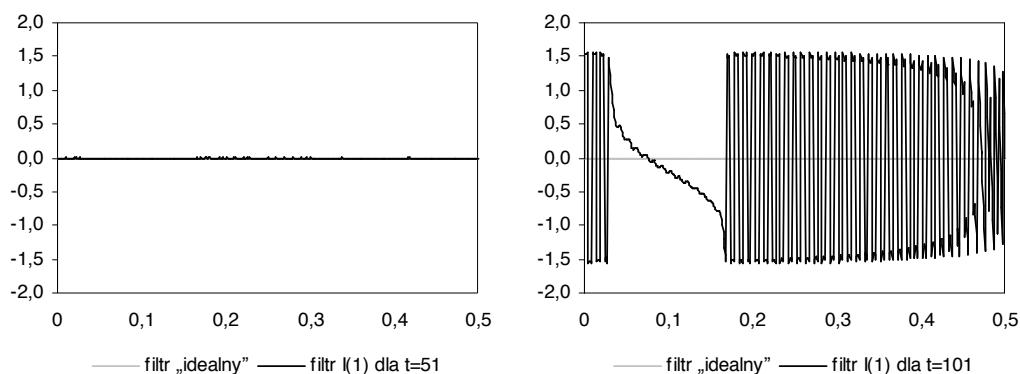
Rysunek 3.13 przedstawia moduł wzmocnienia i przesunięcie fazowe pasmowo-przepustowego filtra I(1) w przypadku $T = 101$ dla środkowej obserwacji $t = 51$ i ostatniej $t = 101$. Dodatkowo na rysunku zamieszczono te same funkcje dla „idealnego” filtra pasmowo-przepustowego. Rysunek 3.14 przedstawia natomiast analogiczną sytuację w przypadku pasmowo-przepustowego filtra I(0). W każdym przypadku przyjęto, że dolna częstotliwość ucięcia odpowiada okresowi $\tau_U = 32$ kwartały, natomiast górna okresowi $\tau_L = 6$ kwartałów. Na rysunku 3.15 przedstawiono analogiczne miary dla dolno- i górno-przepustowych filtrów I(1) oraz I(0) w przypadku $T = 101$. Częstotliwość ucięcia dla każdego z tych filtrów odpowiada okresowi $\tau_U = 32$ kwartały. Z uwagi na to, że przesunięcia fazowe w przypadku rozważanych filtrów symetrycznych, tj. dla $t = 51$, są równe zero dla wszystkich częstotliwości ω , nie uwzględniono ich na rysunku 3.15. Warto zauważyć, że w każdym przypadku moduł wzmocnienia danego filtra dla $t = 1$ miałby analogiczny przebieg jak dla $t = 101$. W przypadku przesunięcia fazowego dla $t = 1$ mielibyśmy natomiast do czynienia z lustrzanym odbiciem względem osi horyzontalnej danego wykresu dla $t = 101$. Własności te wynikają bezpośrednio ze wzorów (3.57)-(3.58) oraz schematu wag na początku i końcu próby. Naturalnie analogiczne własności zachodzą dla pozostałych t .

Rysunek 3.13. Pasmowo-przepustowy filtr I(1) dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) moduł wzmocnienia



b) przesunięcie fazowe

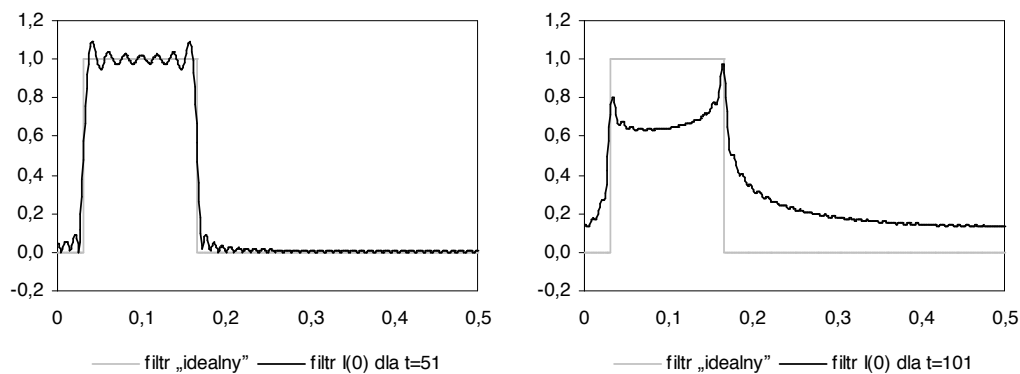


Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez moduły wzmocnień i przesunięcia fazowe.

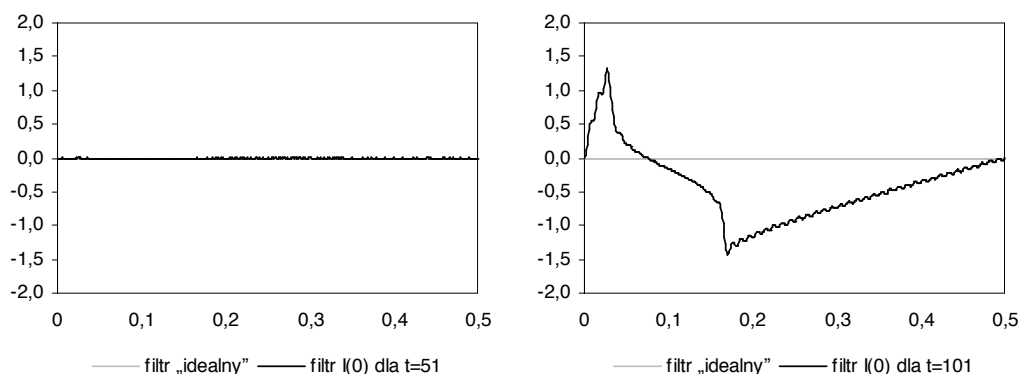
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.14. Pasmowo-przepustowy filtr I(0) dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) moduł wzmocnienia



b) przesunięcie fazowe

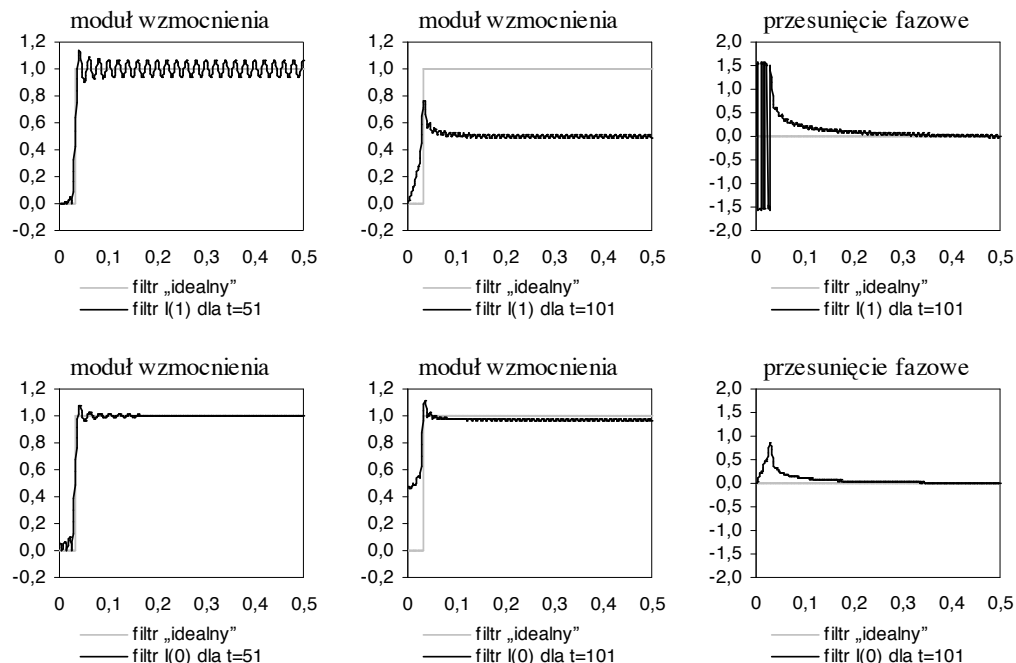


Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez moduły wzmocnień i przesunięcia fazowe.

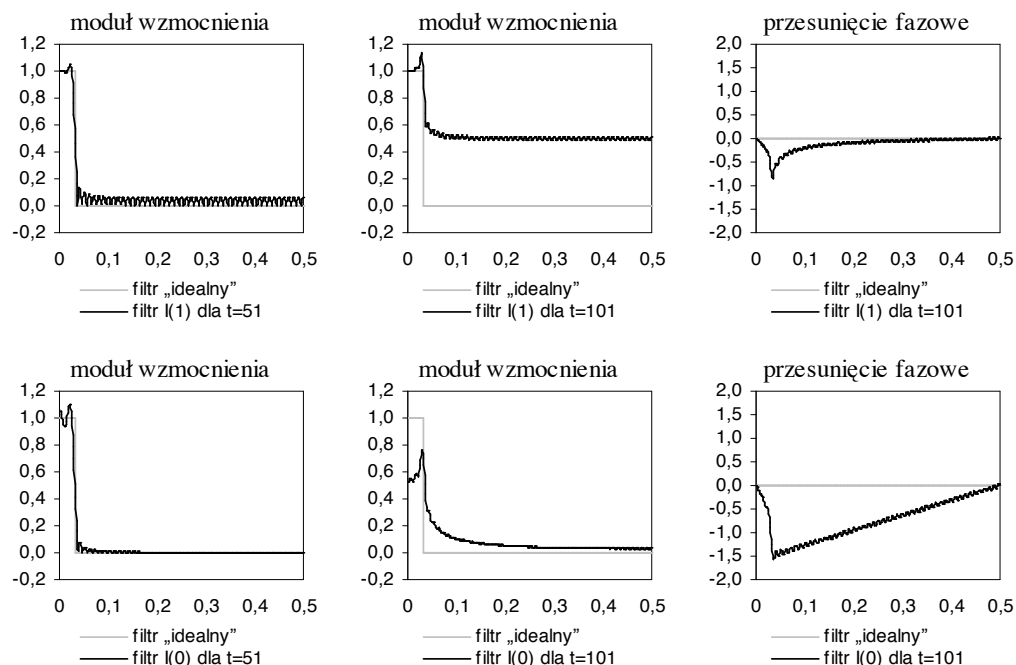
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.15. Górno- i dolno-przepustowe filtry $I(1)$ oraz $I(0)$ dla szeregu czasowego o próbie obserwacji $T = 101$

a) filtry górno-przepustowe



b) filtry dolno-przepustowe



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają częstotliwości znormalizowane, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez moduły wzmocnień i przesunięcia fazowe.

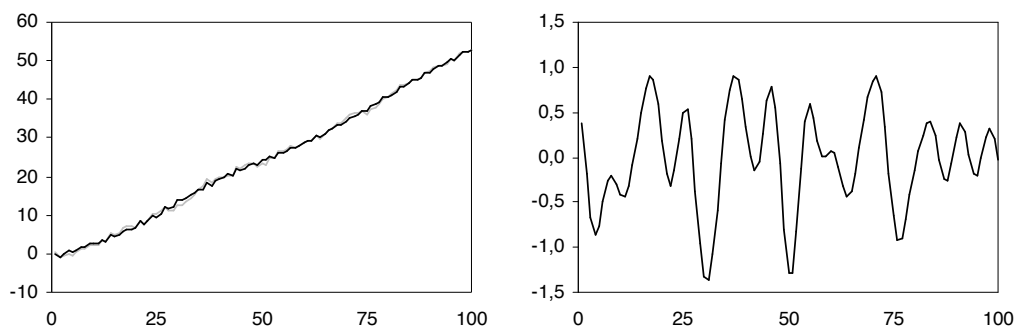
Źródło: opracowanie własne.

Powyższe wykresy wskazują na następujące własności związane z filtrami typu CF. Po pierwsze, filtry CF podobnie jak filtry BK charakteryzuje efekt Gibbsa. Po drugie, jakość estymacji poszukiwanych komponentów na początku i końcu próby obserwacji jest zdecydowanie gorsza niż w środku próby, na co wskazują moduły wzmocnień analizowanych filtrów CF (przy końcach próby obserwacji moduł wzmocnienia, a więc i funkcja przenoszenia mocy, danego filtra CF odbiega w istotny sposób od wzmocnienia danego filtra „idealnego”, które stanowi zarazem jego funkcję przenoszenia mocy). Po trzecie, pasmowo-przepustowe filtry CF przy końcach próby obserwacji charakteryzują się efektem „wycieku” mocy spektralnej zgromadzonej na częstotliwościach sezonowych, a więc potwierdza to, że filtry CF należy stosować do zmiennych, które zostały oczyszczone z wahań sezonowych. Przy końcach próby obserwacji pasmowo-przepustowe filtry CF charakteryzuje efekt „kompresji” w obrębie opuszczanego przez filtr pasma (moduł wzmocnienia, a tym samym i funkcja przenoszenia mocy, znacznie poniżej jedności), co niewątpliwie nie jest własnością pożądaną, ponieważ powoduje niedoszacowanie amplitud estymowanego komponentu. Po czwarte, przesunięcia fazowe wskazują również na występowanie przy końcach próby obserwacji problemu związanego z przesunięciem w czasie zmiennej uzyskiwanej na wyjściu w stosunku do zmiennej wejściowej. Własności te wskazują, że przy końcach próby obserwacji estymator komponentu uzyskanego za pomocą danego filtra CF jest obciążony, podobnie jak w przypadku filtra HP. Jest to bezpośrednio związane z tym, że filtr CF, tak jak filtr HP, jest filtrem typu asymetrycznego. Obciążenie estymatorów przy końcach próby obserwacji jest nieuniknione w przypadku filtrów asymetrycznych, niemniej jednak filtry te umożliwiają estymację komponentów składających się z tej samej liczby obserwacji co wejściowy szereg czasowy. Pomimo problemów przy końcach próby obserwacji, jakość estymatora danej składowej w przypadku filtra CF poprawia się w miarę zbliżania się do środka próby obserwacji (w ten sam sposób od początku, jak i od końca próby), tak jak miało to miejsce w przypadku filtra HP. Należy również przypomnieć, że aproksymacja danego „idealnego” filtra częstotliwościowego metodą CF jest optymalna w sensie minimalizacji błędu średniokwadratowego pomiędzy prawdziwym komponentem wejściowego szeregu czasowego a jego estymatorem.

Na rysunku 3.16 przedstawiono dekompozycję oczyszczonego z wahań sezonowych za pomocą metody TRAMO/SEATS przykładowego procesu SARIMA(0,1,1)(0,1,1)₄, czyli zmiennej y_t^{SA} (szereg czasowy liczący 100 obserwacji), na komponent niecykliczny i cykliczny przy użyciu pasmowo-przepustowego filtra I(1) typu CF. Identycznie jak w

przypadku filtra BK częstotliwości ucięcia zastosowanego filtra CF odpowiadają zakresowi wahań pomiędzy 6 a 32 kwartałami. Przed zastosowaniem filtra CF z danych wejściowych usunięto dryf. W lewym panelu rysunku 3.16 zamieszczono szereg czasowy estymatora składowej niecyklicznej na tle wejściowego szeregu czasowego, natomiast w prawym panelu przedstawiono szereg czasowy estymatora składowej cyklicznej.

Rysunek 3.16. Przykładowa dekompozycja zmiennej oczyszczonej z wahań sezonowych za pomocą metody TRAMO/SEATS na składową niecykliczną (lewy panel) i cykliczną (prawy panel) przy użyciu pasmowo-przepustowego filtra I(1) typu CF



Uwaga: osie horyzontalne wykresów przedstawiają indeksy obserwacji, z kolei osie wertykalne wykresów wartości przyjmowane przez szereg czasowy.

Źródło: opracowanie własne.

3.3. Modele strukturalne i dekompozycje typu „trend-cykl”

W tej części przedstawiono modele strukturalne, które służą do dekompozycji szeregu czasowego na składową trendu i składową cykliczną.

3.3.1. Modele SVAR

W celu przedstawienia sposobu wykorzystania modeli klasy strukturalnej wektorowej autoregresji (SVAR) do przeprowadzenia dekompozycji typu „trend-cykl” w kontekście pomiaru cyklu koniunkturalnego, wykorzystano metodę wyznaczania luki popytowej, która została zaproponowana przez Blancharda i Quaha (1988). W pierwszej kolejności opisano ogólne zagadnienia związane z modelami VAR i SVAR, a następnie szczegóły dotyczące metody identyfikacji i dekompozycji typu Blancharda-Quaha.

Model VAR rzędu p , który oznaczamy jako $VAR(p)$, jest wektorowym (wielowymiarowym) procesem autoregresji i stanowi uogólnienie jednowymiarowego procesu $AR(p)$. Załóżmy, że mamy do czynienia z n -wymiarowym procesem $VAR(p)$. Niech

wektor wymiaru $n \times 1$ będzie dany jako $\mathbf{y}_t = [y_{1,t} \ y_{2,t} \ \dots \ y_{n,t}]'$, gdzie $y_{i,t}$ oznacza i -tą zmienną zależną w systemie, opisywaną przez szereg czasowy o nieskończonej próbie obserwacji, tzn. $\{y_{i,t}\}_{t=-\infty}^{+\infty}$. Z założenia zmienne wchodzące w skład systemu VAR(p) powinny być stacjonarne, ponieważ zapewnia to stabilność modelu⁶⁶. Ponadto niech elementy wektora wymiaru $n \times 1$ postaci $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]'$ oznaczają stałe danego równania systemu, a elementy wektora wymiaru $n \times 1$ danego jako $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_{1,t} \ \varepsilon_{2,t} \ \dots \ \varepsilon_{n,t}]'$ odpowiadają składnikom losowym systemu, o których zakłada się, że spełniają warunek $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim WN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ ⁶⁷, czyli $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s') = \mathbf{0}$ dla $t \neq s$ oraz $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Omega}$ dla $t = s$, gdzie symetryczna i dodatnio określona macierz $\boldsymbol{\Omega}$ wymiaru $n \times n$ stanowi macierz wariancji-kowariancji składników losowych. Elementy diagonalne macierzy $\boldsymbol{\Omega}$ oznaczają wariancje składników losowych tzn. $\sigma_{ii}^2 = \text{var}(\varepsilon_{i,t})$, natomiast elementy pozadiagonalne oznaczają kowariancje pomiędzy odpowiednimi składnikami losowymi, tzn. $\sigma_{ij} = \text{cov}(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t})$ dla $i \neq j$. Ponadto niech elementy macierzy $\boldsymbol{\Phi}(L)$ wymiaru $n \times n$ będą dane jako wielomiany względem operatora opóźnień L , bez wyrazów wolnych, postaci $\phi_{ij}(L) = \sum_{k=1}^p \phi_{k,ij} L^k$, gdzie parametr $\phi_{k,ij}$ oznacza parametr autoregresyjny przy k -tym opóźnieniu j -tej zmiennej w i -tym równaniu systemu, a p oznacza rząd opóźnień modelu. Wówczas model VAR(p) może zostać zapisany w postaci:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \boldsymbol{\Phi}(L)\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (3.60)$$

Warto zauważyć, że macierz $\boldsymbol{\Phi}(L)$ może zostać równoważnie zapisana jako $\boldsymbol{\Phi}(L) = \sum_{k=1}^p \boldsymbol{\Phi}_k L^k$, gdzie $\boldsymbol{\Phi}_k$ oznacza k -tą macierz wymiaru $n \times n$, której elementy stanowią naturalnie parametry autoregresyjne przy k -tym opóźnieniu j -tej zmiennej w i -tym równaniu systemu, tzn. parametry $\phi_{k,ij}$. W związku z powyższym model VAR(p) może zostać zapisany równoważnie do (3.60) jako:

⁶⁶ Warunki stabilności modelu VAR(p) opisano w dalszej części (por. s. 121).

⁶⁷ W przypadku estymacji modelu VAR(p) na podstawie wektora $\mathbf{y}_t$ dla $t = 1, 2, \dots, T$ zakłada się, że wektor składników losowych systemu stanowi wielowymiarowy Gaussowski proces białego szumu, tzn. $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i.i.d. N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ (por. Hamilton (1994), s. 291).

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \sum_{k=1}^p \boldsymbol{\varphi}_k \mathbf{y}_{t-k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (3.61)$$

Przy estymacji powyższego modelu dla szeregów czasowych o skończonej próbie obserwacji, czyli zmiennych $\{y_{i,t}\}_{t=1}^T$ dla $i=1,2,\dots,n$, rząd opóźnień p jest ustalany na podstawie kryteriów informacyjnych (np. AIC, SIC, FPE czy HQ), natomiast estymatory największej wiarygodności dla parametrów powyższego modelu są uzyskiwane metodą najmniejszych kwadratów (por. Hamilton (1994), s. 293). Oszacowany model powinien być poddany ocenie diagnostycznej, m.in. pod kątem sprawdzenia jego stabilności, weryfikacji hipotezy o braku autokorelacji składników losowych (np. test Portmanteau autokorelacji reszt modelu), czy też weryfikacji hipotezy o normalności rozkładu reszt (test Jarque'a-Bera).

W celu przedstawienia warunków stabilności modelu VAR(p) rozważymy jego zapis w przestrzeni stanów. Każdy system VAR(p) może zostać zapisany w reprezentacji przestrzeni stanów jako model VAR(1). Niech będą dane wektory wymiaru $np \times 1$ postaci $\mathbf{Y}_t = [\mathbf{y}_t \ \mathbf{y}_{t-1} \ \dots \ \mathbf{y}_{t-(p-1)}]'$, $\boldsymbol{\kappa} = [\mathbf{c} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]'$, oraz $\boldsymbol{\eta}_t = [\boldsymbol{\varepsilon}_t \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]'$. Ponadto niech będą dane macierze $\boldsymbol{\Phi}$ i $\mathbf{Q}$ wymiaru $np \times np$, które są zapisywane jako:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 & \boldsymbol{\varphi}_3 & \dots & \boldsymbol{\varphi}_p \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Wówczas reprezentacja VAR(p) w przestrzeni stanów jako VAR(1) jest dana w następujący sposób:

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 & \boldsymbol{\varphi}_3 & \dots & \boldsymbol{\varphi}_p \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \\ \mathbf{y}_{t-3} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

gdzie $E(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{0}$, $E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_s') = \mathbf{0}$ dla $t \neq s$ oraz $E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_s') = \mathbf{Q}$ dla $t = s$. Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy Φ , czyli pierwiastki równania $\det(\mathbf{I}\lambda^p - \boldsymbol{\phi}_1\lambda^{p-1} - \boldsymbol{\phi}_2\lambda^{p-2} - \dots - \boldsymbol{\phi}_p) = 0$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową wymiaru $n \times n$, leżą wewnątrz koła jednostkowego (są co do modułu mniejsze od jedności), wówczas model VAR(p) jest stabilny (stacjonarny). Równoważnie, jeżeli wszystkie pierwiastki równania $\det(\mathbf{I} - \Phi(z)) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{I} - \boldsymbol{\phi}_1 z - \boldsymbol{\phi}_2 z^2 - \dots - \boldsymbol{\phi}_p z^p) = 0$ leżą poza kołem jednostkowym (są co do modułu większe od jedności), wówczas model VAR(p) jest stabilny (stacjonarny). Gdy model VAR(p) jest stabilny, możliwe jest przedstawienie go w postaci wektorowej średniej ruchomej o nieskończonym rzędzie opóźnień – VMA($+\infty$) (*ang. infinite vector moving average*). Przejście od postaci VAR(p) do VMA($+\infty$) jest następujące:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \Phi(L)\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.65a)$$

$$\mathbf{y}_t - \Phi(L)\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.65b)$$

$$(\mathbf{I} - \Phi(L))\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.65c)$$

$$\mathbf{y}_t = (\mathbf{I} - \Phi(1))^{-1} \mathbf{c} + (\mathbf{I} - \Phi(L))^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.65d)$$

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \Psi(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.65e)$$

gdzie $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \Phi(1))^{-1} \mathbf{c} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\phi}_1 - \boldsymbol{\phi}_2 - \dots - \boldsymbol{\phi}_p)^{-1} \mathbf{c} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]'$ jest $n \times 1$ wymiarowym wektorem średnich, a macierz $\Psi(L)$ wymiaru $n \times n$ przyjmuje postać $\Psi(L) = (\mathbf{I} - \Phi(L))^{-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} \Psi_h L^h$, gdzie elementy macierzy Ψ_h wymiaru $n \times n$, dane jako $\psi_{h,ij}$, stanowią parametry reprezentacji VMA($+\infty$). Dla $h=0$ spełniony jest warunek $\Psi_0 = \mathbf{I}$, z kolei dla $h=1,2,\dots$ macierz Ψ_h jest dana jako macierz wymiaru $n \times n$ znajdująca się w lewym górnym rogu macierzy Φ^h , czyli np. $\Psi_1 = \boldsymbol{\phi}_1$, $\Psi_2 = \boldsymbol{\phi}_1 \Psi_1 + \boldsymbol{\phi}_2$ itd. Ogólnie mamy zatem, że $\Psi_h = \sum_{k=1}^p \boldsymbol{\phi}_k \Psi_{h-k}$ dla $h=1,2,\dots$, gdzie $\Psi_0 = \mathbf{I}$ i $\Psi_h = \mathbf{0}$ dla $h < 0$. Ciąg macierzy $\{\Psi_h\}_{h=0}^{+\infty}$ jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ stabilność modelu VAR(p) implikuje spełnienie warunku zbieżności bezwzględnej dla wszystkich parametrów $\psi_{h,ij}$, tzn. $\sum_{h=0}^{+\infty} |\psi_{h,ij}| < +\infty$ dla $i=1,2,\dots,n$ oraz $j=1,2,\dots,n$ (por. Hamilton (1994), s. 263). Element $\psi_{h,ij}$ oznacza parametr przy h -tym opóźnieniu składnika losowego j -tej zmiennej w i -tym równaniu systemu i jest interpretowany jako odpowiedź i -tej zmiennej w systemie w momencie t na jednostkowe zaburzenie składnika losowego j -tej zmiennej w systemie z

okresu $t-h$, przy braku analogicznych zaburzeń ze strony składników losowych powiązanych z pozostałymi zmiennymi w systemie. Tym samym dla ustalonego i oraz j wykres obrazujący $\psi_{h,ij}$ jako funkcję h tworzy tzw. funkcję odpowiedzi impulsowej (*ang. impulse response function*). Formalnie funkcja odpowiedzi impulsowej dla ustalonego i oraz j jest dana jako $\psi_{h,ij} = \partial y_{i,t} / \partial \varepsilon_{j,t-h}$ dla $h = 0, 1, 2, \dots$ (por. Hamilton (1994), s. 319). Tym samym i -ty element wektora wymiaru $n \times 1$, będącego j -tą kolumną macierzy Ψ_h określa wartość funkcji odpowiedzi impulsowej i -tej zmiennej w momencie t na jednostkowe j -te zaburzenie $\varepsilon_{j,t-h}$ dla ustalonego opóźnienia $h = 0, 1, 2, \dots$, przy braku analogicznych zaburzeń ze strony pozostałych składników losowych. Stabilność modelu $\text{VAR}(p)$ oznacza, że wpływ danego zaburzenia na daną zmienną w systemie wygasa wraz ze wzrostem $|t-h|$, co jest równoważne ze stwierdzeniem, że $\lim_{h \rightarrow +\infty} \Phi^h = \mathbf{0}$, co tym samym oznacza, że wszystkie funkcje odpowiedzi impulsowej zbiegają do zera wraz ze wzrostem h . Z uwagi na to, że macierz wariancji-kowariancji Ω nie musi być diagonalna, co oznacza że składniki losowe z poszczególnych równań mogą być ze sobą skorelowane, funkcja odpowiedzi impulsowej $\psi_{h,ij}$ również zawiera w sobie efekt korelacji pomiędzy poszczególnymi zaburzeniami. Tym samym ważnym elementem w analizach bazujących na modelach VAR jest kwestia ortogonalizacji elementów wektora ε_t . Procedura ortogonalizacji elementów wektora ε_t sprowadza się do trójkątnej faktoryzacji dodatnio określonej macierzy symetrycznej Ω (*ang. triangular factorization of a positive definite symmetric matrix*). Zgodnie z tą procedurą macierz Ω może zostać zapisana jako $\Omega = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}'$, gdzie $\mathbf{P}$ jest jednoznacznie określoną dolną macierzą trójkątną wymiaru $n \times n$ z elementami o wartości 1 na głównej przekątnej, natomiast macierz $\mathbf{D}$ wymiaru $n \times n$ jest dodatnio określoną macierzą diagonalną (por. Hamilton (1994), s. 320). Przy użyciu macierzy $\mathbf{P}$ można skonstruować wektor ortogonalnych składników losowych $\mathbf{u}_t$ wymiaru $n \times 1$ (zwanych szokami fundamentalnymi lub strukturalnymi), który jest dany jako $\mathbf{u}_t = \mathbf{P}^{-1}\varepsilon_t$. Macierz $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = (\mathbf{P}^{-1})\Omega(\mathbf{P}^{-1})' = (\mathbf{P}^{-1})\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}'(\mathbf{P}^{-1})' = \mathbf{D}$ jest macierzą wariancji-kowariancji składników losowych danych wektorem $\mathbf{u}_t$. Element diagonalny macierzy $\mathbf{D}$, tzn. element $d_{ii}^2 = \text{var}(u_{i,t})$, stanowi wariancję składnika fundamentalnego $u_{i,t}$. Wykorzystując kolumny macierzy $\mathbf{P}$, tzn. wektory wymiaru $n \times 1$ dane jako $\mathbf{p}_j$, gdzie $j = 1, 2, \dots, n$, można skonstruować funkcje odpowiedzi impulsowej na zaburzenia fundamentalne, czyli tzw.

ortogonalizowane funkcje odpowiedzi impulsowej (*ang. orthogonalized impulse response functions*). Wartość takiej funkcji dla ustalonego opóźnienia $h = 0, 1, 2, \dots$, będąca odpowiedzią i -tej zmiennej w momencie t na j -te jednostkowe zaburzenie fundamentalne $u_{j,t-h}$, przy braku analogicznych zaburzeń ze strony pozostałych składników fundamentalnych, jest dana poprzez i -ty element wektora wymiaru $n \times 1$ postaci $\psi_h \mathbf{p}_j$. Z uwagi na to, że diagonalne elementy macierzy $\mathbf{D}$, która jest dodatnio określoną macierzą diagonalną, stanowią wariancje składników fundamentalnych danych przez wektor $\mathbf{u}_t$, elementy diagonalne macierzy $\mathbf{D}^{1/2}$, czyli elementy $d_{ii} = \text{var}(u_{i,t})^{1/2}$, stanowią odchylenia standardowe tych składników. Tym samym macierz wariancji-kowariancji $\mathbf{\Omega}$ może zostać poddana tzw. dekompozycji Cholesky'ego (por. Hamilton (1994), s. 323) i zapisana jako $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{P}' = \mathbf{V}\mathbf{V}'$, gdzie macierz $\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{1/2}$ wymiaru $n \times n$ jest określana mianem macierzy Cholesky'ego i stanowi dolną macierz trójkątną, której elementy diagonalne stanowią odchylenia standardowe szoków fundamentalnych danych wektorem $\mathbf{u}_t$. Wówczas możliwym jest zapisanie $n \times 1$ wymiarowego wektora ortogonalnych i znormalizowanych składników losowych postaci $\mathbf{e}_t = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{u}_t$. Macierz wariancji-kowariancji dla wektora składników losowych $\mathbf{e}_t$ jest macierzą jednostkową wymiaru $n \times n$, tzn. $E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_s') = \mathbf{I}$ dla $t = s$ (ortonormalizacja). Tym samym elementy wektora wymiaru $n \times 1$ postaci $\psi_h \mathbf{v}_j$, gdzie wektor $\mathbf{v}_j$ wymiaru $n \times 1$ odpowiada j -tej kolumnie macierzy $\mathbf{V}$, stanowią ortonormalizowane funkcje odpowiedzi impulsowej. Wartość takiej funkcji, dana przez i -ty element wektora $\psi_h \mathbf{v}_j$ dla ustalonego opóźnienia $h = 0, 1, 2, \dots$ stanowi odpowiedź i -tej zmiennej w momencie t na j -te jednostkowe ortonormalne zaburzenie $e_{j,t-h}$, przy braku analogicznych zaburzeń ze strony pozostałych składników ortonormalnych. Ponieważ $\psi_h \mathbf{v}_j = \psi_h \mathbf{p}_j d_{jj}$, i -ty element wektora $\psi_h \mathbf{v}_j$ określa wartość ortonormalizowanej funkcji odpowiedzi impulsowej dla ustalonego opóźnienia $h = 0, 1, 2, \dots$, będącą odpowiedzią i -tej zmiennej w momencie t na j -te zaburzenie fundamentalne $u_{j,t-h}$ o wartości jednego odchylenia standardowego składnika $u_{j,t}$, czyli wartości d_{jj} , przy braku analogicznych zaburzeń ze strony pozostałych składników fundamentalnych.

Z ortogonalizacją i ortonormalizacją szoków w ramach modelu VAR jest związana również tzw. dekompozycja wariancji (*ang. variance decomposition*), która ma na celu określenie wpływu danego zaburzenia strukturalnego na wariancję błędu prognozy modelu

VAR wraz z wydłużaniem horyzontu tej prognozy. Błąd prognozy modelu VAR na okres $t+h$, gdzie $h=1,2,\dots$, jest dany jako wektor wymiaru $n \times 1$ (por. Hamilton (1994), s. 323):

$$\mathbf{y}_{t+h} - \mathbf{y}_{t+h|t} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h} + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h-1} + \boldsymbol{\psi}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h-2} + \dots + \boldsymbol{\psi}_{h-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}. \quad (3.66)$$

Tym samym błąd średniokwadratowy dla h -okresowej prognozy jest dany jako macierz wymiaru $n \times n$:

$$MSE(\mathbf{y}_{t+h|t}) = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\psi}_1' + \boldsymbol{\psi}_2 \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\psi}_2' + \dots + \boldsymbol{\psi}_{h-1} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\psi}_{h-1}', \quad (3.67)$$

gdzie i -ty element diagonalny powyższej macierzy odpowiada błędowi średniokwadratowemu dla h -okresowej prognozy i -tej zmiennej systemu VAR. Dekompozycja wariancji pozwala na określenie wpływu danego zaburzenia fundamentalnego $u_{j,t}$ na powyższy błąd średniokwadratowy w ustalonym horyzoncie prognozy h . Z uwagi na to, że szoki $u_{j,t}$ są ortogonalne, można zapisać, że $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{P} \mathbf{u}_t = \mathbf{p}_1 u_{1,t} + \mathbf{p}_2 u_{2,t} + \dots + \mathbf{p}_n u_{n,t}$. Tym samym macierz wariancji-kowariancji $\boldsymbol{\Omega}$ może zostać zdekomponowana w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\Omega} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1' \text{var}(u_{1,t}) + \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2' \text{var}(u_{2,t}) + \dots + \mathbf{p}_n \mathbf{p}_n' \text{var}(u_{n,t}). \quad (3.68)$$

Wówczas błąd średniokwadratowy (3.67) może zostać zapisany w następujący sposób:

$$MSE(\mathbf{y}_{t+h|t}) = \sum_{j=1}^n \text{var}(u_{j,t}) (\mathbf{p}_j \mathbf{p}_j' + \boldsymbol{\psi}_1 \mathbf{p}_j \mathbf{p}_j' \boldsymbol{\psi}_1' + \boldsymbol{\psi}_2 \mathbf{p}_j \mathbf{p}_j' \boldsymbol{\psi}_2' + \dots + \boldsymbol{\psi}_{h-1} \mathbf{p}_j \mathbf{p}_j' \boldsymbol{\psi}_{h-1}'). \quad (3.69)$$

Wykorzystując j -ty element sumy (3.69), będący macierzą wymiaru $n \times n$, i sumę wszystkich elementów dla $j=1,2,\dots,n$, czyli macierz wymiaru $n \times n$ daną przez wzór (3.69), można określić tę część wariancji błędu prognozy, która została spowodowana j -tym zaburzeniem fundamentalnym, czyli $u_{j,t}$, w ustalonym horyzoncie prognozy h . Iloraz i -tego elementu diagonalnego macierzy będącej j -tym elementem sumy (3.69) i analogicznego elementu diagonalnego macierzy powstałej z sumy (3.69) określa część wariancji błędu prognozy i -tej zmiennej modelu w horyzoncie h powstałej w wyniku szoku strukturalnego $u_{j,t}$. Naturalnie suma tych ilorazów dla wszystkich zmiennych, tj. dla $i=1,2,\dots,n$, w ustalonym horyzoncie prognozy h jest równa jedności. Błąd średniokwadratowy dany wzorem (3.69) może zostać

równoważnie przedstawiony przy wykorzystaniu kolumn macierzy Cholesky'ego $\mathbf{V}$, czyli wektorów $\mathbf{v}_j = \mathbf{p}_j d_{jj}$, gdzie $d_{jj} = \text{var}(u_{j,t})^{1/2}$, tzn.:

$$MSE(\mathbf{y}_{t+h|t}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j' + \Psi_1 \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j' \Psi_1' + \Psi_2 \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j' \Psi_2' + \dots + \Psi_{h-1} \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j' \Psi_{h-1}'). \quad (3.70)$$

Ortogonalizacja i ortonormalizacja szoków stanowi kluczowy element w przypadku budowy modelu strukturalnego na bazie danego modelu VAR, czyli w przypadku budowy modelu SVAR na podstawie modelu VAR. Przykładowo, metoda dekompozycji Cholesky'ego jest wykorzystywana jako algorytm identyfikacji postaci strukturalnej SVAR, przy krótkookresowym i rekursywnym charakterze restrykcji narzucanych na system VAR. W przypadku identyfikacji SVAR za pomocą metody Cholesky'ego ważne jest uszeregowanie zmiennych w systemie (*ang. ordering*), które powinno być podyktowane przez teorię ekonomii w zależności od tego, jakie zjawisko ma być opisane przez model.

Na podstawie modelu VAR możliwe jest również przeprowadzenie analizy cross-spektralnej. Analiza ta w modelach VAR sprowadza się do parametrycznego oszacowania miar takich jak koherencja, korelacja dynamiczna, wzmocnienie i przesunięcie fazowe. Podstawą do oszacowania wyżej wymienionych wielkości jest spektrum mocy wektora zmiennych endogenicznych, czyli wektora $\mathbf{y}_t$. W przypadku 2-wymiarowego ($n = 2$) modelu VAR(p), gdzie $\mathbf{y}_t = [y_t \ x_t]'$, wektorowe spektrum mocy jest dane jako macierz postaci:

$$S_y(\omega) = \begin{bmatrix} S_y(\omega) & S_{yx}(\omega) \\ S_{xy}(\omega) & S_x(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{dla } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (3.71)$$

gdzie elementy diagonalne oznaczają spektra mocy zmiennych endogenicznych modelu, natomiast elementy pozadiagonalne stanowią ich cross-spektra mocy. Elementy diagonalne przyjmują wartości rzeczywiste, podczas gdy elementy pozadiagonalne wartości zespolone. Naturalnie, w celach analitycznych dziedzina częstotliwości również w tym przypadku może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi]$. Macierz (3.71) dla danej częstotliwości ω posiada reprezentację postaci (por. Hamilton (1994), s. 276):

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{I} - \Phi(e^{-i\omega}))^{-1} \Omega (\mathbf{I} - \Phi'(e^{i\omega}))^{-1}, \quad (3.72)$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową wymiaru 2×2 , $\mathbf{\Omega}$ odpowiada macierzy wariancji-kowariancji składników losowych, wymiaru 2×2 , natomiast macierze $\mathbf{\Phi}(e^{-i\omega})$ oraz $\mathbf{\Phi}'(e^{i\omega})$, wymiaru 2×2 , są dane kolejno jako $\mathbf{\Phi}(e^{-i\omega}) = \sum_{k=1}^p \mathbf{\Phi}_k e^{-i\omega k}$ oraz $\mathbf{\Phi}'(e^{i\omega}) = \sum_{k=1}^p \mathbf{\Phi}'_k e^{i\omega k}$, gdzie i stanowi jednostkę urojoną. Naturalnie $\mathbf{\Phi}_k$ oznacza k -tą macierz wymiaru 2×2 , której elementy są parametrami autoregresyjnymi modelu $\text{VAR}(p)$, por. wzór (3.60) i (3.61). Estymacja wektorowego spektrum mocy dla danej częstotliwości ω odbywa się poprzez wykorzystanie we wzorze (3.72) oszacowanych parametrów autoregresyjnych modelu $\text{VAR}(p)$ oraz korespondującego estymatora macierzy wariancji-kowariancji składników losowych. Na podstawie cross-spektrum mocy $S_{yx}(\omega)$ możliwe jest zdefiniowanie wzmocnienia, przesunięcia fazowego, koherencji oraz dynamicznego współczynnika korelacji⁶⁸ w analogiczny sposób jak w przypadku przedstawionym w części 2.3. Estymacja powyższych miar cross-spektralnych odbywa się na podstawie odpowiednich elementów, oszacowanych parametrycznie, macierzy $S_y(\omega)$ dla częstotliwości $\omega \in [0, \pi]$.

Model VAR może być traktowany jako postać zredukowana pewnego modelu strukturalnego SVAR . Jednoznaczna identyfikacja postaci SVAR na podstawie modelu VAR jest podyktowana adekwatną teorią ekonomii w zależności od tego, jakie zjawisko ekonomiczne jest opisywane przez model. Niech będzie dana nieosobliwa macierz $\mathbf{\Gamma}$ wymiaru $n \times n$, której elementy wyrażają bezpośrednie (natychmiastowe, tzn. w momencie t) zależności strukturalne pomiędzy zmiennymi w systemie. Wówczas postać strukturalna modelu $\text{VAR}(p)$, czyli model $\text{SVAR}(p)$, może zostać zapisana jako:

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_t = \mathbf{q} + \mathbf{A}(L) \mathbf{y}_t + \mathbf{e}_t, \quad (3.73)$$

gdzie $n \times 1$ wymiarowy wektor $\mathbf{y}_t = [y_{1,t} \quad y_{2,t} \quad \dots \quad y_{n,t}]'$ zawiera zmienne zależne modelu, wektor $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]'$ wymiaru $n \times 1$ zawiera stałe modelu, macierz $\mathbf{A}(L)$ wymiaru $n \times n$ przyjmuje postać $\mathbf{A}(L) = \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_k L^k$, gdzie $\mathbf{A}_k$ oznacza k -tą macierz wymiaru $n \times n$, której element typu $a_{k,ij}$ stanowi parametr autoregresyjny przy k -tym opóźnieniu j -tej zmiennej w i -tym równaniu systemu, natomiast wektor $\mathbf{e}_t = [e_{1,t} \quad e_{2,t} \quad \dots \quad e_{n,t}]'$ wymiaru $n \times 1$ zawiera strukturalne składniki losowe modelu. O strukturalnych składnikach losowych

⁶⁸ Analogiczne wielkości mogą zostać uzyskane na podstawie cross-spektrum mocy $S_{xy}(\omega)$.

danych wektorem $\mathbf{e}_t$ zakłada się, że $E(\mathbf{e}_t) = \mathbf{0}$ oraz, że ich macierz wariancji-kowariancji jest macierzą jednostkową wymiaru $n \times n$, tzn. $E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_s') = \mathbf{I}$ dla $t = s$, jak również, że $E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_s') = \mathbf{0}$ dla $t \neq s$. Z uwagi na to, że macierz Γ jest nieosobliwa postać strukturalna (3.73) może zostać sprowadzona do postaci zredukowanej, czyli do modelu VAR(p), który jest dany wzorami (3.60)-(3.61), ponieważ $\mathbf{c} = \Gamma^{-1} \mathbf{q}$, $\Phi(L) = \Gamma^{-1} \mathbf{A}(L)$, czyli $\boldsymbol{\phi}_k = \Gamma^{-1} \mathbf{A}_k$ dla $k = 1, 2, \dots, p$ oraz $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \Gamma^{-1} \mathbf{e}_t$. W celu identyfikacji modelu SVAR na podstawie VAR należy nałożyć co najmniej n^2 restrykcji, aby dokonać jednoznacznej identyfikacji parametrów postaci strukturalnej. Ortonormalizacja szoków w modelu (3.60) daje $n(n+1)/2$ restrykcji związanych z macierzą wariancji-kowariancji Ω składników losowych modelu VAR. Pozostałe $n(n-1)/2$ restrykcji w przypadku rekursywnego charakteru modelu jest związanych z elementami macierzy Γ . Przykładowo wspomniana wcześniej identyfikacja SVAR na podstawie restrykcji krótkookresowych wynikających z dekompozycji Cholesky'ego, daje w rezultacie model SVAR, w którym $\Gamma = \mathbf{V}^{-1}$, gdzie $\mathbf{V}$ jest macierzą Cholesky'ego. Wówczas model SVAR tego typu może zostać zapisany w postaci⁶⁹:

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_t = \mathbf{q} + \mathbf{A}(L) \mathbf{y}_t + \mathbf{e}_t, \quad (3.74)$$

gdzie $\mathbf{q} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{c}$, $\mathbf{A}(L) = \mathbf{V}^{-1} \Phi(L)$ oraz $\mathbf{e}_t = \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$. Macierz $\mathbf{V}$ jest dolną macierzą trójkątną, co tym samym oznacza, że daje to dodatkowe $n(n-1)/2$ restrykcji i model strukturalny (3.74) jest jednoznacznie identyfikowalny⁷⁰. W dalszej części przedmiotem zainteresowania jest algorytm identyfikacji SVAR, który opiera się na restrykcjach długookresowych, a dokładniej na metodzie identyfikacji Blancharda-Quaha.

Metoda Blancharda-Quaha (1988) opiera się na estymacji 2-wymiarowego ($n = 2$) modelu VAR(p), bez wektora stałych $\mathbf{c}$, dla zmiennej obrazującej oczyszczoną ze średniej stopę wzrostu realnego PKB oraz dla stopy bezrobocia, która również została oczyszczona ze

⁶⁹ Z uwagi na rekursywny charakter tego modelu jest on ogólnym przypadkiem systemu strukturalnego, który ma jedynie sens ekonomiczny w przypadku uszeregowania zmiennych zgodnie z przesłankami płynącymi z teorii ekonomii, co zależy od modelowanego zjawiska ekonomicznego.

⁷⁰ Warto podkreślić, że postać SVAR nie wymaga koniecznie ortonormalizacji szoków. W przypadku modelu SVAR, w którym macierz wariancji-kowariancji składników losowych jest diagonalna (macierz $\mathbf{D}$), a nie jednostkowa tak jak w przypadku algorytmu bazującego na dekompozycji Cholesky'ego, szoki są ortogonalne, ale nie znormalizowane. Oznacza to, że ortogonalizacja szoków daje $n(n-1)/2$ restrykcji na macierz wariancji-kowariancji Ω składników losowych modelu VAR. Zgodnie z propozycją Simsa (1980) kolejne $n(n-1)/2$ restrykcji w modelu o rekursywnym charakterze wynika z tego, że macierz Γ jest dolną macierzą trójkątną, a kolejne n restrykcji wynika z normalizacji elementów diagonalnych macierzy Γ (elementy diagonalne przyjmują wówczas wartość 1).

średniej⁷¹. Tempo wzrostu produktu jest dane jako $\Delta pkb_t = 100(\ln(PKB_t) - \ln(PKB_{t-1})) = pkb_t - pkb_{t-1}$, gdzie PKB_t odpowiada szeregowi czasowemu realnego PKB, wyrażonemu w jednostkach pieniężnych, po usunięciu wahań sezonowych. Stopa bezrobocia SB_t jest również oczyszczona z wahań sezonowych, ale nie jest poddawana transformacji logarytmicznej. Obydwie zmienne są oczyszczane ze średnich i tym samym modelowane zmienne są dane jako $\Delta y_t = \Delta pkb_t - E(\Delta pkb_t)$ oraz $ur_t = SB_t - E(SB_t)$ ⁷². Obydwie zmienne są stacjonarne⁷³, a więc i model VAR spełnia warunki stabilności, a w konsekwencji ma reprezentację VMA. Model VAR(p) typu Blancharda-Quaha jest dany zgodnie z (3.60)-(3.61) jako:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ ur_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,11} & \phi_{1,12} \\ \phi_{1,21} & \phi_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-1} \\ ur_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{2,11} & \phi_{2,12} \\ \phi_{2,21} & \phi_{2,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-2} \\ ur_{t-2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \phi_{p,11} & \phi_{p,12} \\ \phi_{p,21} & \phi_{p,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{t-p} \\ ur_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Identyfikacja postaci strukturalnej typu (3.73) na podstawie postaci zredukowanej (3.75) odbywa się poprzez nałożenie trzech restrykcji na macierz wariancji-kowariancji składników losowych oraz powiązanej z nimi jednej restrykcji długookresowej, co w sumie daje cztery restrykcje wymagane do jednoznacznej identyfikowalności modelu SVAR w przypadku systemu składającego się z dwóch zmiennych. Restrykcje dotyczące macierzy wariancji-kowariancji składników losowych Ω prowadzą do ortonormalizacji szoków, a tym samym macierz wariancji-kowariancji szoków strukturalnych jest jednostkowa, tzn. $E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t') = \mathbf{I}$. Naturalnie związek pomiędzy resztami modelu (3.75) a szokami strukturalnymi korespondującej postaci SVAR przyjmuje postać $\varepsilon_t = \Gamma^{-1} \mathbf{e}_t$, natomiast związek pomiędzy macierzą wariancji-kowariancji reszt a macierzą wariancji-kowariancji szoków strukturalnych wyraża się jako $\Omega = \Gamma^{-1} \mathbf{I} (\Gamma^{-1})'$. Wektor szoków strukturalnych jest dany jako $\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} e_t^D & e_t^S \end{bmatrix}'$, gdzie e_t^D oznacza szok popytowy, a e_t^S szok podażyowy. Restrykcja długookresowa polega na

⁷¹ W pracy Blancharda i Quaha (1988) z szeregu czasowego dynamiki realnego PKB usunięto średnie w dwóch podpróbach, natomiast z szeregu czasowego stopy bezrobocia usunięto trend liniowy.

⁷² Tym samym prawdą jest, że $E(\Delta y_t) = E(ur_t) = 0$. Warto również zauważyć, że usunięcie średniej z szeregu czasowego przyrostu produktu jest równoważne z usunięciem dryfu z szeregu czasowego poziomu produktu. Naturalnie poziom produktu po usunięciu dryfu jest reprezentowany przez zmienną y_t .

⁷³ Warto zauważyć, że poziom produktu jest zmienną zintegrowaną w stopniu pierwszym, tzn. $pkb_t \sim \mathbf{I}(1)$, a więc pierwszy przyrost tej zmiennej jest stacjonarny (wokół średniej), tzn. $\Delta pkb_t \sim \mathbf{I}(0)$, a tym samym $\Delta y_t \sim \mathbf{I}(0)$. Stopa bezrobocia jest natomiast zmienną stacjonarną (wokół średniej), tzn. $SB_t \sim \mathbf{I}(0)$, co oznacza, że również $ur_t \sim \mathbf{I}(0)$.

założeniu, że w długim okresie szoki popytowe nie wpływają na poziom produktu, czyli na zmienną y_t . W celu formalnego przedstawienia restrykcji długookresowej należy rozważyć postać modelu (3.75) w formie VMA($+\infty$), a więc w zapisie:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ ur_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{1,11} & \psi_{1,12} \\ \psi_{1,21} & \psi_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{2,11} & \psi_{2,12} \\ \psi_{2,21} & \psi_{2,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-2} \\ \varepsilon_{2,t-2} \end{bmatrix} + \dots \quad (3.76)$$

Ponadto niech macierz Γ^{-1} będzie dana jako $\Gamma^{-1} = \pi_0 = [\pi_{0,ij}]$. Następnie wykorzystując zależność pomiędzy resztami modelu a szokami strukturalnymi, postać (3.76) może zostać równoważnie zapisana jako:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ ur_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{0,11} & \pi_{0,12} \\ \pi_{0,21} & \pi_{0,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t^D \\ e_t^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{1,11} & \psi_{1,12} \\ \psi_{1,21} & \psi_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{0,11} & \pi_{0,12} \\ \pi_{0,21} & \pi_{0,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{t-1}^D \\ e_{t-1}^S \end{bmatrix} + \dots, \quad (3.77)$$

co z kolei można uprościć do postaci:

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ ur_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{0,11} & \pi_{0,12} \\ \pi_{0,21} & \pi_{0,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t^D \\ e_t^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{1,11} & \pi_{1,12} \\ \pi_{1,21} & \pi_{1,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{t-1}^D \\ e_{t-1}^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{2,11} & \pi_{2,12} \\ \pi_{2,21} & \pi_{2,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{t-2}^D \\ e_{t-2}^S \end{bmatrix} + \dots \quad (3.78)$$

Tym samym postać (3.78) jest dana jako $y_t = \pi(L)e_t$, gdzie $\pi(L) = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_h L^h$ oraz $\pi_h = \psi_h \pi_0 = \psi_h \Gamma^{-1}$ dla $h=0,1,2,\dots$. Elementy macierzy π_h stanowią wartości funkcji odpowiedzi impulsowej zmiennych systemu w momencie t na jednostkowe zaburzenia strukturalne o charakterze popytowym bądź podażowym z momentu $t-h$, przy braku analogicznego zaburzenia ze strony drugiego szoku. Kumulacja współczynników $\pi_{h,11}$, tzn. obliczenie współczynników typu $\sum_{h=0}^h \pi_{h,11}$ dla $h=0,1,2,\dots$ daje w efekcie funkcję odpowiedzi impulsowej poziomu produktu, czyli zmiennej y_t , w momencie t na jednostkowy szok popytowy z momentu $t-h$, przy braku analogicznego zaburzenia ze strony szoku podażowego. W przypadku takiej samej kumulacji współczynników $\pi_{h,12}$ uzyskuje się funkcję odpowiedzi impulsowej poziomu produktu w momencie t na jednostkowy szok podażowy z momentu $t-h$, przy braku analogicznego zaburzenia ze strony szoku popytowego. Dla $h \rightarrow +\infty$, czyli dla długiego okresu, zakłada się że wpływ szoków popytowych na poziom produktu y_t nie występuje, tzn. $\sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,11} = 0$. Zatem restrykcja

długookresowa polega na wyzerowaniu elementu (1,1) macierzy $\pi(1) = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_h$, zwanej macierzą długookresową, która przyjmuje postać:

$$\pi(1) = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,12} \\ \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,21} & \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,22} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

i wskazuje tym samym, że w długim okresie szoki popytowe nie wpływają na poziom produktu y_t . Estymacja macierzy $\pi_0 = \Gamma^{-1}$ oraz $\pi(1)$ odbywa się za pomocą metody największej wiarygodności przy założeniu, że szoki pochodzą z 2-wymiarowego rozkładu normalnego. Maksymalizacja logarymicznej funkcji wiarygodności odbywa się przy wykorzystaniu algorytmu Marquardta.

Zgodnie ze schematem identyfikacji Blancharda-Quaha w długim okresie poziom produktu jest kształtowany wyłącznie przez szoki podażowe wywierające trwały wpływ na gospodarkę (czynniki trwałe), natomiast fluktuacje produktu wokół ścieżki długookresowej, powodowanej przez szoki podażowe, są determinowane przez szoki popytowe (czynniki przejściowe). Metoda Blancharda-Quaha jest tym samym jednym ze sposobów modelowania luki popytowej w gospodarce, czyli odchyłeń poziomu produktu od długookresowej ścieżki zwanej poziomem produktu potencjalnego. Luka popytowa może być interpretowana jako komponent obrazujący kształtowanie się wahań koniunkturalnych produktu. Ekstrakcja składowej obrazującej wahania produktu ze względu na szoki popytowe, czyli zmiennej y_t^D będącej luką popytową, polega po pierwsze na zniwelowaniu wpływu szoków podażowych na tempo wzrostu produktu, co sprowadza się do obliczenia tempa wzrostu produktu wynikającego tylko z szoków popytowych⁷⁴:

$$\Delta y_t^D = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,11} e_{t-h}^D \quad (3.80)$$

oraz po drugie na skumulowaniu uzyskanego tempa wzrostu (3.80) w celu uzyskania zmiennej obrazującej lukę popytową, tzn.:

⁷⁴ Warto zauważyć, że tempo wzrostu produktu y_t może zostać zapisane zgodnie z (3.78) jako suma wpływu szoków popytowych i podażowych, tzn. $\Delta y_t = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,11} e_{t-h}^D + \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,12} e_{t-h}^S$.

$$y_t^D = y_{t-1}^D + \Delta y_t^D, \quad (3.81)$$

gdzie początkowa obserwacja odpowiadająca zmiennej y_t^D jest równa korespondującej obserwacji zmiennej Δy_t^D . Analogicznie do (3.80) oblicza się tempo wzrostu produktu wynikające z szoków podażowych, czyli tempo wzrostu potencjalnego, tzn. $\Delta y_t^S = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,12} e_{t-h}^S$. Następnie poprzez skumulowanie zmiennej Δy_t^S uzyskuje się poziom produktu potencjalnego, czyli $y_t^S = y_{t-1}^S + \Delta y_t^S$, gdzie początkowa obserwacja odpowiadająca zmiennej y_t^S jest równa korespondującej obserwacji zmiennej Δy_t^S powiększonej o poziom produktu z okresu poprzedniego (y_{t-1}). Dekompozycja tempa wzrostu produktu przyjmuje postać $\Delta y_t = \Delta y_t^D + \Delta y_t^S$, natomiast dekompozycja poziomu produktu jest dana jako $y_t = y_t^D + y_t^S$ i tym samym oznacza, że luka popytowa stanowi odchylenie produktu od potencjału, tj. $y_t^D = y_t - y_t^S$. Należy zauważyć, że prezentowana dekompozycja dotyczy oczyszczonego ze średniej przyrostu PKB, tj. Δy_t oraz oczyszczonego z dryfu poziomu PKB, tj. y_t . W celu przeprowadzenia dekompozycji przyrostu produktu Δpkb_t oraz poziomu produktu pkb_t należy wprowadzić pewną modyfikację obliczania produktu potencjalnego, która polega na uwzględnieniu średniej $E(\Delta pkb_t)$. Wówczas tempo wzrostu potencjalnego PKB jest dane jako $\Delta pkb_t^S = \Delta y_t^S + E(\Delta pkb_t)$, a poziom potencjalnego PKB jest uzyskiwany jako $pkb_t^S = pkb_{t-1}^S + \Delta pkb_t^S$, gdzie początkowa obserwacja odpowiadająca zmiennej pkb_t^S jest równa korespondującej obserwacji zmiennej Δpkb_t^S powiększonej o poziom PKB z okresu poprzedniego (pkb_{t-1}). W przypadku luki popytowej modyfikacja ta nie występuje i prawdą jest, że $\Delta pkb_t^D = \Delta y_t^D$ oraz $pkb_t^D = y_t^D$. Ostatecznie uzyskuje się dekompozycję postaci $\Delta pkb_t = \Delta pkb_t^D + \Delta pkb_t^S$ dla przyrostu PKB oraz dekompozycję $pkb_t = pkb_t^D + pkb_t^S$ dla poziomu PKB. W przypadku stopy bezrobocia ur_t można przeprowadzić analogiczną dekompozycję, która prowadzi do uzyskania składowych obrazujących kształtowanie się tej zmiennej odpowiednio ze względu na szoki popytowe (ur_t^D) oraz podażowe (ur_t^S)⁷⁵. Podobnie w tym przypadku dekompozycja stopy bezrobocia SB_t wymaga uwzględnienia w

⁷⁵ Naturalnie w tym przypadku nie dokonuje się kumulacji uzyskanych składowych, ponieważ model opiera się na poziomie stopy bezrobocia, a nie na jej dynamice. Dekompozycja stopy bezrobocia przyjmuje postać $ur_t = ur_t^D + ur_t^S$, gdzie $ur_t^D = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,21} e_{t-h}^D$ oraz $ur_t^S = \sum_{h=0}^{+\infty} \pi_{h,22} e_{t-h}^S$.

składowej podaźowej średniej $E(SB_t)$, czyli $SB_t^S = ur_t^S + E(SB_t)$. Z kolei składowa popytowa jest dana jako $SB_t^D = ur_t^D$ i dekompozycja przyjmuje postać $SB_t = SB_t^D + SB_t^S$.

3.3.2. Modele szeregów czasowych w przestrzeni stanów i filtr Kalmana

Strukturalne modele szeregów czasowych (*ang. structural time series models*) umożliwiają modelowanie nieobserwowalnych komponentów szeregu czasowego takich jak trend, cykl, składowa sezonowa i składowa nieregularna. Modele te określa się mianem modeli UCARIMA z uwagi na to, że każda ze składowych szeregu czasowego jest modelowana jako odpowiedni proces stochastyczny typu ARIMA. Równoważnie modele te określa się jako modele szeregów czasowych w przestrzeni stanów (*ang. state space models*), co wynika bezpośrednio ze specyfiki zapisu tych modeli w celach estymacji ich parametrów.

W tej części skupiono się na opisie modeli klasy *state space*, które mogą zostać wykorzystane do dekompozycji niestacjonarnego szeregu czasowego na składową trendu i składową cykliczną. Oznacza to, że omawiane modele są aplikowane do zmiennych, które uprzednio zostały oczyszczone z wahań o charakterze sezonowym. Strukturalne modele szeregów czasowych mogą być zarówno jednowymiarowe (*ang. univariate*), jak i wielowymiarowe (*ang. multivariate*). Przedmiotem zainteresowania w prezentowanym opisie są jedynie modele jednowymiarowe. Tym samym modelowany wektor szeregu czasowego w momencie t , wymiaru $n \times 1$, dany jako $\mathbf{y}_t = [y_{1,t} \quad y_{2,t} \quad \dots \quad y_{n,t}]'$ będzie w tym przypadku ($n=1$) równy obserwacji modelowanej zmiennej w momencie t , tzn. $\mathbf{y}_t = [y_t]$ dla $t = 1, 2, \dots, T$. Każdy układ typu *state space* dla modeli klasy UCARIMA składa się z dwóch równań: równania pomiaru, które wiąże ze sobą zmienną obserwowalną y_t i jej nieobserwowalne składowe oraz równania stanu, które opisuje nieobserwowalne składowe y_t jako odpowiednie modele klasy ARIMA.

Równanie pomiaru dla modelu jednowymiarowego w zapisie *state space* może być sformułowane dla $t = 1, 2, \dots, T$ jako:

$$y_t = \gamma \mathbf{s}_t, \quad (3.82)$$

gdzie γ jest wektorem wymiaru $1 \times r$, natomiast s_t jest wektorem stanów wymiaru $r \times 1$, gdzie r określa liczbę zmiennych stanu w zapisie *state space*. Równanie stanu może z kolei zostać sformułowane jako:

$$s_t = \delta + \Theta s_{t-1} + \Xi e_t, \quad (3.83)$$

gdzie δ jest wektorem wyrazów wolnych wymiaru $r \times 1$, Θ macierzą parametrów wymiaru $r \times r$, Ξ macierzą wymiaru $r \times m$, natomiast e_t wektorem składników losowych wymiaru $m \times 1$, gdzie m określa liczbę składników losowych systemu. Dodatkowo zakłada się, że $e_t \sim i.i.d.N(0, \Sigma)$, gdzie macierz wariancji-kowariancji składników losowych wymiaru $m \times m$ dana jako $\Sigma = E(e_t e_t')$ jest diagonalna oraz $E(e_t e_s') = 0$ dla $t \neq s$. W związku z tym każdy składnik losowy systemu jest Gaussowskim procesem białego szumu. Diagonalna macierz wariancji-kowariancji implikuje natomiast, że składniki losowe są względem siebie ortogonalne. Estymacja parametrów systemu (3.82)-(3.83) odbywa się za pomocą metody największej wiarygodności przy wykorzystaniu algorytmu filtra Kalmana (1960)⁷⁶.

Przykładem modelu umożliwiającego dekompozycję zmiennej y_t na składową trendu i składową cykliczną jest model Watsona (1986). Model ten został po raz pierwszy wykorzystany do dekompozycji oczyszczonego z wahań sezonowych poziomu realnego PKB w Stanach Zjednoczonych. Dla $t = 1, 2, \dots, T$ równanie pomiaru modelu Watsona jest dane jako:

$$y_t = \tau_t + \psi_t, \quad (3.84)$$

gdzie τ_t odpowiada składowej trendu, natomiast ψ_t jest składową cykliczną. Zgodnie z modelem Watsona składowa trendu jest kształtowana przez niestacjonarny proces błędzenia losowego z dryfem – I(1), natomiast składowa cykliczna jest dana jako stacjonarny proces AR(2) o zespolonych pierwiastkach wielomianu charakterystycznego. Tym samym zmienne nieobserwowalne mogą zostać zapisane jako:

$$\tau_t = \mu + \tau_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{gdzie } \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (3.85a)$$

$$\psi_t = \phi_1 \psi_{t-1} + \phi_2 \psi_{t-2} + \xi_t, \quad \text{gdzie } \xi_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\xi^2), \quad (3.85b)$$

⁷⁶ Filtr Kalmana stanowi rekursywny algorytm estymowania stanu procesu w sposób, który minimalizuje błąd średniokwadratowy (estymator MMSE).

gdzie składnik losowy w równaniu trendu (ε_t) jest nieskorelowany ze składnikiem losowym w równaniu cyklu (ξ_t), tzn. $\sigma_{\varepsilon\xi} = E(\varepsilon_t\xi_t) = 0$. Przyjęta specyfikacja komponentów oznacza, że zmienna y_t jest traktowana jako proces ARIMA(2,1,2). Równania stanu (3.85a)-(3.85b) oraz równanie pomiaru (3.84) w zapisie *state space* są dane w formie wektorowej (3.82)-(3.83). W zapisie wektorowym równanie stanu jest dane jako:

$$\begin{bmatrix} \tau_t \\ \psi_t \\ \psi_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

gdzie $E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t & \xi_t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}$ oraz $E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s & \xi_s \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dla $t \neq s$. Z kolei równanie pomiaru przyjmuje postać:

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_t \\ \psi_t \\ \psi_{t-1} \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

W omawianym systemie $r = 3$ oraz $m = 2$, a zatem korespondujące wektory i macierze w zapisie (3.82)-(3.83) są dane jako: $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $s_t = \begin{bmatrix} \tau_t & \psi_t & \psi_{t-1} \end{bmatrix}'$, $\delta = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \end{bmatrix}'$,

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}', \mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t & \xi_t \end{bmatrix}' \text{ oraz } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}, \text{ co oznacza, że system}$$

ma 5 parametrów: μ , ϕ_1 , ϕ_2 , σ_ε^2 oraz σ_ξ^2 , które podlegają estymacji.

Oprócz modelu Watsona (1986) w literaturze na temat modeli klasy *state space* służących do dekompozycji poziomu realnego PKB na składową trendu i składową cykliczną można odnaleźć m.in. zmodyfikowaną wersję modelu Watsona, która jest określana mianem modelu Clarka (1987). W modelu tym składowa trendu jest dana jako proces błądzenia losowego z dryfem, gdzie dryf jest kształtowany przez proces błądzenia losowego. Tym samym równanie pomiaru modelu Clarka dla $t = 1, 2, \dots, T$ jest dane jako:

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_t \\ \mu_t \\ \psi_t \\ \psi_{t-1} \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

natomiast równanie stanu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \tau_t \\ \mu_t \\ \psi_t \\ \psi_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{t-1} \\ \mu_{t-1} \\ \psi_{t-1} \\ \psi_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

gdzie $\varepsilon_t \sim iid.N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\eta_t \sim iid.N(0, \sigma_\eta^2)$ i $\xi_t \sim iid.N(0, \sigma_\xi^2)$. Podobnie jak w przypadku

modelu Watsona w modelu Clarka zakłada się, że $E \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t & \eta_t & \xi_t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}$

oraz $E \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s & \eta_s & \xi_s \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dla $t \neq s$. Specyfikacja komponentów w ramach

modelu Clarka oznacza, że zmienna y_t jest opisywana przez model ARIMA(2,2,3).

Wśród innych modeli klasy *state space* w wariancie jednowymiarowym, które umożliwiają ekstrakcję składowej cyklicznej analizowanego szeregu czasowego, w literaturze przedmiotu można również odnaleźć model Harveya i Jaegera (1993). Model Harveya i Jaegera różni się od wyżej opisanych koncepcji sposobem modelowania składowej cyklicznej, która w przypadku tego modelu jest opisywana za pomocą funkcji cosinus i sinus. W literaturze można również spotkać przykłady modeli wielowymiarowych, które podobnie jak w przypadkach opisanych powyżej umożliwiają dekompozycję poziomu realnego PKB na trend i cykl oraz dodatkowo opisują za pomocą składowej cyklicznej PKB np. zachowanie inflacji w czasie. Przykładem tego typu modelu może być koncepcja Clarka rozszerzona o równanie krzywej Phillipsa (por. Gerlach i Smets (1997)).

W części dotyczącej filtra HP wspomniano, że narzędzie to może zostać równoważnie zobrazowane jako model szeregu czasowego w przestrzeni stanów (por. s. 90). W tym celu wykorzystano reprezentację filtra HP zaproponowaną przez Kinga i Rebelo (1993). Zgodnie z tym podejściem dla $t = 1, 2, \dots, T$ równanie pomiaru dla filtra HP może zostać zapisane jako:

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_t \\ \tau_{t-1} \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

natomiast równanie stanu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \tau_t \\ \tau_{t-1} \\ \psi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{t-1} \\ \tau_{t-2} \\ \psi_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

gdzie $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ i $\xi_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_\xi^2)$. Zakłada się, że macierz wariancji-kowariancji składników losowych jest diagonalna, tzn. $E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t & \xi_t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}$, oraz że spełniony

jest warunek $E\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s & \xi_s \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dla $t \neq s$. Dodatkowo na wariancje składników

losowych systemu nakłada się restrykcję, która jest związana z parametrem wygładzającym filtra HP, tzn. $\lambda = \sigma_\xi^2 / \sigma_\varepsilon^2$. Tym samym w przypadku estymacji powyższego systemu zakłada się poziom parametru λ , który określa relację pomiędzy wariancją składowej cyklicznej oraz wariancją składnika losowego w równaniu trendu. Przyjęta specyfikacja komponentów oznacza, że zmienna y_t jest procesem IMA(2,2).

Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono parametryczne i nieparametryczne metody estymacji, które znajdują zastosowanie w przypadku stosowanej analizy spektralnej. Opisano również metody ekonometryczne, które są wykorzystywane do estymacji składowych cyklicznych ekonomicznych szeregów czasowych. W ramach metod mających na celu estymację składowych cyklicznych dokonano szczegółowej prezentacji czterech filtrów: Hodricka-Prescotta i jego zmodyfikowanej wersji (filtr MHP), Baxter-Kinga oraz Christiano-Fitzgeralda. Dodatkowo przedstawiono, w jaki sposób do celów estymacji składowej cyklicznej analizowanego szeregu czasowego, w szczególności składowej cyklicznej realnego PKB, można wykorzystać modele klasy SVAR oraz modele klasy UCARIMA w zapisie *state space*.

Na podstawie przeprowadzonego przeglądu wyżej wymienionych metod ekonometrycznych dochodzi się do wniosku, że każda z nich jest użytecznym narzędziem pomiaru i analizy cyklu koniunkturalnego. W szczególności pasmowo-przepustowe filtry Baxter-Kinga i Christiano-Fitzgeralda dają możliwość estymacji składowej cyklicznej analizowanego szeregu czasowego poprzez określenie *explicite* zakresu wahań, które według badacza powinny być utożsamiane z cyklem koniunkturalnym. Własność ta wydaje się być pożądana, ponieważ daje możliwość implementacji konkretnej definicji cyklu koniunkturalnego, jak również zapewnia stosunkowo dużą elastyczność w procesie ekstrakcji poszukiwanych wahań cyklicznych. Podobnie w przypadku filtra Hodricka-Prescotta, który do celów estymacji składowej cyklicznej powinien być stosowany w przypadku szeregów czasowych pozbawionych zarówno sezonowości i wahań nieregularnych, ów zakres może być sterowany za pomocą parametru wygładzającego, który *de facto* ma analogiczną interpretację, jak dolna częstotliwość ucięcia w przypadku filtrów pasmowo-przepustowych. Należy zauważyć, że interpretacja tego typu dla parametru wygładzającego filtra Hodricka-Prescotta jest o wiele bardziej intuicyjna.

Przedstawiona w rozdziale analiza własności poszczególnych metod estymacji składowych cyklicznych szeregów czasowych może wskazywać, że preferowanym do tego celu narzędziem powinien być pasmowo-przepustowy filtr Christiano-Fitzgeralda, który w procesie estymacji uwzględnia *explicite* strukturę stochastyczną dekomponowanej zmiennej poprzez uwzględnienie spektrum mocy procesu generującego dane w funkcji celu problemu optymalizacyjnego. Równocześnie należy zauważyć, że filtr Hodricka-Prescotta powinien być postrzegany jako narzędzie, któremu zgodnie z koncepcją Kaiser i Maravalla możliwe jest nadanie modelowej interpretacji w ramach pełnego modelu nieobserwowalnych komponentów klasy UCARIMA. Ponadto filtr Christiano-Fitzgeralda, analogicznie jak filtr Hodricka-Prescotta, umożliwia uzyskanie składowej cyklicznej, która liczy tyle samo obserwacji co wejściowy szereg czasowy. Z uwagi na jednostronny charakter estymacji, zarówno w przypadku filtra Hodricka-Prescotta, jak również filtra Christiano-Fitzgeralda, jakość estymacji przy końcach próby obserwacji jest słabsza niż w przypadku środka próby. Równocześnie przy końcach próby obserwacji estymatory uzyskiwane za pomocą filtra Hodricka-Prescotta i filtra Christiano-Fitzgeralda są wrażliwe na rozszerzanie próby o nowe dane, jak również na rewizje danych. Niemniej jednak należy pamiętać, że w przypadku skończonych prób obserwacji nie istnieją optymalne sposoby redukcji tego efektu. Dodatkowo należy zaznaczyć, że efekt ten jest również obecny w przypadku innych metod estymacji składowych cyklicznych ekonomicznych szeregów czasowych (por. Orphanides i

van Norden (2002)), co dotyczy również omawianych wcześniej modeli SVAR i *state space*. Tym samym należy mieć świadomość, że uzyskiwany na podstawie danej próby obserwacji obraz wahań cyklicznych jest w przypadku każdej analizy cyklu koniunkturalnego warunkowany tą próbą, w szczególności w przypadku końcowych obserwacji, które mogą podlegać istotnym rewizjom w czasie.

4

Cykl koniunkturalny w gospodarce polskiej

Wprowadzenie

W rozdziale przedstawiono dwa badania cyklu koniunkturalnego w Polsce w latach 1995–2007, które bazują na metodach ekonometrycznych przedstawionych w poprzednim rozdziale. Pierwsze badanie dotyczy pomiaru i określenia cech charakterystycznych wahań koniunkturalnych w Polsce. Celem drugiego jest zobrazowanie dopasowania pomiędzy cyklem koniunkturalnym w Polsce i strefie euro.

Struktura rozdziału jest następująca. W części 4.1. przedstawiono badanie mające na celu pomiar cyklu koniunkturalnego w przypadku gospodarki polskiej za pomocą metod ekonometrycznych zaprezentowanych w rozdziale 3. Dodatkowo w ramach części 4.1. dokonano weryfikacji hipotez dotyczących stylizowanych faktów na temat wahań aktywności gospodarczej w przypadku Polski. W części 4.2. opisano natomiast badanie mające na celu określenie dopasowania pomiędzy cyklem koniunkturalnym w Polsce i strefie euro. Tym samym badanie to można traktować jako analizę synchronizacji pomiędzy cyklem koniunkturalnym w Polsce i strefie euro. Rozdział kończy podsumowanie. Źródła pochodzenia danych, które zostały wykorzystane w prezentowanych w rozdziale analizach zostały opisane w aneksie.

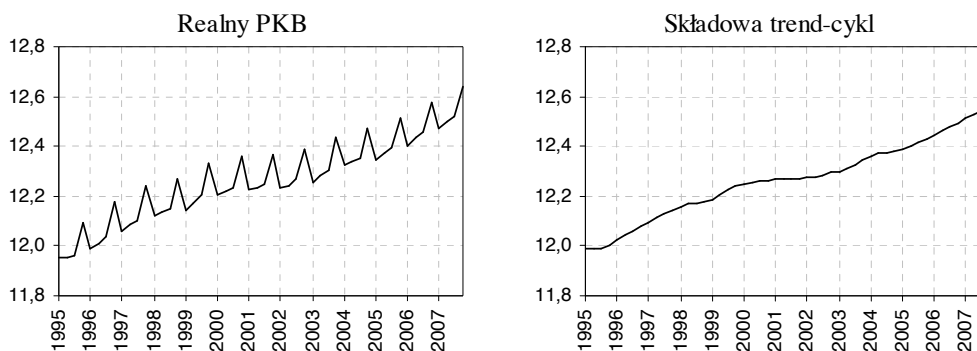
4.1. Badanie cech charakterystycznych cyklu koniunkturalnego w Polsce

4.1.1. *Pomiar wahań aktywności gospodarczej w Polsce*

W tej części przedstawiono wyniki badania w zakresie pomiaru cyklu koniunkturalnego w gospodarce polskiej w latach 1995–2007. W celu określenia przebiegu cyklu koniunkturalnego w gospodarce polskiej wykorzystano pięć metod estymacji składowej cyklicznej realnego PKB: filtr Hodricka-Prescotta (por. rozdział 3, s. 78), zmodyfikowany

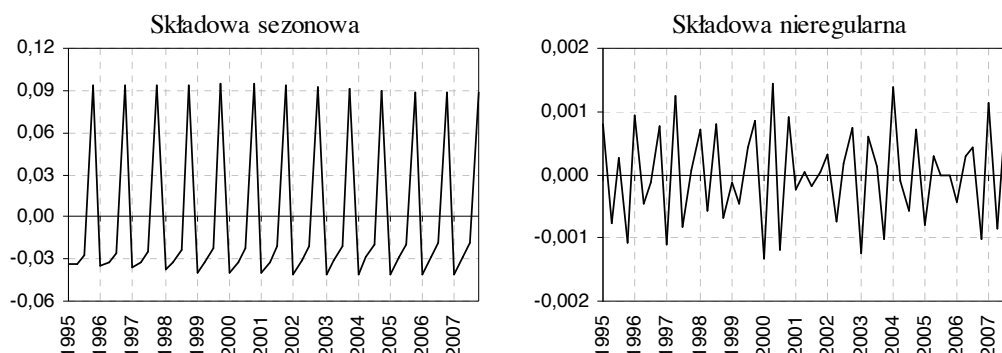
filtr Hodricka-Prescotta (por. rozdział 3, s. 91), filtr Christiano-Fitzgeralda (por. rozdział 3, s. 104), model SVAR typu Blancharda-Quaha (por. rozdział 3, s. 127) oraz model UCARIMA zgodny ze specyfikacją Watsona (por. rozdział 3, s. 133). Z uwagi na to, że filtr Baxter-Kinga (por. rozdział 3, s. 98) powoduje utratę obserwacji na początku i końcu próby obserwacji zdecydowano o pominięciu tej metody. W przypadku każdej z wykorzystanych metod estymacja składowej cyklicznej została przeprowadzona na bazie szeregu czasowego polskiego PKB w cenach stałych 2005 r., obejmującego 52 kwartalne obserwacje z okresu I kw. 1995 – IV kw. 2007. W związku z występowaniem sezonowości w powyższych danych w pierwszym etapie dokonano oczyszczania sezonowego przyjętego szeregu czasowego za pomocą metody TRAMO/SEATS⁷⁷. W wyniku zastosowania metody TRAMO/SEATS do wejściowego szeregu czasowego został dopasowany model $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_4$, w którym składowa trend-cykl jest reprezentowana przez model $IMA(2,2)$, składowa sezonowa przez model $MA(3)$ z operatorem agregacji rocznej natomiast składowa nieregularna stanowi realizację procesu białego szumu. Podobnie do składowej trend-cykl szereg czasowy będący realnym PKB po usunięciu wahań sezonowych stanowi realizację procesu $IMA(2,2)$ ⁷⁸. Rysunek 4.1 przedstawia dekomponowany szereg czasowy realnego PKB w Polsce wraz z uzyskanymi w ramach metody TRAMO/SEATS składowymi.

Rysunek 4.1. Dekompozycja TRAMO/SEATS szeregu czasowego realnego PKB w Polsce



⁷⁷ W ramach metody TRAMO/SEATS zastosowano dekompozycję addytywną. Szereg czasowy realnego PKB został uprzednio poddany transformacji logarytmem naturalnym. W dalszej części również wykorzystywano zmienne przetransformowane.

⁷⁸ Naturalnie z uwagi na dekompozycję addytywną szereg czasowy realnego PKB po usunięciu wahań sezonowych jest sumą składowej trend-cykl i nieregularnej.



Źródło: opracowanie własne.

Dalsza dekompozycja mająca na celu estymację składowej trendu i składowej cyklicznej została przeprowadzona na bazie szeregu czasowego składowej trend-cykl w przypadku filtra HP i MHP oraz na bazie szeregu czasowego realnego PKB oczyszczonego z wahań sezonowych w przypadku filtra CF, modelu SVAR oraz modelu UCARIMA. Warto przypomnieć, że przyjęcie właściwej specyfikacji filtra CF wymaga uprzedniego określenia czy dekomponowana zmienna jest stacjonarna czy niestacjonarna oraz w przypadku stwierdzenia niestacjonarności określenia jej typu. Tym samym przed przystąpieniem do estymacji składowej trendu i składowej cyklicznej za pomocą wyżej wymienionych metod zbadano stopień integracji zmiennej obrazującej realny PKB po usunięciu wahań sezonowych. W tym celu posłużono się testem pierwiastka jednostkowego ADF (por. Dickey i Fuller (1979)) oraz testem stacjonarności KPSS (por. Kwiatkowski et al. (1992)). Zgodnie z wynikami testów zawartymi w tabeli 4.1 szereg czasowy oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB w Polsce w okresie I kw. 1995 – IV kw. 2007 powinien być postrzegany jako realizacja procesu $I(1)$ z dryfem. Szereg ten jest zatem zintegrowany w stopniu pierwszym⁷⁹.

Tabela 4.1. Test ADF i KPSS dla szeregu czasowego oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB w Polsce

Wariant testu	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka ADF (pierwsza różnica)	Opóźnienie	p-value
z trendem liniowym	-2,367	1	0,392	-3,995	0	0,015
ze stałą	-0,770	1	0,819	-4,054	0	0,003
Wariant testu	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia	Statystyka KPSS (pierwsza różnica)	Szerokość pasma przenoszenia		
z trendem liniowym	0,124*	5	0,137*	4		
ze stałą	0,958***	5	0,138	4		

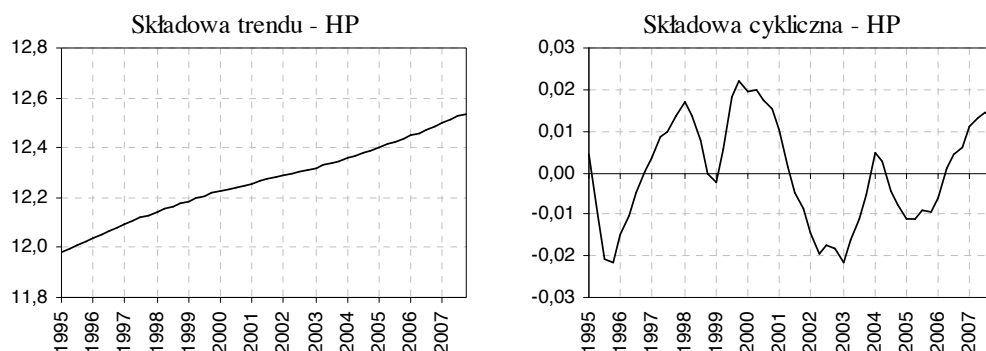
⁷⁹ Wniosek ten jest również adekwatny do szeregu czasowego składowej trend-cykl realnego PKB w Polsce. Według testu ADF i KPSS szereg ten powinien być również traktowany jako zintegrowany w stopniu pierwszym.

Uwaga: w przypadku testu ADF hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego, natomiast w przypadku testu KPSS hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej testu ADF dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza. W przypadku testu ADF w tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996). W przypadku testu KPSS szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Neweya-Westa (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne testu KPSS z trendem liniowym wynoszą odpowiednio 0,119, 0,146 i 0,216 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. Asymptotyczne wartości krytyczne testu KPSS ze stałą wynoszą odpowiednio 0,347, 0,463 i 0,739 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. W przypadku testu KPSS symbole * i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej kolejno przy poziomie istotności 10% i 1%.

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym etapie przystąpiono do estymacji składowej trendu i składowej cyklicznej szeregu czasowego realnego PKB w Polsce za pomocą poszczególnych metod. Rysunek 4.2 przedstawia dekompozycję składowej trend-cykl realnego PKB uzyskaną za pomocą filtra HP przy wykorzystaniu parametru wygładzającego $\lambda = 1600$ (por. rozdział 3, s. 83).

Rysunek 4.2. Dekompozycja składowej trend-cykl realnego PKB w Polsce za pomocą filtra HP

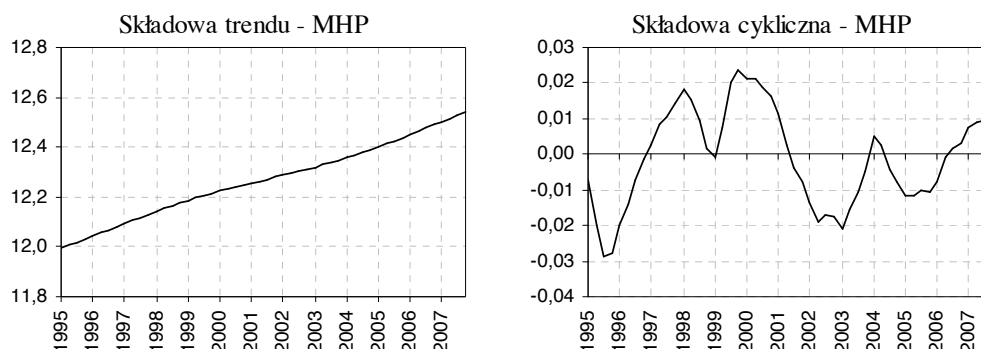


Źródło: opracowanie własne.

Analogiczna dekompozycja uzyskana za pomocą filtra MHP została zobrazowana na rysunku 4.3. Również w tym przypadku wykorzystano parametr wygładzający $\lambda = 1600$. Zgodnie z opisem filtra MHP zawartym w rozdziale 3 (por. s. 91) uzyskane składowe mają interpretację modelową. Składowa trendu jest tu reprezentowana przez model ARIMA(2,2,2) natomiast składowa cykliczna przez model ARMA(2,2)⁸⁰.

⁸⁰ Model ARIMA(2,2,2) jest dany jako $(1 - 1,7771L + 0,7994L^2)\Delta^2 g_t = (1 + 0,1262L - 0,8738L^2)\epsilon_{g,t}$, gdzie $\epsilon_{g,t} \sim iid.N(0;0,00000001)$, natomiast model ARMA(2,2) przyjmuje postać $(1 - 1,7771L + 0,7994L^2)c_t = (1 + 0,1262L - 0,8738L^2)\epsilon_{c,t}$, gdzie $\epsilon_{c,t} \sim iid.N(0;0,00001948)$.

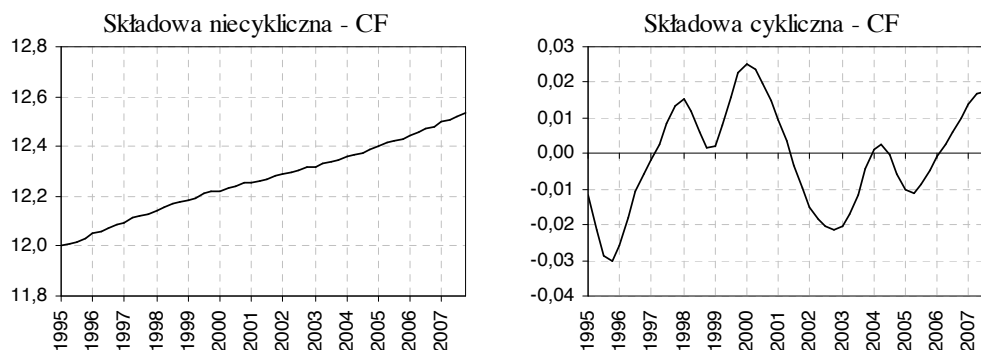
Rysunek 4.3. Dekompozycja składowej trend-cykl realnego PKB w Polsce za pomocą filtra MHP



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.4 przedstawia dekompozycję szeregu czasowego realnego PKB po usunięciu wahań sezonowych na składową niecykliczną i cykliczną za pomocą filtra CF. Zgodnie ze wskazaniem testów ADF i KPSS w celu dokonania tej dekompozycji przyjęto specyfikację $I(1)$ dla pasmowo-przepustowego filtra CF, uprzednio usuwając z wejściowego szeregu czasowego dryf (por. rozdział 3, s. 104). Jako pasmo wahań o charakterze koniunkturalnym przyjęto zakres cykli o długościach od 1,5 roku do 10 lat.

Rysunek 4.4. Dekompozycja oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB w Polsce za pomocą pasmowo-przepustowego filtra CF



Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 4.2 przedstawiono wyniki estymacji postaci zredukowanej modelu SVAR Blancharda-Quaha (por. rozdział 3, s. 128). W modelu wykorzystano szereg czasowy pierwszej różnicy realnego PKB po usunięciu wahań sezonowych, który zgodnie ze wskazaniem testów ADF i KPSS jest stacjonarny, oraz szereg czasowy stopy bezrobocia rejestrowanego w ujęciu średnio-kwartalnym, który został oczyszczony z wahań sezonowych za pomocą metody TRAMO/SEATS w wariancie addytywnym. Przy 5% poziomie istotności

test KPSS nie dał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, która zakłada, że szereg czasowy oczyszczonej z wahań sezonowych stopy bezrobocia w okresie I kw. 1995 – IV kw. 2007 jest zintegrowany w stopniu zerowym (statystyka testu KPSS ze stałą dla poziomu zmiennej wyniosła 0,371). Przed estymacją obydwie zmienne zostały wyskalowane poprzez przemnożenie ich przez 100. Estymację przeprowadzono na podstawie danych z okresu IV kw. 1995 – IV kw. 2007 (49 kwartalnych obserwacji). Uprzednio zmienne zostały oczyszczone ze średnich. W przypadku szeregu czasowego przyrostu oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB usunięto dwie średnie, kolejno w próbach IV kw. 1995 – IV kw. 1999 (średnia równa 1,46) oraz I kw. 2000 – IV kw. 2007 (średnia równa 0,97). Rząd opóźnień modelu VAR został ustalony na poziomie 2, co zostało określone na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza.

Tabela 4.2. Wyniki estymacji modelu VAR

	Δy_t	ur_t
Δy_{t-1}	0,331 (0,150) [2,213]	-0,151 (0,085) [-1,775]
Δy_{t-2}	-0,006 (0,156) [-0,037]	-0,104 (0,089) [-1,178]
ur_{t-1}	-0,294 (0,165) [-1,787]	1,716 (0,094) [18,321]
ur_{t-2}	0,328 (0,168) [1,955]	-0,736 (0,095) [-7,714]
R-squared	0,356	0,993
Adj. R-squared	0,311	0,993
Sum sq. resids	11,121	3,594
S.E. equation	0,509	0,289
F-statistic	7,937	2135,460
Log likelihood	-32,818	-6,275
Akaike AIC	1,567	0,437
Schwarz SC	1,724	0,595
Mean dependent	-0,010	0,018
S.D. dependent	0,613	3,423
Determinant Residual Covariance		0,021
Log Likelihood (d.f. adjusted)		-42,831
Akaike Information Criteria		2,163
Schwarz Criteria		2,478

Uwaga: estymacja została przeprowadzona za pomocą MNK. W nawiasach () zawarto błędy standardowe, natomiast w nawiasach [] statystyki *t*-Studenta.

Źródło: opracowanie własne.

W większości przypadków oszacowania poszczególnych parametrów modelu VAR są istotnie różne od zera przy 10% poziomie istotności. Analiza wartości własnych uzyskanego modelu VAR prowadzi natomiast do konkluzji, że model spełnia kryterium stabilności (por. tabela 4.3), co tym samym oznacza, że ma reprezentację VMA.

Tabela 4.3. Wartości własne modelu VAR

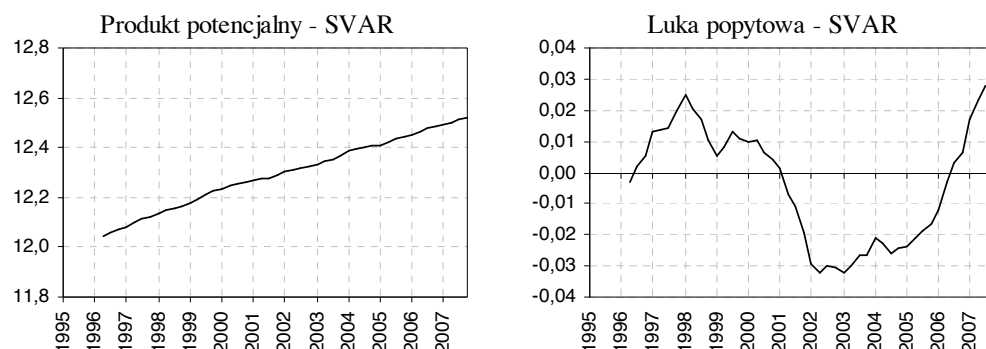
<i>Wartość własna</i>	<i>Moduł wartości własnej</i>
0,938 - 0,147i	0,949 < 1
0,938 + 0,147i	0,949 < 1
0,086 - 0,188i	0,207 < 1
0,086 + 0,188i	0,207 < 1

Źródło: opracowanie własne.

Testy diagnostyczne wektora reszt modelu wskazują, że nie występuje problem autokorelacji (statystyka LM dla hipotezy zerowej o braku autokorelacji I rzędu przyjęła wartość 6,570, a korespondujący poziom *p-value* wyniósł 0,160) oraz heteroskedastyczności (statystyka Chi-kwadrat testu White'a z elementami krzyżowymi dla hipotezy zerowej o homoskedastyczności przyjęła wartość 45,980, a korespondujący poziom *p-value* wyniósł 0,311). W związku z powyższym w kolejnym etapie dokonano identyfikacji postaci strukturalnej modelu, narzucając restrykcje prowadzące do ortonormalizacji wektora reszt oraz restrykcję długookresową polegającą na wyzerowaniu elementu (1,1) macierzy skumulowanych współczynników postaci VMA (macierzy długookresowej). Test Jarque'a-Bera dla uzyskanego wektora szoków strukturalnych nie dał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o normalności jego rozkładu (statystyka Jarque'a-Bera przyjęła wartość 3,260 przy korespondującym poziomie *p-value* 0,515). W związku z powyższym uznano, że uzyskane wyniki są zadowalające, a tym samym model SVAR może zostać wykorzystany do przeprowadzenia dekompozycji oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB na składową trendu (produkt potencjalny) i składową cykliczną (luka popytowa). Rysunek 4.5 przedstawia uzyskany wynik⁸¹.

⁸¹ Obydwie składowe obejmują po 47 kwartalnych obserwacji z okresu II kw. 1996 – IV kw. 2007 i zostały wyskalowane poprzez dzielenie przez 100 w celu zapewnienia porównywalności z pozostałymi wykresami.

Rysunek 4.5. Dekompozycja oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB w Polsce za pomocą modelu SVAR typu Blancharda-Quaha



Źródło: opracowanie własne.

Ostatnią z wykorzystanych metod dekompozycji oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB w Polsce na składową trendu i cyklu był model UCARIMA według specyfikacji Watsona (por. rozdział 3, s. 133). W tabeli 4.4 przedstawiono wyniki estymacji tego modelu na podstawie próby obserwacji z okresu I kw. 1995 – IV kw. 2007 (52 kwartalne obserwacje).

Tabela 4.4. Wyniki estymacji modelu UCARIMA

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
μ	0,010	0,001	11,698	0,000
$\ln(10^4 \sigma_\varepsilon^2)$	-2,520	0,970	-2,596	0,009
ϕ_1	1,606	0,147	10,913	0,000
ϕ_2	-0,672	0,143	-4,701	0,000
$\ln(10^4 \sigma_\xi^2)$	-1,848	0,561	-3,295	0,001
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
τ_{t+1}	12,533	0,012	1027,917	0,000
ψ_{t+1}	0,026	0,012	2,150	0,032
ψ_t	0,027	0,012	2,262	0,024
Log likelihood	166,787	Akaike info criterion		-6,223
Parameters	5	Schwarz criterion		-6,035
Diffuse priors	3	Hannan-Quinn criter.		-6,151

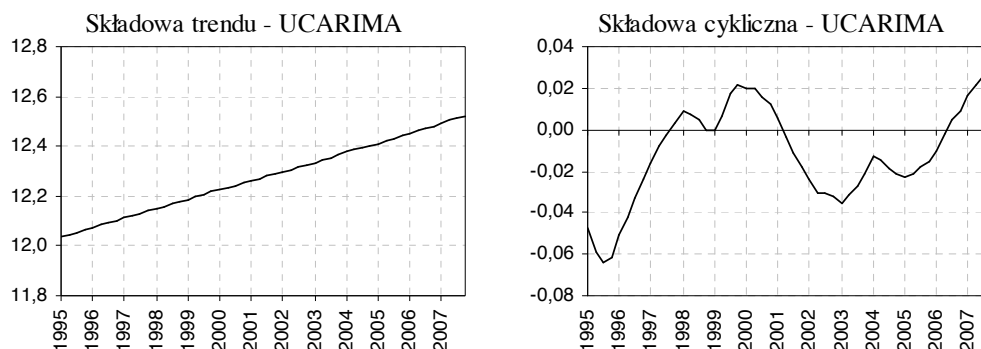
Uwaga: estymacja została przeprowadzona za pomocą MNW (Marquardt). Zbieżność została osiągnięta po 24 iteracjach.

Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki są zadowalające z uwagi na istotność statystyczną oszacowań poszczególnych parametrów. Podobnie wynik testu Walda łącznej istotności parametrów modelu wskazuje na odrzucenie hipotezy zerowej mówiącej o tym, że każdy z parametrów modelu jest równy zero (statystyka Chi-kwadrat przyjęła wartość 1945,132 przy

korespondującym poziomie p -value 0,000). Tym samym można uznać, że uzyskane za pomocą filtra Kalmana szeregi czasowe składowej trendu i składowej cyklicznej stanowią zadowalające oszacowania poszukiwanych komponentów. Rysunek 4.6 przedstawia składową trendu i składową cyklu, które wynikają z oszacowanego modelu UCARIMA.

Rysunek 4.6. Dekompozycja oczyszczonego z wahań sezonowych realnego PKB w Polsce za pomocą modelu UCARIMA typu Watsona

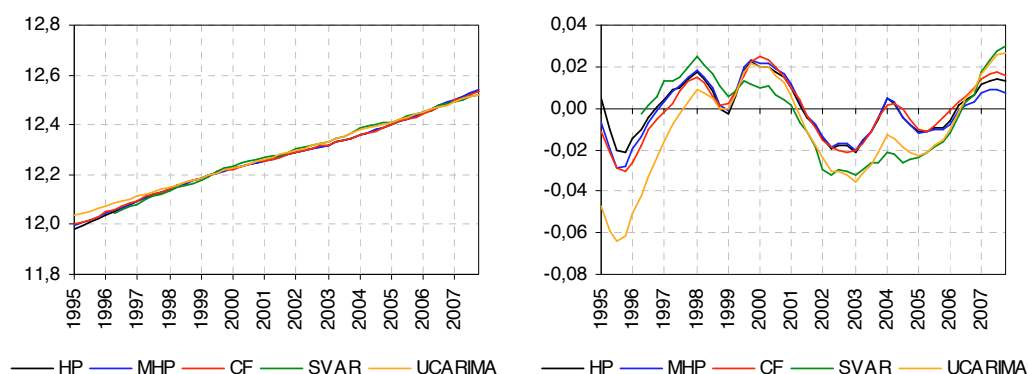


Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 4.7 przedstawiono zestawienie uzyskanych składowych trendu i składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce⁸². Składowe te okazały się być zmiennymi stacjonarnymi, na co wskazują wyniki testów ADF i KPSS zawarte w tabeli 4.5. Nieformalna analiza przebiegu uzyskanych składowych cyklicznych w czasie wskazuje na zbliżone kształtowanie się kolejnych szeregów czasowych. Potwierdzają to wysokie wartości współczynników korelacji bieżącej pomiędzy uzyskanymi składowymi (w każdym przypadku powyżej 80%), które zestawiono w tabeli 4.6. Tym samym wszystkie wykorzystane metody wskazują na zbliżony przebieg cyklu koniunkturalnego w Polsce, co jest zadowalającym rezultatem i może świadczyć o trwałości uzyskanych wyników.

⁸² W przypadku filtra HP, MHP, CF i modelu UCARIMA uzyskane składowe obejmują po 52 kwartalne obserwacje z okresu I kw. 1995 – IV kw. 2007. W modelu SVAR uzyskane składowe obejmują po 47 kwartalnych obserwacji z okresu II kw. 1996 – IV kw. 2007.

Rysunek 4.7. Składowe trendu (lewy panel) i składowe cykliczne (prawy panel) realnego PKB w Polsce



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.5. Testy ADF i KPSS ze stałą dla składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce

Składowa cykliczna	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia
HP	-3,527	1	0,011	0,104	5
MHP	-3,709	1	0,007	0,110	5
CF	-5,974	1	0,000	0,126	5
SVAR	-1,206	1	0,664	0,268	5
UCARIMA	-3,809	1	0,005	0,205	5

Uwaga: w przypadku testu ADF hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego, natomiast w przypadku testu KPSS hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej testu ADF dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza. W przypadku testu ADF w tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996). W przypadku testu KPSS szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Neweya-Westa (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne dla testu KPSS wynoszą odpowiednio 0,347, 0,463 i 0,739 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. W przypadku SVAR testy obejmują okres II kw. 1996 – IV kw. 2007. W pozostałych przypadkach testy obejmują okres I kw. 1995 – IV kw. 2007.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.6. Współczynniki korelacji pomiędzy składowymi cyklicznymi realnego PKB w Polsce

	HP	MHP	CF	SVAR	UCARIMA
HP	1				
MHP	0,975	1			
CF	0,954	0,967	1		
SVAR	0,853	0,805	0,803	1	
UCARIMA	0,858	0,899	0,955	0,804	1

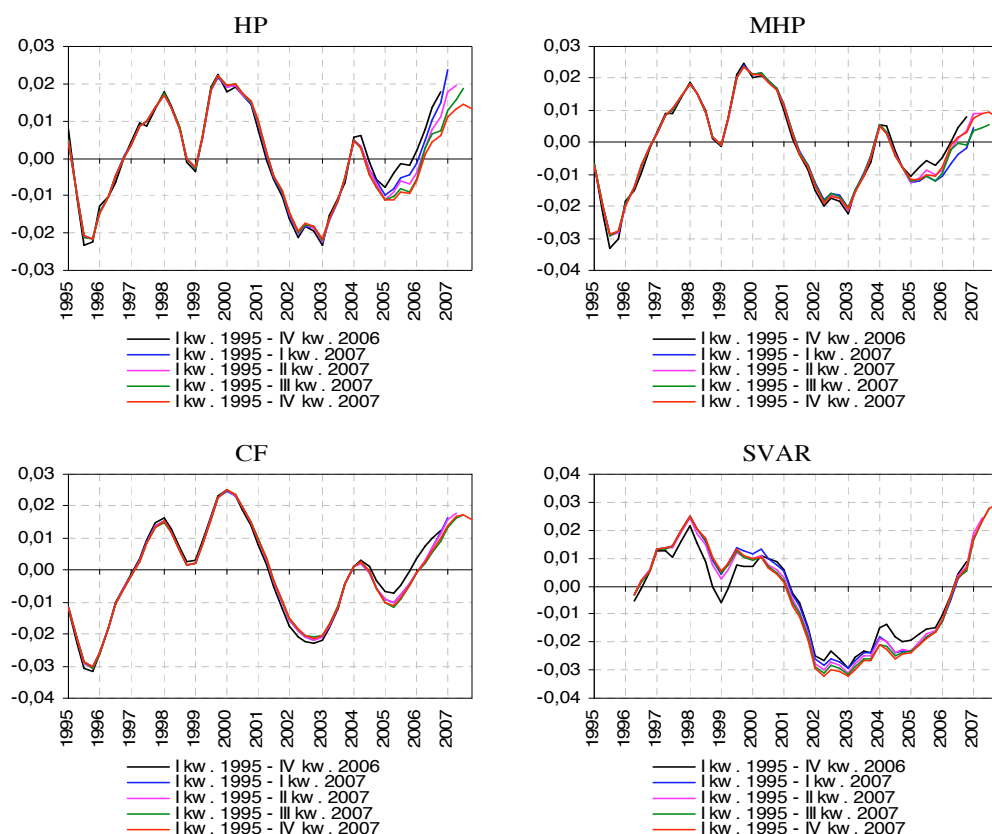
Uwaga: wszystkie współczynniki korelacji są istotnie różne od zera przy 1% poziomie istotności. W przypadku modelu SVAR współczynniki korelacji obejmują okres II kw. 1996 – IV kw. 2007, w pozostałych przypadkach okres I kw. 1995 – IV kw. 2007.

Źródło: opracowanie własne.

Szacunki składowej cyklicznej produktu podlegają zazwyczaj stosunkowo wysokim rewizjom w czasie wraz z rozszerzaniem próby obserwacji o nowe dane (por. Orphanides i van Norden (2002)). Dzieje się tak z jednej strony z uwagi na rewizje danych o PKB (dane typu *real-time*), z drugiej natomiast z uwagi na rewizje wprowadzane przez stosowaną metodę

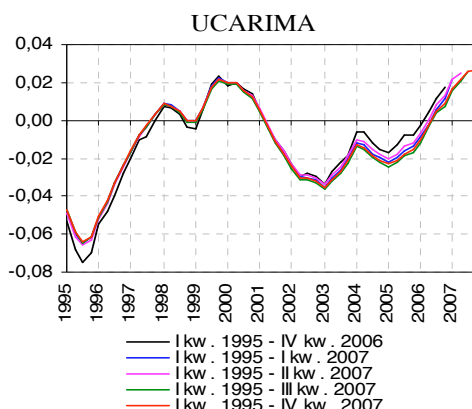
eliminacji wahań sezonowych oraz ekstrakcji cyklu. W przypadku filtrów typu HP i CF rewizje dotyczą przede wszystkim końców próby obserwacji, gdzie filtry te stają się jednostronne⁸³. Należy mieć zatem świadomość, że uzyskane składowe cykliczne stanowią oszacowania warunkowe względem dostępnej próby obserwacji. Efekt wpływu rewizji danych o realnym PKB w Polsce oraz rewizji wprowadzanych przez zastosowane metody ekstrakcji cyklu (jak również metodę eliminacji wahań sezonowych TRAMO/SEATS) zobrazowano na rysunku 4.8, który przedstawia szacunki składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce uzyskane na podstawie pięciu kolejnych zestawów danych typu *real-time*⁸⁴. Warto zauważyć, że w tym porównaniu filtr CF wydaje się generować stosunkowo zadowalające rezultaty z uwagi na małe rewizje składowej cyklicznej.

Rysunek 4.8. Składowe cykliczne realnego PKB w Polsce na bazie danych typu *real-time*



⁸³ Warto przypomnieć, że zarówno filtr HP, MHP, jak i filtr CF w skończonych próbach obserwacji są filtrami asymetrycznymi. Oznacza to, że ich wagi zależą od indeksu czasu t . Innymi słowy, w przypadku środka próby obserwacji filtry tego typu są symetryczne, natomiast wraz ze zbliżaniem się do końców próby obserwacji filtry te stają się asymetryczne z uwagi na jednostronny charakter estymacji.

⁸⁴ Szacunki uzyskane na podstawie ostatniego zestawu danych o realnym PKB w Polsce, obejmującego okres I kw. 1995 – IV kw. 2007, stanowią składowe cykliczne, które zobrazowano na rysunku 4.7.

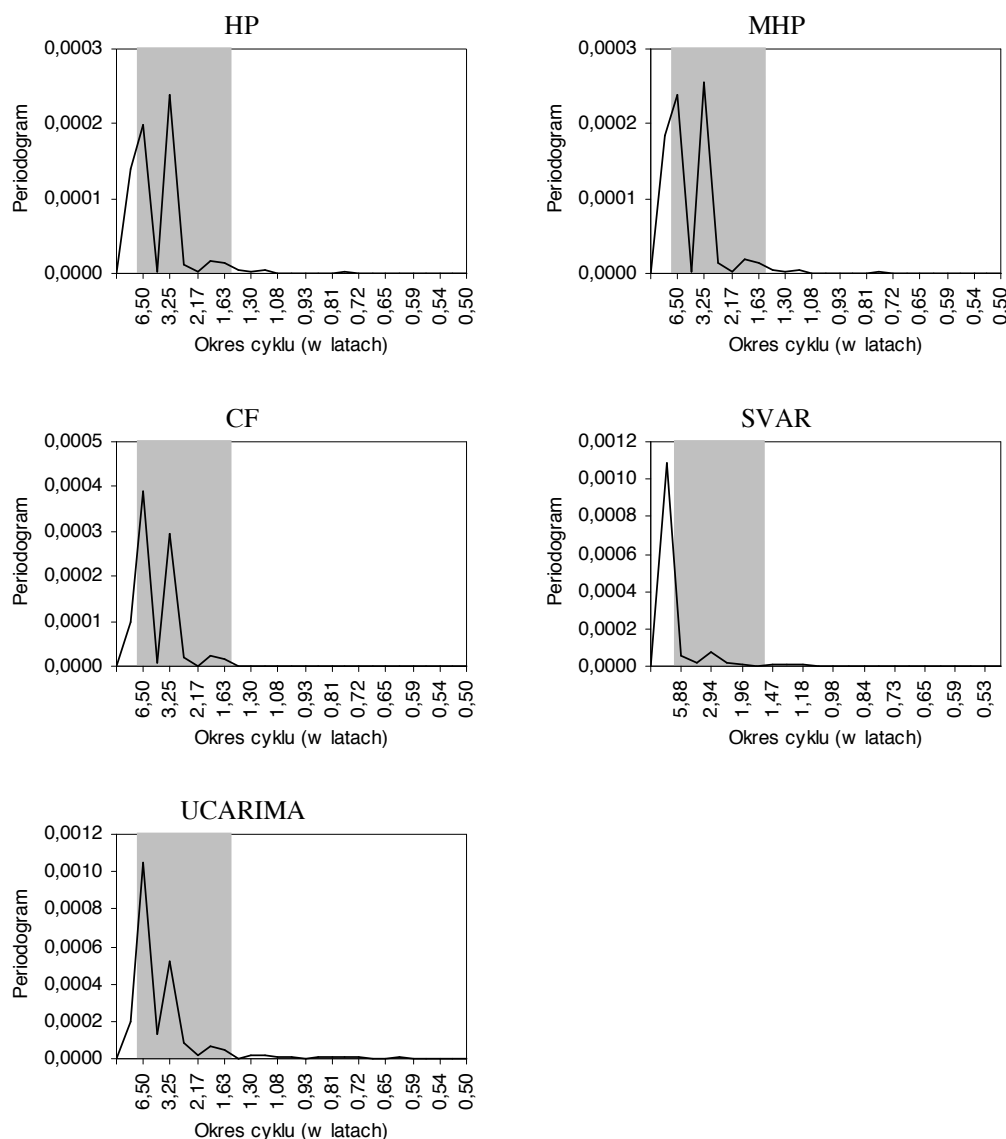


Źródło: opracowanie własne.

Z uwagi na stacjonarność uzyskanych składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce możliwym było zastosowanie metod analizy spektralnej w celu identyfikacji długości dominującego cyklu, czego dokonano na podstawie korespondujących periodogramów. Rysunek 4.9 przedstawia periodogramy poszczególnych składowych cyklicznych uzyskanych na bazie danych z okresu I kw. 1995 – IV kw. 2007. Analiza periodogramów wskazuje, że wahania aktywności gospodarczej w Polsce są kształtowane poprzez dwa dominujące cykle o okresach odpowiednio około 3 lat oraz 6–7 lat. Wskazują na to widoczne na rysunku 4.9 piki rozkładów przypadające dla tych długości cykli. Wyniki uzyskane na bazie modelu SVAR wskazują, że okres dłuższego cyklu wynosi około 12 lat⁸⁵. W związku z tym, że analiza jest oparta na relatywnie krótkiej próbie obserwacji, należy mieć na uwadze, że oszacowanie okresu dłuższego cyklu w przypadku wszystkich estymatorów składowej cyklicznej może być obciążone pewnym błędem. Niemniej jednak zarówno nieformalna analiza przebiegu komponentów cyklicznych w czasie, jak również formalna analiza rozkładów wariancji tych zmiennych w dziedzinie częstotliwości wskazuje, że w przypadku gospodarki polskiej mamy do czynienia z dwoma rodzajami fluktuacji o naturze koniunkturalnej: cyklem 3-letnim oraz cyklem dłuższym o okresie około 6–7 lat.

⁸⁵ Warto również zauważyć, że zespolone pierwiastki wielomianu charakterystycznego procesu AR(2) dla składowej cyklicznej w modelu UCARIMA, tj. $1,195 \pm 0,244i$, wskazują, że średnia długość dominującego cyklu wynosi około 8 lat, tzn. $(\tan^{-1}(0,244/1,195)/2\pi)^{-1}/4 = 7,8$.

Rysunek 4.9. Periodogramy składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce



Uwaga: zacieniony obszar wyznacza pasmo długości cykli, które mogą być uznane za wahania aktywności gospodarczej zgodnie z przyjętą definicją cyklu koniunkturalnego. Z uwagi na to, że periodogramy są wyprowadzone na podstawie dyskretnych częstotliwości Fouriera pasmo to nie pokrywa dokładnie przedziału 1,5–10 lat, a jedynie jest jego przybliżeniem. W przypadku składowych cyklicznych HP, MHP, CF i UCARIMA, które składają się z 52 obserwacji pasmo to pokrywa zakres cykli od 1,6 do 6,5 roku. Z kolei w przypadku składowej cyklicznej SVAR, złożonej z 47 obserwacji, pasmo pokrywa okresy od 1,7 do 5,9 roku.

Źródło: opracowanie własne.

W celu formalnego porównania uzyskanych periodogramów wykorzystano test Lunda-Vidakovica-Vidyashankara (2004). Hipoteza zerowa tego testu zakłada równość autokowariancji dwóch stacjonarnych szeregów czasowych dla wszystkich możliwych opóźnień. Innymi słowy oznacza to, że hipoteza zerowa zakłada równość periodogramów

dwóch stacjonarnych szeregów czasowych. Dla parzystej liczby obserwacji T statystyka testowa jest dana jako $\overline{AD} = 2T^{-1} \sum_{j=1}^{T/2} \ln(I_y(\omega_j)/I_x(\omega_j))$, gdzie $I_y(\omega_j)$ oznacza periodogram szeregu czasowego $\{y_t\}_{t=1}^T$, natomiast $I_x(\omega_j)$ jest periodogramem szeregu czasowego $\{x_t\}_{t=1}^T$. Przy poziomie istotności α wartość krytyczna dla statystyki $\overline{AD}$ jest dana jako $\overline{AD}_\alpha^* = \ln(4) + U_{1-\alpha} \sqrt{((\pi^2/3) - \ln(4)^2)/(T/2)}$, gdzie $U_{1-\alpha}$ oznacza punkt standardowego rozkładu normalnego, $U \sim N(0,1)$, dla prawdopodobieństwa $1-\alpha$. Odrzucenie hipotezy zerowej następuje wtedy, gdy statystyka testowa jest większa niż wartość krytyczna. Z uwagi na normalność rozkładu statystyki testowej istnieje możliwość bezpośredniego określenia korespondującego poziomu p -value. W przypadku szeregów czasowych o nieparzystej liczbie obserwacji statystyka testowa jest modyfikowana poprzez uwzględnienie wielkości $T-1$ w miejsce T , co również ma miejsce przy określaniu wartości krytycznych. W tabeli 4.7 zestawiono wyniki testu Lunda-Vidakovica-Vidyashankara dla szeregów czasowych składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce.

Tabela 4.7. Test Lunda-Vidakovica-Vidyashankara dla składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce

	HP	MHP	CF	SVAR	UCARIMA
HP	0,000 (1,000)				
MHP	0,934 (0,976)	0,000 (1,000)			
CF	1,535 (0,259)	1,519 (0,282)	0,000 (1,000)		
SVAR	0,737 (0,996)	0,802 (0,992)	0,519 (1,000)	0,000 (1,000)	
UCARIMA	3,209 (0,000)	2,799 (0,000)	2,357 (0,000)	1,315 (0,615)	0,000 (1,000)

Uwaga: w tabeli przedstawiono wartości statystyk testowych wraz z korespondującymi poziomami p -value, które zamieszczono w nawiasach (). W przypadku modelu SVAR testy obejmują okres II kw. 1996 – IV kw. 2007. W pozostałych przypadkach testy obejmują okres I kw. 1995 – IV kw. 2007.

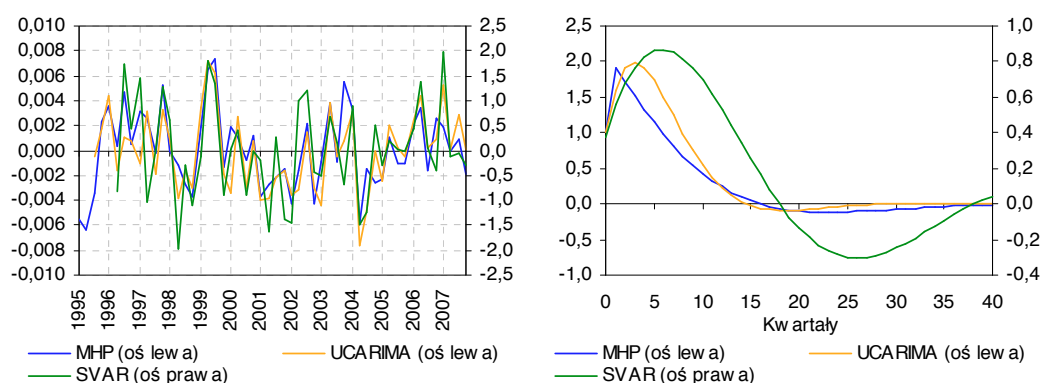
Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki wskazują, że dla składowych cyklicznych wynikających z filtra HP, MHP i CF oraz modelu SVAR nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej w każdym z przypadków porównania periodogramów tych zmiennych pomiędzy sobą. Podobnie przy porównaniu składowej cyklicznej modelu UCARIMA i modelu SVAR nie występują podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej. Odrzucenie hipotezy zerowej miało natomiast miejsce przy 1% poziomie istotności w każdym z przypadków porównania składowej cyklicznej modelu UCARIMA ze składowymi cyklicznymi filtra HP, MHP i CF, co oznacza, że periodogramy tych zmiennych różnią się istotnie od periodogramu składowej cyklicznej

modelu UCARIMA. Tym samym składowa cykliczna modelu UCARIMA została zidentyfikowana jako komponent o odmiennej charakterystyce spektralnej niż szeregi czasowe wynikające z zastosowania filtra HP, MHP i CF, ale jednocześnie o takiej samej charakterystyce co składowa cykliczna uzyskana za pomocą modelu SVAR. W związku z powyższym test Lunda-Vidakovica-Vidyashankara wskazuje, że zdecydowana większość uzyskanych za pomocą różnych metod składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce powinna być traktowana jako komponenty charakteryzujące się podobnymi periodogramami, co tym samym może świadczyć o trwałości uzyskanych wyników.

W ostatnim etapie analizy uzyskanych składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce przedstawiono porównanie szoków generujących te składowe oraz mechanizmów propagacji tych szoków. W tym celu wykorzystano szeregi czasowe składników losowych oraz funkcje odpowiedzi impulsowej dla równań opisujących składowe cykliczne realnego PKB w Polsce w ramach filtra MHP (model ARMA), modelu SVAR oraz modelu UCARIMA. Z uwagi na to, że składowa cykliczna w ramach filtra HP, jak również filtra CF, nie jest opisywana za pomocą równania stochastycznego, w poniższym porównaniu nie istniała możliwość zamieszczenia korespondujących charakterystyk dla tych metod. W lewym panelu rysunku 4.10 przedstawiono porównanie szeregów czasowych składników losowych, z kolei w prawym panelu tego rysunku zamieszczono porównanie funkcji odpowiedzi impulsowej.

Rysunek 4.10. Porównanie szoków (lewy panel) i funkcji odpowiedzi impulsowej (prawy panel)



Uwaga: w przypadku filtra MHP szereg czasowy szoków obejmuje okres I kw. 1995 – IV kw. 2007; modelu SVAR okres II kw. 1996 – IV kw. 2007; natomiast modelu UCARIMA okres III kw. 1995 – IV kw. 2007. Funkcja odpowiedzi impulsowej w przypadku każdej z metod przedstawia reakcję na szok o wartości 1. W modelu SVAR oznacza to reakcję na szok popytowy o wartości jednego odchylenia standardowego.

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z rysunkiem 4.10 można dojść do wniosku, że rozpatrywane metody (filtr MHP, model SVAR i model UCARIMA) doprowadziły do identyfikacji podobnych zaburzeń, które generują wahania aktywności gospodarczej w Polsce. W tabeli 4.8 zestawiono współczynniki korelacji pomiędzy szeregami czasowymi składników losowych. Współczynniki te potwierdzają, że analizowane serie szoków są ze sobą silnie skorelowane. Również porównanie funkcji odpowiedzi impulsowej może wskazywać, że mechanizm zamiany tych zaburzeń na oscylacje w ramach porównywanych metod jest podobny.

Tabela 4.8. Współczynniki korelacji pomiędzy składnikami losowymi

	MHP	SVAR	UCARIMA
MHP	1		
SVAR	0,634	1	
UCARIMA	0,801	0,694	1

Uwaga: wszystkie współczynniki korelacji są istotnie różne od zera przy 1% poziomie istotności. W przypadku porównania modelu SVAR z filtrem MHP i modelem UCARIMA współczynniki korelacji obejmują okres II kw. 1996 – IV kw. 2007. Przy porównaniu modelu UCARIMA z filtrem MHP współczynnik korelacji obejmuje okres III kw. 1995 – IV kw. 2007.

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowując, po przeanalizowaniu zagadnień związanych z pomiarem wahań aktywności gospodarczej nasuwa się wniosek, że wszystkie wykorzystane metody ekonometryczne doprowadziły do uzyskania zbliżonego przebiegu oscylacji o charakterze koniunkturalnym w Polsce w latach 1995–2007. Jest to rezultat zadowalający, który w szczególności przemawia za tym, że uzyskane wyniki powinny być postrzegane jako trwałe. Dodatkowo należy zauważyć, że wyłaniający się na podstawie przeprowadzonej analizy przebieg cyklu koniunkturalnego w Polsce jest spójny z wynikami badań innych autorów (por. Adamowicz et al. (2008)). Na podstawie uzyskanych wyników można dokonać próby identyfikacji okresów spowolnienia aktywności gospodarczej w Polsce. Można stwierdzić, że wszystkie składowe cykliczne wskazują wyraźnie na okres spowolnienia aktywności gospodarczej w 1998 r., który może być utożsamiany z tzw. kryzysem rosyjskim. Podobnie wszystkie metody wskazują na okres recesji w latach 2000–2003, która może być utożsamiana z załamaniem się koniunktury światowej w tym okresie. Ponadto wszystkie wykorzystane metody wskazują, że po akcesji Polski do Unii Europejskiej w 2004 r. było obserwowane kolejne spowolnienie aktywności gospodarczej, po którym nastąpiła faza ekspansji trwająca do końca 2007 r. Warto podkreślić, że do analogicznych konkluzji można dojść na podstawie analizy przebiegu serii szoków generujących składowe cykliczne. W okresach spowolnienia aktywności gospodarczej w Polsce były obserwowane ujemne serie szoków, które prowadziły do osłabienia poziomu aktywności gospodarczej w kraju.

4.1.2. Stylizowane fakty a cykl koniunkturalny w Polsce

Celem dalszej analizy jest weryfikacja hipotez na temat stylizowanych faktów wahań aktywności gospodarczej (por. rozdział 1, s. 16) w przypadku Polski. W tym celu dokonano analizy cross-spektralnej pomiędzy składowymi cyklicznymi wybranymi zmiennymi ekonomicznymi⁸⁶ i składową cykliczną realnego PKB w Polsce. Podobnie jak w poprzedniej analizie uwzględniono próbę obserwacji z okresu I kw. 1995 – IV kw. 2007 (52 kwartalne obserwacje). Składowe cykliczne wykorzystanych w badaniu zmiennych zostały uzyskane za pomocą pasmowo-przepustowego filtra CF, który był aplikowany do zmiennych oczyszczonych z wahań sezonowych⁸⁷. Głównymi argumentami przemawiającym za wykorzystaniem w tym celu filtra CF było to, że narzędzie to umożliwia ograniczenie analizy *stricte* do zakresu wahań koniunkturalnych, jak również fakt, że filtr ten uwzględnia przy estymacji poszukiwanej składowej cyklicznej strukturę stochastyczną dekomponowanej zmiennej. Jako pasmo wahań o charakterze koniunkturalnym przyjęto zakres cykli o długościach od 1,5 roku do 10 lat. Z uwagi na konieczność określenia właściwej specyfikacji filtra CF (filtr $I(1)$ lub $I(0)$), uprzednio zbadano stopień integracji przyjętych zmiennych, które zostały oczyszczone z wahań sezonowych za pomocą metody TRAMO/SEATS. W tym celu posłużono się testem pierwiastka jednostkowego ADF (por. Dickey i Fuller (1979)) oraz testem stacjonarności KPSS (por. Kwiatkowski et al. (1992)). Wyniki testów ADF i KPSS wskazują, że w większości przypadków analizowane szeregi czasowe powinny być postrzegane jako realizacje procesu $I(1)$ z dryfem (por. tabele 4.9-4.12). Niemniej jednak występują również przypadki zmiennych takich jak inwestycje, deflator PKB, CPI, zatrudnienie czy również M3 w przypadku, których nie można mieć pewności czy nie są realizacjami procesu typu $I(2)$. Z kolei w przypadku szeregu czasowego stopy bezrobocia i realnej stopy procentowej 3M WIBOR uznano, że zmienne te są stacjonarne. W związku z powyższym we wszystkich przypadkach, oprócz stopy bezrobocia i realnej stopy procentowej 3M WIBOR, wykorzystano specyfikację $I(1)$ dla filtra CF, uprzednio usuwając dryf z każdego szeregu czasowego. Dla stopy bezrobocia i realnej stopy procentowej 3M WIBOR

⁸⁶ W badaniu uwzględniono 15 zmiennych kwartalnych: konsumpcję prywatną, inwestycje, wydatki rządowe, eksport, import, deflator PKB, indeks cen towarów i usług konsumpcyjnych, przetwórstwo przemysłowe, stopę bezrobocia, zatrudnienie, nominalną i realną podaż pieniądza M3, nominalną i realną stopę procentową na rynku międzybankowym 3M WIBOR oraz indeks giełdowy WIG20. Szczegółowy opis danych zamieszczono w aneksie. Szeregi czasowe składowych PKB (konsumpcja, inwestycje itd.) oraz szeregi czasowe przetwórstwa przemysłowego, zatrudnienia, nominalnego i realnego agregatu M3 oraz indeksu giełdowego WIG20 zostały poddane transformacji logarytmem naturalnym.

⁸⁷ Zmienne oczyszczone z wahań sezonowych zostały uzyskane za pomocą metody TRAMO/SEATS w wariancie dekompozycji addytywnej. W przypadku indeksu giełdowego WIG20 oraz stopy procentowej 3M WIBOR usunięcie wahań sezonowych nie było konieczne.

wykorzystano natomiast specyfikację $I(0)$ dla filtra CF, uprzednio usuwając średnią z każdego szeregu czasowego.

Tabela 4.9. Test ADF z trendem liniowym dla analizowanych zmiennych

	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka ADF (pierwsza różnica)	Opóźnienie	p-value
Realny PKB	-2,367	1	0,392	-3,995	0	0,015
Konsumpcja prywatna	-3,582	0	0,041	-5,992	0	0,000
Inwestycje	-2,315	4	0,418	-1,274	3	0,882
Wydatki rządowe	-2,562	0	0,299	-9,399	0	0,000
Eksport	-3,448	1	0,057	-6,419	3	0,000
Import	-3,377	0	0,066	-6,240	0	0,000
Deflator PKB	-2,404	0	0,373	-7,486	0	0,000
CPI	-2,290	1	0,431	-2,968	0	0,151
Przetwórstwo przem.	-1,673	0	0,749	-6,572	0	0,000
Stopa bezrobocia	-2,258	3	0,448	-2,965	0	0,152
Zatrudnienie	-0,146	6	0,992	-4,019	5	0,015
M3	-2,216	2	0,470	-2,048	1	0,561
M3 realny	-1,872	2	0,654	-3,005	1	0,141
3M WIBOR	-3,339	1	0,072	-3,766	0	0,027
3M WIBOR realny	-2,479	0	0,337	-5,543	0	0,000
WIG20	-1,793	0	0,693	-6,061	0	0,000

Uwaga: hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarz. W tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996).

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.10. Test ADF ze stałą dla analizowanych zmiennych

	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka ADF (pierwsza różnica)	Opóźnienie	p-value
Realny PKB	-0,770	1	0,819	-4,054	0	0,003
Konsumpcja prywatna	-3,633	0	0,008	-5,505	0	0,000
Inwestycje	-0,688	0	0,840	-1,442	3	0,554
Wydatki rządowe	0,150	0	0,967	-9,208	0	0,000
Eksport	-0,106	4	0,943	-6,503	3	0,000
Import	-2,641	0	0,092	-6,094	0	0,000
Deflator PKB	-4,856	0	0,000	-5,788	0	0,000
CPI	-2,867	1	0,057	-2,368	0	0,156
Przetwórstwo przem.	-0,218	0	0,929	-6,639	0	0,000
Stopa bezrobocia	-2,412	3	0,144	-1,769	1	0,391
Zatrudnienie	-2,706	6	0,081	-2,292	5	0,179
M3	-1,381	2	0,584	-2,192	1	0,212
M3 realny	-0,614	2	0,858	-3,044	1	0,038
3M WIBOR	-1,691	1	0,429	-3,725	0	0,007
3M WIBOR realny	-2,176	0	0,217	-5,136	0	0,000
WIG20	-1,385	0	0,583	-6,128	0	0,000

Uwaga: hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarz. W tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996).

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.11. Test KPSS z trendem liniowym dla analizowanych zmiennych

	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia	Statystyka KPSS (pierwsza różnica)	Szerokość pasma przenoszenia
Realny PKB	0,124*	5	0,137*	4
Konsumpcja prywatna	0,188**	5	0,192**	5
Inwestycje	0,135*	5	0,253***	3
Wydatki rządowe	0,211**	5	0,050	3
Eksport	0,117	5	0,051	2
Import	0,136*	5	0,191**	4
Deflator PKB	0,237***	5	0,185**	2
CPI	0,246***	5	0,134*	4
Przetwórstwo przem.	0,127*	5	0,109	2
Stopa bezrobocia	0,138*	5	0,195**	5
Zatrudnienie	0,192**	5	0,087	5
M3	0,219***	5	0,202**	5
M3 realny	0,154**	5	0,169**	4
3M WIBOR	0,081	4	0,042	3
3M WIBOR realny	0,205**	5	0,085	1
WIG20	0,136*	5	0,152**	2

Uwaga: hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Neweya-Westa (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne wynoszą odpowiednio 0,119, 0,146 i 0,216 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. Symbole *, ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej kolejno przy poziomie istotności 10%, 5% i 1%.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.12. Test KPSS ze stałą dla analizowanych zmiennych

	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia	Statystyka KPSS (pierwsza różnica)	Szerokość pasma przenoszenia
Realny PKB	0,958***	5	0,138	4
Konsumpcja prywatna	0,958***	5	0,451*	5
Inwestycje	0,635**	5	0,253	3
Wydatki rządowe	0,945***	5	0,125	3
Eksport	0,971***	5	0,050	2
Import	0,931***	5	0,327	4
Deflator PKB	0,915***	5	0,664**	5
CPI	0,911***	5	0,734**	5
Przetwórstwo przem.	0,951***	5	0,099	2
Stopa bezrobocia	0,371*	5	0,243	5
Zatrudnienie	0,836***	5	0,544**	5
M3	0,923***	5	0,596**	5
M3 realny	0,936***	5	0,225	4
3M WIBOR	0,920***	5	0,104	3
3M WIBOR realny	0,225	5	0,355*	3
WIG20	0,624**	5	0,150	5

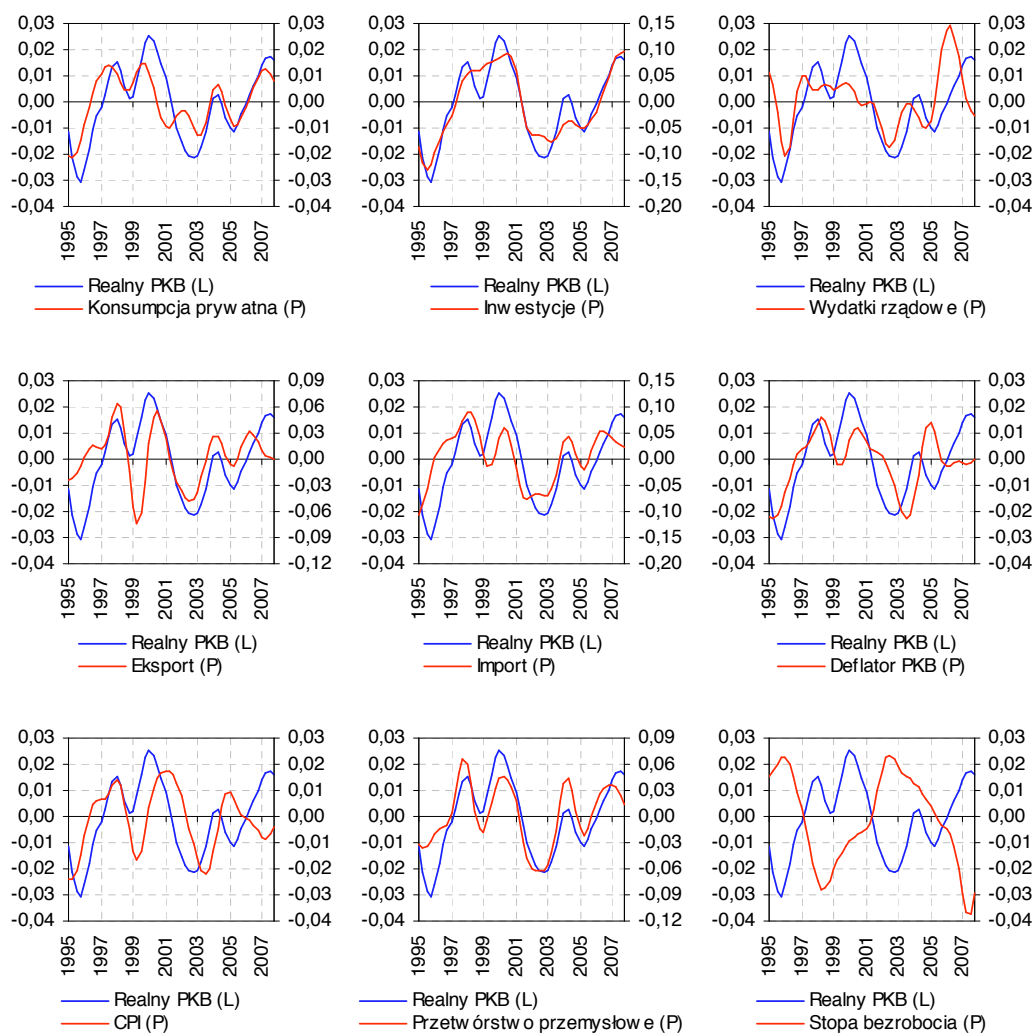
Uwaga: hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Neweya-Westa (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne wynoszą odpowiednio 0,347, 0,463 i 0,739 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. Symbole *, ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej kolejno przy poziomie istotności 10%, 5% i 1%.

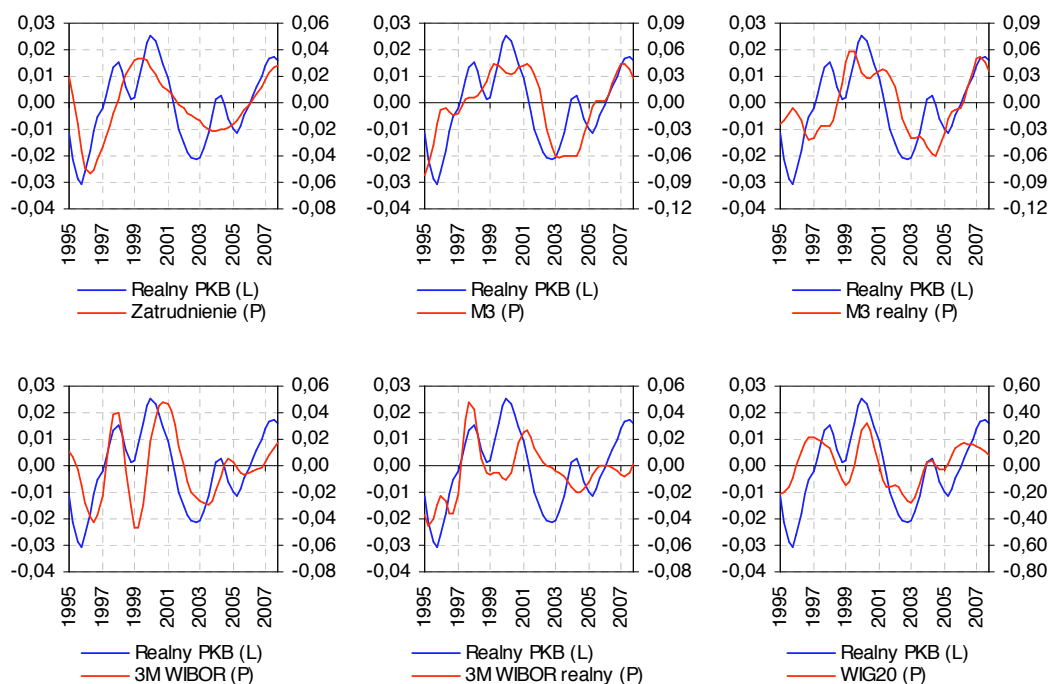
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.11 przedstawia składowe cykliczne analizowanych zmiennych na tle składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce. Zgodnie z wynikami testów ADF i KPSS

składowe te okazały się zmiennymi stacjonarnymi (por. tabela 4.13), a tym samym możliwym było zastosowanie metod analizy cross-korelacyjnej i cross-spektralnej w celu formalnej weryfikacji hipotez na temat stylizowanych faktów o koniunkturze gospodarczej w przypadku Polski.

Rysunek 4.11. Składowe cykliczne analizowanych zmiennych i realnego PKB w Polsce





Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.13. Testy ADF i KPSS ze stałą dla składowych cyklicznych analizowanych zmiennych

	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia
Realny PKB	-4,906	3	0,000	0,126	5
Konsumpcja pryw.	-4,030	3	0,003	0,100	5
Inwestycje	-5,508	3	0,000	0,130	5
Wydatki rządowe	-5,227	3	0,000	0,119	5
Eksport	-6,991	3	0,000	0,060	4
Import	-5,301	3	0,000	0,103	5
Deflator PKB	-5,724	3	0,000	0,099	5
CPI	-8,386	3	0,000	0,079	5
Przetwórstwo przem.	-5,065	3	0,000	0,091	5
Stopa bezrobocia	-5,307	3	0,000	0,143	5
Zatrudnienie	-8,473	3	0,000	0,126	5
M3	-5,326	3	0,000	0,114	5
M3 realny	-6,069	3	0,000	0,107	5
3M WIBOR	-5,751	3	0,000	0,061	4
3M WIBOR realny	-8,754	3	0,000	0,136	5
WIG20	-6,154	3	0,000	0,097	5

Uwaga: w przypadku testu ADF hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego, natomiast w przypadku testu KPSS hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej testu ADF dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarz. W przypadku testu ADF w tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996). W przypadku testu KPSS szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Neweya-Westa (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne dla testu KPSS wynoszą odpowiednio 0,347, 0,463 i 0,739 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności.

Źródło: opracowanie własne.

W pierwszym etapie analizy posłużono się współczynnikami cross-korelacji. W tabeli 4.14 przedstawiono współczynniki cross-korelacji składowych cyklicznych poszczególnych zmiennych ze składową cykliczną realnego PKB w Polsce dla opóźnień od -4 do 4 kwartałów. Dodatkowo w tabeli tej zamieszczono wartości odchyłeń standardowych składowych cyklicznych analizowanych zmiennych, co stanowi informację na temat amplitudy wahań cyklicznych.

Tabela 4.14. Analiza cross-korelacyjna składowych cyklicznych analizowanych zmiennych i realnego PKB w Polsce

	Odch. std.	Opóźnienie (w kwartałach)								
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Realny PKB	0,014	0,32**	0,54***	0,76***	0,93***	1,00***	0,93***	0,76***	0,54***	0,32**
Konsumpcja prywatna	0,010	-0,09	0,10	0,32**	0,56***	0,75***	0,83***	0,79***	0,68***	0,53***
Inwestycje	0,066	0,47***	0,64***	0,78***	0,89***	0,94***	0,87***	0,74***	0,57***	0,38***
Wydatki rządowe	0,011	0,01	0,14	0,29**	0,41***	0,48***	0,53***	0,54***	0,52***	0,46***
Eksport	0,031	-0,14	0,08	0,29**	0,42***	0,45***	0,39***	0,28**	0,15	0,06
Import	0,050	-0,16	0,07	0,31**	0,51***	0,67***	0,72***	0,70***	0,63***	0,54***
Deflator PKB	0,011	0,39***	0,53***	0,61***	0,62***	0,58***	0,49***	0,40***	0,31**	0,26*
CPI	0,012	0,31**	0,40***	0,45***	0,44***	0,38***	0,26*	0,12	0,01	-0,06
Przetwórstwo przem.	0,034	-0,01	0,24*	0,49***	0,71***	0,83***	0,82***	0,70***	0,50***	0,30**
Stopa bezrobocia	0,017	-0,38***	-0,55***	-0,69***	-0,78***	-0,83***	-0,78***	-0,68***	-0,56***	-0,44***
Zatrudnienie	0,023	0,67***	0,74***	0,77***	0,75***	0,66***	0,52***	0,39***	0,27**	0,16
M3	0,037	0,60***	0,62***	0,62***	0,64***	0,66***	0,64***	0,57***	0,44***	0,29**
M3 realny	0,034	0,70***	0,66***	0,59***	0,54***	0,52***	0,47***	0,39***	0,28**	0,14
3M WIBOR	0,025	0,52***	0,66***	0,71***	0,66***	0,49***	0,25*	-0,01	-0,22	-0,37***
3M WIBOR realny	0,020	0,41***	0,45***	0,46***	0,47***	0,46***	0,40***	0,28**	0,14	0,00
WIG20	0,157	-0,15	0,05	0,29**	0,51***	0,67***	0,71***	0,66***	0,54***	0,40***

Uwaga: symbole *, ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej mówiącej o tym, że współczynnik cross-korelacji dla danego opóźnienia jest równy zero kolejno przy poziomie istotności 10%, 5% i 1%. Wyświetlonym drukiem zaznaczono maksymalne, co do modułu, wartości współczynników cross-korelacji dla przedziału opóźnień od -4 do 4 kwartałów. Opóźnienia ujemne wskazują na opóźniony charakter składowej cyklicznej danej zmiennej w stosunku do składowej cyklicznej realnego PKB. Z kolei opóźnienia dodatnie wskazują na wyprzedzający charakter składowej cyklicznej danej zmiennej w stosunku do składowej cyklicznej realnego PKB. Opóźnienie zerowe wskazuje na jednoczesny związek pomiędzy składowymi cyklicznymi danej zmiennej i realnego PKB.

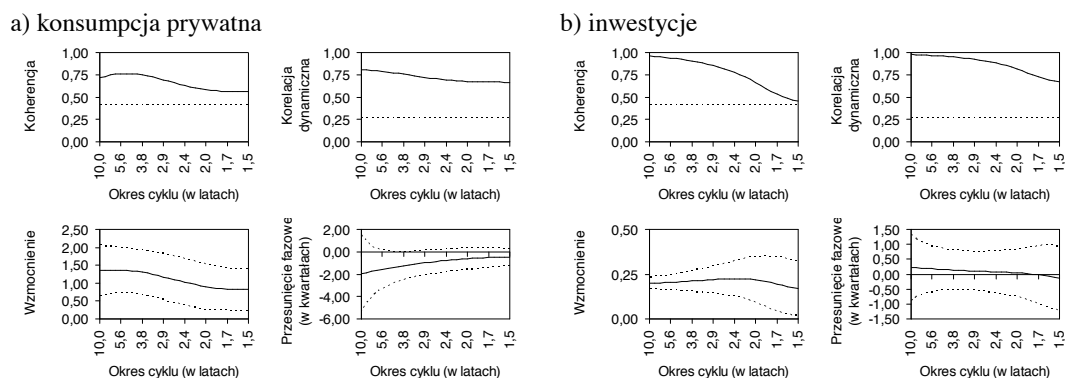
Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki pokazują, że wszystkie rozpatrywane zmienne, oprócz stopy bezrobocia, która jest antycykliczna, mają charakter procykliczny w stosunku do wahań realnego PKB. Wśród rozpatrywanych zmiennych można wyróżnić: 4 zmienne wyprzedzające realny PKB w cyklu (konsumpcja prywatna, wydatki rządowe, import i WIG20), 6 zmiennych opóźnionych w stosunku do realnego PKB w cyklu (deflator PKB, CPI, zatrudnienie, M3 realny, 3M WIBOR i 3M WIBOR realny) oraz 5 zmiennych, które wykazują zbieżne w stosunku do realnego PKB zachowanie w cyklu (inwestycje, eksport, przetwórstwo przemysłowe, stopa bezrobocia, M3). Wartości odchyłeń standardowych analizowanych składowych cyklicznych są w większości przypadków większe niż odchylenie standardowe składowej cyklicznej

realnego PKB, co tym samym wskazuje, że większość z rozpatrywanych zmiennych wykazuje większą amplitudę wahań cyklicznych niż realny PKB. Największą amplitudą wahań cyklicznych w stosunku do realnego PKB charakteryzuje się WIG20 (odchylenie standardowe około 11 razy większe niż w przypadku realnego PKB). Z kolei najbardziej wyraźny wyjątek od tej reguły stanowi składowa cykliczna konsumpcji prywatnej (odchylenie standardowe składowej cyklicznej realnego PKB około 1,5 razy większe niż w przypadku składowej cyklicznej konsumpcji prywatnej).

W kolejnym etapie dokonano analizy cross-spektralnej komponentów cyklicznych badanych zmiennych i realnego PKB w Polsce. Dzięki temu podejściu zobrazowano zarówno zróżnicowanie amplitud badanych składowych cyklicznych w relacji do wahań realnego PKB, jak również ich przesunięcia w czasie w stosunku do składowej cyklicznej realnego PKB⁸⁸. Rysunek 4.12 przedstawia oszacowane statystyki cross-spektralne dla analizowanych składowych cyklicznych⁸⁹. W tabeli 4.15 zestawiono natomiast korespondujące wartości statystyk cross-spektralnych w całym paśmie wahań o okresach od 1,5 roku do 10 lat.

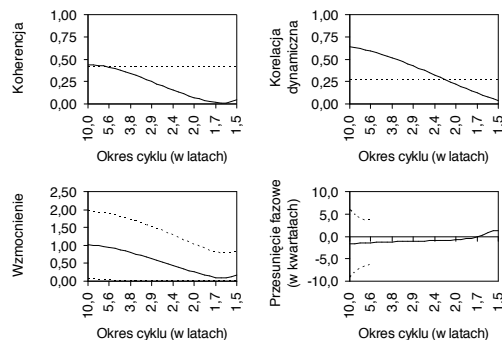
Rysunek 4.12. Analiza cross-spektralna składowych cyklicznych analizowanych zmiennych i realnego PKB w Polsce



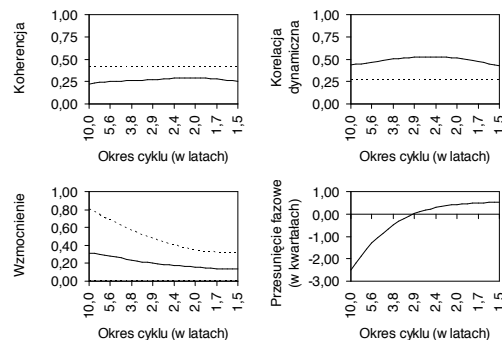
⁸⁸ Składowa cykliczna realnego PKB jest traktowana jako zmienna zależna, natomiast składowa cykliczna danej zmiennej jako zmienna niezależna. Układ ten ma charakter umowny, co wynika z wymogu określenia takiego układu w przypadku analizy pary szeregów czasowych. Określenie zmienna zależna i niezależna nie jest tu podyktowane przyczynowością czy też innym kryterium.

⁸⁹ Przy estymacji statystyk cross-spektralnych wykorzystano metodę wygładzania w dziedzinie opóźnień za pomocą okna Parzena, uwzględniając opóźnienia do 14 włącznie. W przypadku koherencji i dynamicznego współczynnika korelacji naniesiono na wykresy korespondujące wartości krytyczne dla 5% poziomu istotności, natomiast w przypadku wzmocnienia i przesunięcia fazowego zaznaczono korespondujące 95% przedziały ufności.

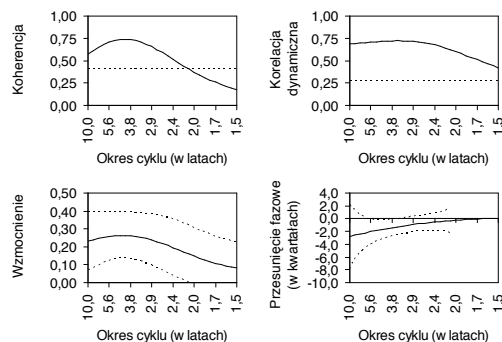
c) wydatki rządowe



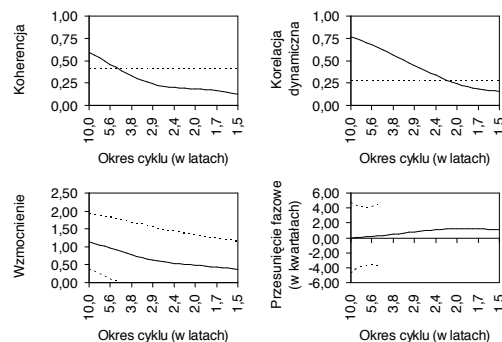
d) eksport



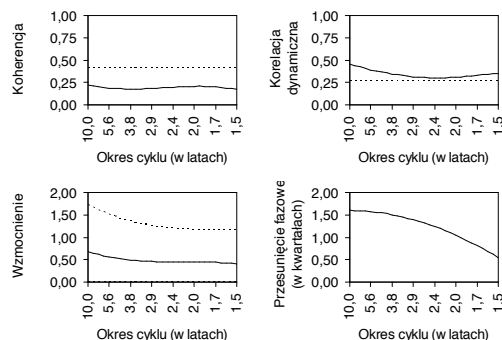
e) import



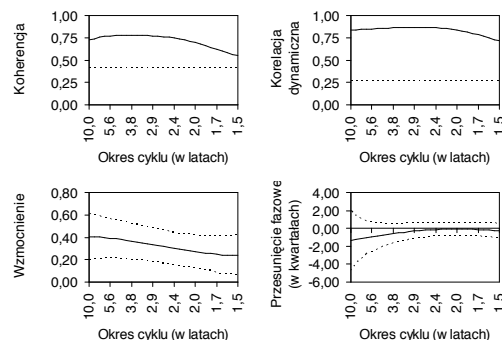
f) deflator PKB



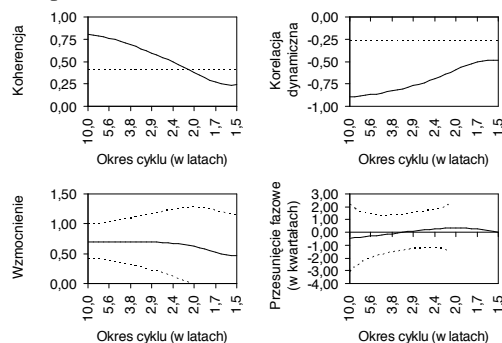
g) CPI



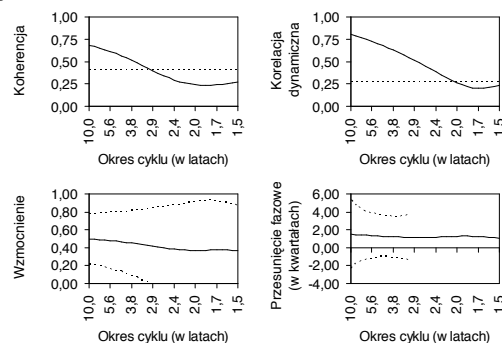
h) przetwórstwo przemysłowe



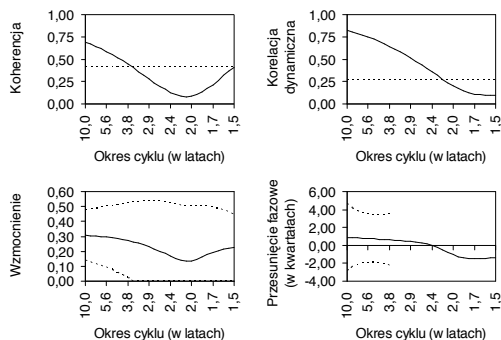
i) stopa bezrobocia



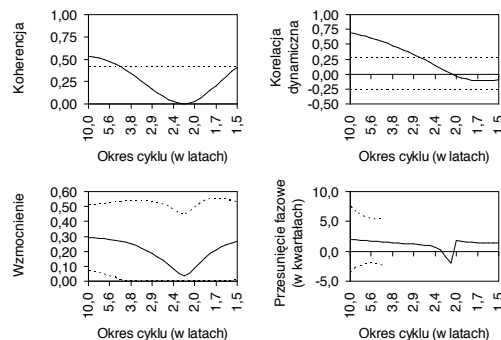
j) zatrudnienie



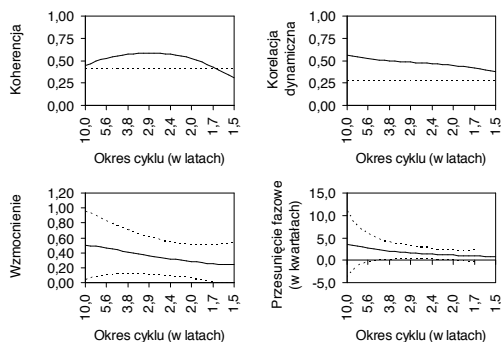
k) M3



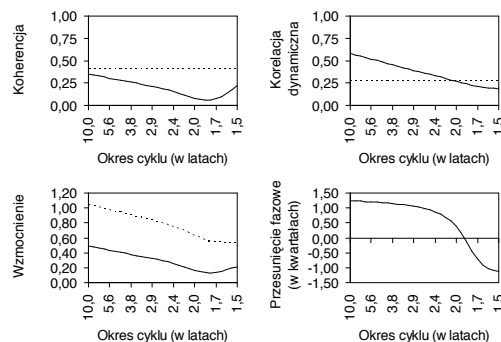
l) M3 realny



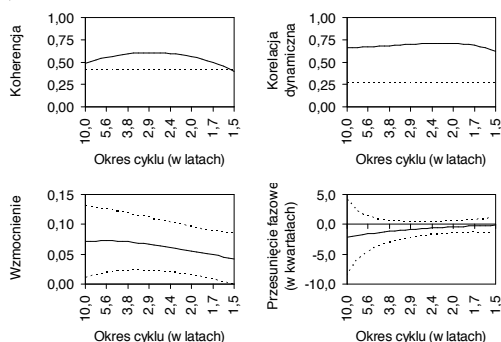
m) 3M WIBOR



n) 3M WIBOR realny



o) WIG20



Źródło: opracowanie własne.

Aby zobrazować sposób interpretacji uzyskanych wyników na podstawie rysunku 4.12, jako przykład opisano przypadek inwestycji. Dla tej kategorii koherencja pozostaje istotnie różna od zera przy założonym 5% poziomie istotności w całym analizowanym przedziale wahań cyklicznych. W szczególności koherencja przyjmuje wysokie wartości (bliskie jedności) przy niskich częstotliwościach, co jest interpretowane jako wysokie dopasowanie pomiędzy inwestycjami i realnym PKB w przypadku cykli o długich okresach. W przypadku cykli o krótkich okresach dopasowanie jest słabsze, co objawia się poprzez niższe wartości przyjmowane przez koherencję. Dynamiczny współczynnik korelacji, który jest dodatni i

istotnie różny od zera przy założonym 5% poziomie istotności w całym analizowanym paśmie wahań, wskazuje, że składowa cykliczna inwestycji jest procykliczna względem wahań koniunkturalnych realnego PKB. Najwyższa korelacja jest obserwowana w przypadku cykli o długich okresach oraz słabsza w przypadku cykli o krótkich okresach. Analiza wzmocnienia prowadzi do konkluzji, że wahania cykliczne inwestycji mają o wiele wyższą amplitudę niż wahania cykliczne realnego PKB, co dotyczy całego pasma wahań koniunkturalnych. Objawia się to tym, że wzmocnienie przyjmuje wartości znacznie poniżej jedności w całym analizowanym paśmie wahań koniunkturalnych. Ostatecznie przesunięcie fazowe, które pozostaje bliskie wartości zera w całym paśmie wahań, wskazuje, że nie występują wyraźne odchylenia w występowaniu punktów zwrotnych składowej cyklicznej inwestycji i realnego PKB.

Tabela 4.15. Analiza cross-spektralna składowych cyklicznych analizowanych zmiennych i realnego PKB w Polsce

	Koherencja	Korelacja dynamiczna	Wzmocnienie	Przesunięcie fazowe (w kwartałach)
Konsumpcja prywatna	0,691***	0,743***	1,201	-0,779
Inwestycje	0,868***	0,931***	0,209	0,078
Wydatki rządowe	0,258	0,459***	0,652	-0,736
Eksport	0,225	0,473***	0,203	-0,111
Import	0,589***	0,682***	0,222	-0,798
Deflator PKB	0,306	0,535***	0,732	0,428
CPI	0,182	0,355**	0,498	0,987
Przetwórstwo przem.	0,735***	0,841***	0,345	-0,331
Stopa bezrobocia	0,649***	-0,805***	0,688	-0,025
Zatrudnienie	0,477**	0,613***	0,443	0,804
M3	0,387*	0,616***	0,252	0,243
M3 realny	0,254	0,453***	0,217	0,762
3M WIBOR	0,508**	0,485***	0,378	1,378
3M WIBOR realny	0,215	0,433***	0,333	0,613
WIG20	0,552***	0,679***	0,066	-0,702

Uwaga: prezentowane wartości odnoszą się do pasma wahań o okresach od 1,5 roku do 10 lat. Symbole *, ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej mówiącej o tym, że współczynnik koherencji lub dynamiczny współczynnik korelacji jest równy zero kolejno przy poziomie istotności 10%, 5% i 1%. Wartości wzmocnienia mniejsze (większe) od jedności wskazują, że składowa cykliczna danej zmiennej ma większą (mniejszą) amplitudę wahań niż składowa cykliczna realnego PKB. Ujemne (dodatnie) wartości przesunięcia fazowego wskazują, że składowa cykliczna danej zmiennej jest wyprzedzająca (opóźniona) w stosunku do składowej cyklicznej realnego PKB.

Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane na podstawie analizy cross-spektralnej wyniki prowadzą do konkluzji zbieżnych z wynikami analizy cross-korelacyjnej. Należy zauważyć, że nie za każdym razem odnotowano istotne statystycznie wartości koherencji, podczas gdy korespondujące wartości współczynników korelacji dynamicznej pozostają istotnie różne od zera we wszystkich analizowanych przypadkach. W tego typu sytuacjach należy pamiętać, że o ile korelacja

dynamiczna pozostaje istotnie różna od zera, to jej wartość wskazuje na średnie bądź słabe dopasowanie (wartość zazwyczaj poniżej 50%). Składowe cykliczne wszystkich rozpatrywanych zmiennych, oprócz składowej cyklicznej stopy bezrobocia, która jest antycykliczna, mają charakter procykliczny względem wahań realnego PKB. Jako zmienne wyprzedzające realny PKB w zakresie wahań cyklicznych zidentyfikowano: konsumpcję prywatną, wydatki rządowe, import oraz indeks giełdowy WIG20. Z kolei opóźniony charakter wahań cyklicznych względem składowej cyklicznej realnego PKB odnotowano w przypadku: deflatora PKB, CPI, zatrudnienia, realnej podaży pieniądza M3 oraz nominalnej i realnej stopy procentowej 3M WIBOR. W przypadku pozostałych zmiennych można uznać, że nie wykazują one przesunięć w zakresie występowania punktów zwrotnych w odniesieniu do fluktuacji realnego PKB. Należy zaznaczyć, że wśród powyższych zmiennych o „silnych” zależnościach w zakresie fluktuacji koniunkturalnych względem realnego PKB, w sensie istotnej statystycznie koherencji i korelacji dynamicznej przy 5% poziomie krytycznym, można mówić w przypadku: konsumpcji prywatnej, inwestycji, importu, przetwórstwa przemysłowego, stopy bezrobocia, zatrudnienia, nominalnej stopy procentowej 3M WIBOR oraz indeksu WIG20. Jeżeli chodzi o dopasowanie pomiędzy amplitudami wahań cyklicznych analizowanych zmiennych względem fluktuacji realnego PKB, to należy zauważyć, że większość z rozpatrywanych zmiennych wykazuje większą amplitudę wahań cyklicznych niż realny PKB. Dodatkowo uzyskane w tym zakresie wyniki wskazują, że w przypadku wydatków rządowych, deflatora PKB i CPI wyższe amplitudy wahań dotyczą zakresu cykli o długościach do ok. 3 lat, podczas gdy cykle o dłuższych okresach wykazują zbliżoną amplitudę wahań w stosunku do realnego PKB. Analogicznie jak w przypadku analizy odchyłeń standardowych składowych cyklicznych należy stwierdzić, że największą amplitudą wahań cyklicznych w stosunku do realnego PKB charakteryzuje się WIG20 (amplituda w paśmie wahań 1,5–10 lat ok. 15 razy większa niż w przypadku realnego PKB). Również analogicznie do analizy odchyłeń standardowych składowych cyklicznych jedynie w przypadku konsumpcji prywatnej odnotowano mniejszą amplitudę wahań w stosunku do realnego PKB (amplituda wahań realnego PKB w paśmie 1,5–10 lat ok. 1,2 razy większa niż w przypadku fluktuacji konsumpcji prywatnej).

Podsumowując zagadnienia związane z weryfikacją hipotez na temat stylizowanych faktów o waniach koniunkturalnych można sformułować wniosek, że w świetle uzyskanych na podstawie analizy cross-korelacyjnej i cross-spektralnej wyników można uznać, że zdecydowana większość z nich jest potwierdzona w przypadku gospodarki polskiej. Porównując wahania cykliczne realnego PKB z pozostałymi zmiennymi można

zaobserwować, że amplituda wahań produktu w gospodarce polskiej jest stosunkowo niska, podczas gdy zarówno inwestycje, eksport, import, jak również przetwórstwo przemysłowe, czy indeks giełdowy, podlegają znacznym fluktuacjom. Ponadto przeprowadzona analiza potwierdza fakt, że wahania koniunkturalne konsumpcji prywatnej są procykliczne, podobnie jak ma to miejsce w przypadku inwestycji, eksportu i importu. Potwierdzono również, że wahania indeksów cen są opóźnione, podczas gdy fluktuacje obserwowane na giełdzie są wyprzedzające, w stosunku do wahań produktu. W przeprowadzonym badaniu nie potwierdzono natomiast faktu o wyprzedzającym charakterze realnej podaży pieniądza, która została zidentyfikowana jako zmienna opóźniona w cyklu w relacji do realnego PKB. Badanie nie potwierdziło również opóźnionego charakteru wahań stopy bezrobocia, w przypadku, której stwierdzono, że występowanie punktów zwrotnych jest zbieżne w stosunku do realnego PKB.

4.2. Badanie synchronizacji cyklu koniunkturalnego Polski z cyklami gospodarczymi w strefie euro

4.2.1. Cel i forma badania

Zbliżone kształtowanie się cykli koniunkturalnych w krajach tworzących unię walutową jest jednym z ważniejszych czynników wpływających na efektywność wspólnej polityki monetarnej. Podobny przebieg zarówno wahań koniunktury danego kraju, jak i fluktuacji koniunkturalnych unii monetarnej eliminuje potrzebę zachowania autonomicznej polityki pieniężnej, ponieważ wspólna polityka pieniężna jest wówczas w stanie stabilizować fluktuacje gospodarcze we wszystkich krajach członkowskich. Tym samym pytanie o podobieństwa i różnice pomiędzy wahaniami aktywności gospodarczej w nowych gospodarkach członkowskich Unii Europejskiej oraz gospodarkach strefy euro, a więc pytanie o synchronizację krajowego cyklu koniunkturalnego z cyklem charakteryzującym unię monetarną, jest zasadne w obliczu przyszłego rozszerzenia struktur strefy euro.

W dalszej części podjęto próbę przedstawienia zjawiska synchronizacji wahań aktywności gospodarczej pomiędzy gospodarką Polski i strefy euro w latach 1995–2007. Głównym celem tego badania jest odpowiedź na pytanie, jak cykle koniunkturalne gospodarki polskiej są zsynchronizowane z cyklami koniunkturalnymi gospodarek strefy euro, oraz jak zjawisko dopasowywania się cykli koniunkturalnych Polski i strefy euro ewoluuje w czasie. W tym celu wykorzystano metody analizy szeregów czasowych, operujące zarówno w

dziedzinie czasu jak i częstotliwości, które umożliwiły pomiar cykli koniunkturalnych oraz określenie ich korelacji. Dzięki temu uzyskano całościowy obraz zależności pomiędzy cyklem gospodarczym Polski i strefy euro poprzez określenie dopasowania amplitud oraz punktów zwrotnych aktywności gospodarczej. Dodatkowo w przeprowadzonym badaniu przedstawiono wyniki dotyczące synchronizacji cykli gospodarczych krajów wchodzących w skład strefy euro, jak również wyniki dotyczące synchronizacji cykli gospodarczych krajów kandydujących do członkostwa w strefie euro. Tym samym umożliwiło to lepsze umiejscowienie Polski wśród innych gospodarek pod względem dopasowania wahań aktywności gospodarczej do cyklu referencyjnego strefy euro. W ramach analizy synchronizacji polskiego cyklu koniunkturalnego z cyklem strefy euro oszacowano również model klasy SVAR, który umożliwił zobrazowanie mechanizmu przenoszenia się wahań koniunkturalnych pomiędzy strefą euro i Polską.

4.2.2. *Przegląd literatury dotyczącej synchronizacji cykli koniunkturalnych*

Problematyka synchronizacji cykli koniunkturalnych wśród krajów strefy euro, a także zależności pomiędzy wahaniami aktywności gospodarczej na świecie, jest podejmowana przez wielu autorów (por. Wynne i Koo (2000), De Haan et al. (2002), Kose et al. (2003), Bergman (2004), Eickmeier i Breitung (2006)). W przypadku analiz dotyczących związków pomiędzy cyklami koniunkturalnymi gospodarek pozostających poza strefą euro a wahaniami koniunkturalnymi gospodarek wchodzących w jej skład liczba dostępnych badań jest nieco mniejsza, aczkolwiek można zaobserwować wyraźny przyrost badań dotyczących tej tematyki. Dokonanie zatem całościowego przeglądu literatury jest trudnym i czasochłonnym zadaniem. W związku z powyższym w rozdziale skupiono się na najbardziej znanych opracowaniach z zakresu przedmiotu. Ostatecznie należy podkreślić, że wśród metod badawczych wykorzystywanych na łamach literatury przedmiotu, analiza spektralna pozostaje narzędziem, które nie jest najczęściej wykorzystywaną techniką. W szczególności w literaturze występuje wyraźny brak badań opartych na analizie spektralnej dla przypadku gospodarki polskiej.

Badania dotyczące synchronizacji cykli koniunkturalnych w ramach struktur strefy euro wskazują, że większość gospodarek osiągnęła wysoką synchronizację cykliczną. Przykładowo Valle e Azevedo (2002), badając wahania koniunktury w krajach UE, jak również w Stanach Zjednoczonych i Japonii, dowodzi, że większość krajów członkowskich strefy euro cechuje się wysoką współzależnością, jeśli chodzi o fluktuacje aktywności

gospodarczej względem referencyjnego cyklu dla strefy euro jako całości. Autor wykazuje, że cykle koniunkturalne w Szwecji, Finlandii, Wielkiej Brytanii oraz Stanach Zjednoczonych mają tendencję do wyprzedzania koniunktury strefy euro o ponad rok. Natomiast w Holandii, Włoszech, Japonii oraz Hiszpanii tempo wyprzedzania jest dużo słabsze i nie przekracza roku. Z kolei Bergman (2004) twierdzi, że europejskie cykle koniunkturalne są do siebie dobrze dopasowane, aczkolwiek odkrywa, że poziom synchronizacji jest niższy w okresach niskiej zmienności kursu walutowego. Autor wskazuje na integrację ekonomiczną (zwiększenie wymiany handlowej) ostatnich dziesięciu lat jako czynnik, który przyczynił się do zwiększenia dopasowania wahań koniunkturalnych w Europie oraz na integrację monetarną jako czynnik osłabiający dopasowanie (poprzez zmniejszoną zmienność kursu walutowego). Ponadto autor dowodzi, że w strefie euro występują różnice pomiędzy amplitudami cykli koniunkturalnych i tym samym podkreśla potencjalny problem implementacji wspólnej polityki monetarnej. Podobne wnioski prezentowali wcześniej Dickerson, Gibson i Tsakalotos (1998), którzy wykazali, że istnieją istotne różnice pomiędzy amplitudami cykli koniunkturalnych krajów członkowskich UE, co może stawiać pod znakiem zapytania przyszłe efekty wspólnej polityki monetarnej. Autorzy wymieniają również powiązania handlowo-finansowe jako czynnik determinujący synchronizację cykli koniunkturalnych. Skrzypczyński (2006), analizując cykle koniunkturalne w strefie euro, wskazuje na wysokie dopasowanie cykli koniunkturalnych gospodarek Niemiec, Austrii, Francji, Belgii oraz Holandii do cyklu strefy euro jako całości. W przypadku pozostałych gospodarek strefy euro autor wskazuje, że synchronizacja jest słabsza. Podobnie jak w innych badaniach autor również wskazuje na występowanie pewnych różnic pomiędzy amplitudami i punktami zwrotnymi cykli gospodarczych w ramach strefy euro. Wynne i Koo (2000), bazując na analizie krajów „piętnastki” UE i dwunastu dystryktach Rezerwy Federalnej w Stanach Zjednoczonych, zwracając uwagę na wymianę handlową jako czynnik wpływający na synchronizację koniunktury. Ponadto autorzy powołują się na tzw. efekt sąsiedztwa (*ang. border effect*), który polega na tym, że zwiększona synchronizacja cykli koniunkturalnych jest obserwowana w krajach sąsiadujących. Kraje te wykazują większą skłonność do wymiany handlowej aniżeli kraje oddalone od siebie. Autorzy pokazali również, że w krajach będących członkami UE przez dłuższy czas (*ang. long-standing members*) widać większą synchronizację wahań aktywności gospodarczej niż u członków z krótkim stażem. Ponadto autorzy wnioskują, że cykle koniunkturalne dużych gospodarek UE są wyraźnie połączone z cyklami koniunkturalnymi Stanów Zjednoczonych (w szczególności cykl gospodarczy Wielkiej Brytanii). De Haan, Inklaar i Sleijpen (2002), badając regiony USA i Niemiec,

wskazują na intensywność wymiany handlowej jako czynnik wpływający na synchronizację cykli koniunkturalnych. Autorzy wykazują, że wyższa intensywność wymiany handlowej przekłada się na większą synchronizację fluktuacji koniunktury pomiędzy partnerami handlowymi. Rose i Engel (2002) pokazali, że kraje członkowskie unii monetarnych wykazują wyższą synchronizację cykli koniunkturalnych aniżeli kraje posiadające krajową walutę. Autorzy tłumaczą, że odzwierciedla to zwiększone przepływy handlowe pomiędzy krajami tworzącymi unie monetarne. Wnioski prezentowane przez autorów są jednak sprzeczne ze stanowiskiem Bergmana (2004), który wskazuje na integrację monetarną jako czynnik osłabiający synchronizację cykli koniunkturalnych.

Badania dotyczące synchronizacji cykli koniunkturalnych pomiędzy nowymi członkami UE, którzy pozostają poza strefą euro, a cyklami gospodarek wchodzących w jej skład wskazują, że dopasowanie jest mniejsze aniżeli wśród gospodarek tworzących unie monetarną. Dodatkowo można zaobserwować istotne różnice pomiędzy tymi gospodarkami pod względem synchronizacji cyklicznej ze strefą euro rozpatrywaną jako całość. Przykładowo, Darvas i Szapary (2004) wskazują, że Polska, Węgry i Słowenia, która w momencie powstawania ich artykułu pozostawała poza strefą euro, charakteryzują się dużym dopasowaniem wahań aktywności gospodarczej do strefy euro. Z kolei kraje takie jak Czechy i Słowacja, która podobnie jak Słowenia w momencie powstawania ich artykułu pozostawała poza strefą euro, zostały zidentyfikowane jako mające mniejszą synchronizację, natomiast kraje bałtyckie oceniono jako gospodarki o najniższym dopasowaniu wahań aktywności gospodarczej do strefy euro. Z kolei Varpalotai (2005) przedstawia nieco odmienny obraz synchronizacji niż ten wyłaniający się z pracy Darvasa i Szapary (2004) zwracając uwagę przede wszystkim na różnice w występowaniu punktów zwrotnych. W przypadku Estonii, Węgier i Słowenii autor wskazuje, że cykle gospodarcze mają tendencję do zbliżonego w stosunku do strefy euro występowania punktów zwrotnych. W przypadku Polski autor podkreśla obecność istotnego przesunięcia faz wahań aktywności gospodarczej w porównaniu ze strefą euro. Eickmeier i Breitung (2006), badając cykle koniunkturalne w nowych gospodarkach UE, wskazują na znaczne zróżnicowanie synchronizacji cykli tych gospodarek ze strefą euro. Autorzy wymieniają Węgry, Estonię, Słowenię i Polskę jako kraje najlepiej dopasowane pod względem wahań koniunkturalnych do strefy euro. Ciekawym opracowaniem na temat synchronizacji cykli koniunkturalnych pomiędzy nowymi członkami UE a strefą euro jest meta-analiza autorstwa Fidrmuca i Korhonena (2006). Dokonując przeglądu 35 publikacji z zakresu synchronizacji cykli koniunkturalnych gospodarek Europy Środkowo-Wschodniej z cyklem referencyjnym strefy euro autorzy wskazują, że największą

korelację cykli można odnotować w przypadku Węgier, Słowenii oraz Polski. Ważnym stwierdzeniem autorów jest to, że obraz synchronizacji cykli koniunkturalnych może różnić się ze względu na wykorzystywaną metodę badawczą. Wreszcie warto również przytoczyć wyniki badania autorstwa Woźniaka i Paczyńskiego (2007). Autorzy wskazują za pomocą technik analizy czasowo-częstotliwościowej, że dopasowanie wahań aktywności gospodarczej pomiędzy Polską a strefą euro jest niskie w przypadku cykli o długim okresie oraz znacznie wyższe w przypadku cykli o krótkim okresie. Podobne wnioski dla Polski i Węgier przedstawili za pomocą zbliżonych metod badawczych Hughes Hallett i Richter (2007).

Wnioski prezentowane na łamach literatury przedmiotu wskazują na istnienie synchronizacji cyklicznej pośród krajów członkowskich strefy euro. Jednakże nie są to wnioski spójne i jednoznaczne, co m.in. jest związane z długością wykorzystanych prób obserwacji, jak również różnorodnością wykorzystywanych metod ekonometrycznych. Podobnie w przypadku gospodarek Europy Środkowo-Wschodniej wyniki badań różnych autorów wskazują na występowanie pewnej synchronizacji cyklicznej tych gospodarek ze strefą euro, wskazując m.in. na Polskę jako państwo z relatywnie wysokim dopasowaniem krajowego cyklu koniunkturalnego do wahań aktywności gospodarczej w strefie euro.

4.2.3. Synchronizacja cykli koniunkturalnych

Estymacja zmiennych obrazujących kształtowanie się aktywności gospodarczej w Polsce i pozostałych gospodarkach objętych analizą została dokonana na podstawie szeregów czasowych realnego PKB w latach 1995–2007⁹⁰. Z uwagi na występowanie sezonowości w powyższych danych dokonano oczyszczania sezonowego przyjętych szeregów czasowych za pomocą metody TRAMO/SEATS⁹¹. W celu uzyskania składowych cyklicznych wyżej wymienionych szeregów czasowych wykorzystano filtr Christiano-Fitzgeralda (1999). Z uwagi na specyfikację tego narzędzia koniecznym było przyjęcie *a priori* długości fluktuacji, które mogą być postrzegane jako wahania o charakterze koniunkturalnym. W przeprowadzonej analizie przyjęto, że komponent cyklu koniunkturalnego to oscylacje o długościach cyklu leżących pomiędzy 1,5 roku a 10 latami. Założenie odnośnie do pasma

⁹⁰ W badaniu uwzględniono oprócz Polski i strefy euro, rozpatrywanej jako agregat 13 krajów, 16 wybranych gospodarek: Czechy, Estonię, Litwę, Łotwę, Słowację, Węgry, Austrię, Belgię, Finlandię, Francję, Hiszpanię, Holandię, Niemcy, Portugalię, Słowenię oraz Włochy. W momencie powstawania analizy Słowacja pozostawała poza strefą euro.

⁹¹ W ramach metody TRAMO/SEATS zastosowano dekompozycję addytywną. Szeregi czasowe realnego PKB zostały uprzednio poddane transformacji logarytmicznej. W dalszej części zmienne określane jako realny PKB dotyczą zmiennych przetransformowanych za pomocą logarytmu naturalnego i oczyszczonych z wahań sezonowych, o ile nie zaznaczono inaczej.

wahań koniunkturalnych, a także określenie czy poddawany dekompozycji szereg czasowy jest stacjonarny czy nie, są warunkami koniecznymi przy wyborze odpowiedniej specyfikacji filtra CF. W celu określenia stopnia integracji badanych zmiennych posłużono się testem pierwiastka jednostkowego ADF (por. Dickey i Fuller (1979)) oraz testem stacjonarności KPSS (por. Kwiatkowski et al. (1992)).

O wykorzystaniu filtra CF jako narzędzia ekstrakcji cykli koniunkturalnych zdecydowano z uwagi na łatwość aplikacji tej metody do wszystkich przyjętych w badaniu szeregów czasowych. Z uwagi na to, że filtr CF generuje cykle, które ilościowo i jakościowo są zbliżone do cykli uzyskanych za pomocą filtra HP i jego zmodyfikowanej wersji uznano, że prezentacja wyników analizy na podstawie tych narzędzi nie będzie wносиła wartości dodanej do wyników badania. Ponadto wykorzystany filtr CF jest narzędziem uwzględniającym strukturę stochastyczną dekomponowanej zmiennej, a tym samym filtracja nie ma charakteru *ad hoc* jak np. w przypadku filtra HP. Ostatnim argumentem przemawiającym za wykorzystaniem filtra CF jest to, że dzięki temu narzędziu można ograniczyć analizę tylko do fluktuacji o charakterze koniunkturalnym, pomijając przede wszystkim wahania nieregularne, które z punktu widzenia celów badania są nieistotne. Z kolei w przypadku modelu SVAR typu Blancharda-Quaha oraz przytoczonego wcześniej modelu UCARIMA należy liczyć się z możliwością uzyskania w przypadku niektórych gospodarek niezadowolających wyników. Przykładowo może to oznaczać uzyskanie nieistotnych statystycznie oszacowań parametrów. Tym samym wiąże się to z niemożnością uzyskania komponentów cyklicznych, które mogą być uznane za dobrą aproksymację cyklu koniunkturalnego. Wy tłumaczeniem tego stanu rzeczy może być to, że estymacja jest oparta na relatywnie krótkiej próbie obserwacji dla analizy cyklu koniunkturalnego, która obejmuje 13 lat danych lub nieadekwatność struktury przyjętego modelu dla danej gospodarki.

Wykorzystując komponent cykliczny realnego PKB w Polsce uzyskany za pomocą filtra CF oraz analogiczne miary wahań aktywności gospodarczej w pozostałych gospodarkach w okresie I kw. 1995 – IV kw. 2007 (52 kwartalne obserwacje) dokonano analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych poszczególnych gospodarek z cyklem referencyjnym strefy euro rozpatrywanej jako całość. Wyniki testów ADF i KPSS wskazują, że w większości przypadków szeregi czasowe realnego PKB powinny być postrzegane jako realizacje procesu $I(1)$ z dryfem (por. tabele 4.16-4.19). Tym samym we wszystkich przypadkach wykorzystano specyfikację $I(1)$ dla filtra CF, uprzednio usuwając dryf z każdego szeregu czasowego.

Tabela 4.16. Test ADF z trendem liniowym dla realnego PKB

	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka ADF (pierwsza różnica)	Opóźnienie	p-value
strefa euro	-1,200	0	0,900	-6,401	0	0,000
Czechy	-1,051	5	0,926	-7,013	4	0,000
Estonia	-2,714	2	0,236	-3,600	7	0,042
Litwa	-1,722	0	0,727	-8,989	0	0,000
Łotwa	-0,482	0	0,981	-5,829	0	0,000
Polska	-2,367	1	0,392	-3,995	0	0,015
Słowacja	1,932	1	1,000	-2,438	3	0,356
Węgry	-0,158	9	0,992	-0,868	8	0,950
Austria	-1,861	0	0,660	-7,925	0	0,000
Belgia	-1,755	0	0,712	-5,884	0	0,000
Finlandia	-2,237	2	0,459	-3,247	3	0,088
Francja	-1,065	0	0,925	-6,065	0	0,000
Hiszpania	-2,246	3	0,454	-2,725	2	0,232
Holandia	-2,666	3	0,255	-2,707	1	0,238
Niemcy	-2,196	0	0,481	-9,471	0	0,000
Portugalia	-1,197	0	0,900	-7,420	0	0,000
Słowenia	-3,158	0	0,104	-7,599	1	0,000
Włochy	-1,785	5	0,696	-3,251	4	0,088

Uwaga: hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza. W tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996).

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.17. Test ADF ze stałą dla realnego PKB

	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka ADF (pierwsza różnica)	Opóźnienie	p-value
strefa euro	-0,408	0	0,900	-6,450	0	0,000
Czechy	4,768	5	1,000	-1,664	2	0,443
Estonia	2,413	8	1,000	-4,127	3	0,002
Litwa	0,670	0	0,990	-8,844	0	0,000
Łotwa	4,052	0	1,000	-2,955	1	0,047
Polska	-0,770	1	0,819	-4,054	0	0,003
Słowacja	3,268	1	1,000	-1,084	2	0,715
Węgry	-2,345	9	0,163	-0,723	10	0,829
Austria	-0,275	0	0,921	-8,009	0	0,000
Belgia	-0,119	0	0,942	-5,948	0	0,000
Finlandia	-1,204	0	0,666	-3,062	3	0,037
Francja	-0,486	4	0,885	-6,110	0	0,000
Hiszpania	-0,036	0	0,950	-2,699	2	0,082
Holandia	-1,105	2	0,707	-2,668	1	0,087
Niemcy	-0,503	0	0,882	-9,572	0	0,000
Portugalia	-3,286	0	0,021	-6,210	0	0,000
Słowenia	0,297	2	0,976	-7,701	1	0,000
Włochy	-1,936	5	0,314	-2,916	4	0,051

Uwaga: hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza. W tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996).

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.18. Test KPSS z trendem liniowym dla realnego PKB

	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia	Statystyka KPSS (pierwsza różnica)	Szerokość pasma przenoszenia
strefa euro	0,167**	5	0,094	5
Czechy	0,232***	5	0,101	4
Estonia	0,213**	5	0,050	4
Litwa	0,199**	5	0,055	1
Łotwa	0,237***	5	0,051	3
Polska	0,124*	5	0,137*	4
Słowacja	0,212**	5	0,214**	4
Węgry	0,122*	5	0,183**	5
Austria	0,130*	5	0,122*	2
Belgia	0,118	5	0,062	2
Finlandia	0,170**	5	0,120*	5
Francja	0,171**	5	0,092	5
Hiszpania	0,162**	5	0,107	5
Holandia	0,190**	5	0,145*	5
Niemcy	0,141*	5	0,083	1
Portugalia	0,236***	5	0,139*	2
Słowenia	0,114	5	0,084	6
Włochy	0,173**	5	0,060	4

Uwaga: hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Newey-West (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne wynoszą odpowiednio 0,119, 0,146 i 0,216 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. Symbole *, ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej kolejno przy poziomie istotności 10%, 5% i 1%.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.19. Test KPSS ze stałą dla realnego PKB

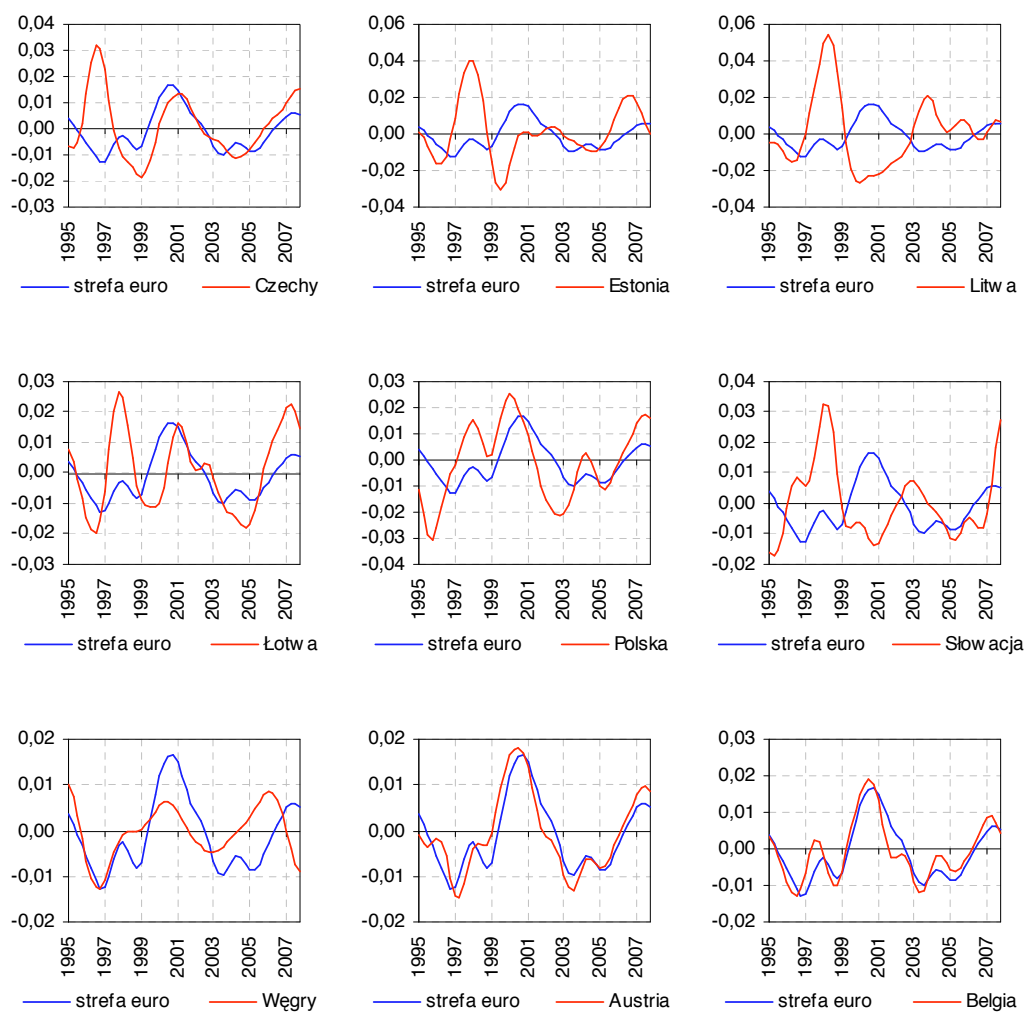
	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia	Statystyka KPSS (pierwsza różnica)	Szerokość pasma przenoszenia
strefa euro	0,956***	5	0,104	5
Czechy	0,910***	5	0,541**	5
Estonia	0,965***	5	0,247	4
Litwa	0,961***	5	0,258	2
Łotwa	0,959***	5	0,580**	5
Polska	0,958***	5	0,138	4
Słowacja	0,945***	5	0,470**	5
Węgry	0,966***	5	0,188	5
Austria	0,957***	5	0,121	2
Belgia	0,961***	5	0,061	2
Finlandia	0,958***	5	0,178	5
Francja	0,955***	5	0,107	5
Hiszpania	0,968***	5	0,105	5
Holandia	0,933***	5	0,220	5
Niemcy	0,928***	5	0,082	1
Portugalia	0,882***	5	0,589**	4
Słowenia	0,971***	5	0,104	6
Włochy	0,947***	5	0,152	4

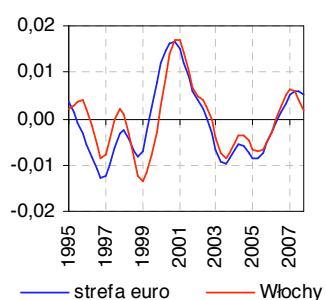
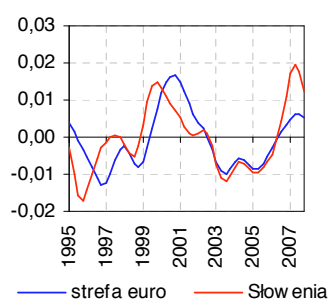
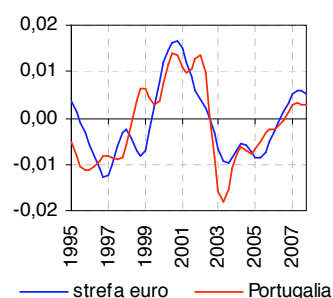
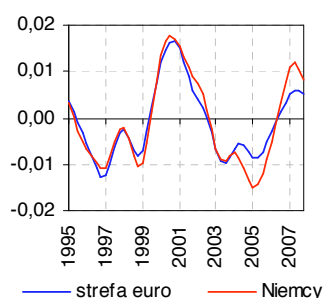
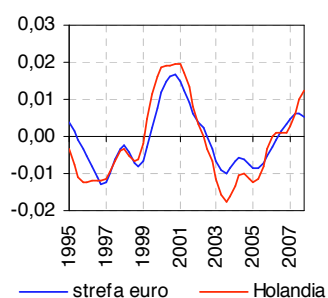
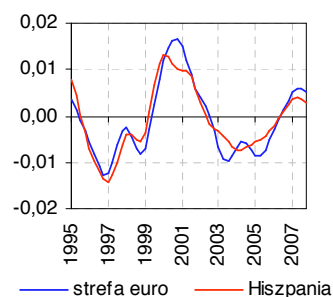
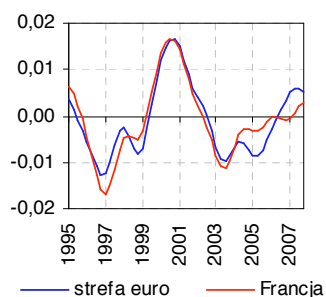
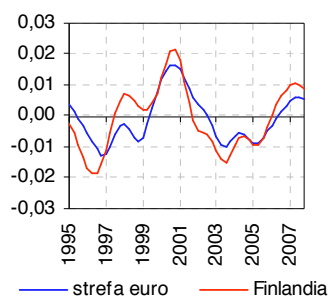
Uwaga: hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Newey-West (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne wynoszą odpowiednio 0,347, 0,463 i 0,739 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności. Symbole ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej kolejno przy poziomie istotności 5% i 1%.

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.13 przedstawia składowe cykliczne poszczególnych gospodarek na tle składowej cyklicznej strefy euro rozpatrywanej jako całość. Zgodnie z wynikami testów ADF i KPSS składowe te okazały się być zmiennymi stacjonarnymi (por. tabela 4.20), a tym samym możliwym było zastosowanie metod analizy spektralnej i cross-spektralnej w celu formalnego opisu zjawiska synchronizacji cykli koniunkturalnych.

Rysunek 4.13. Składowe cykliczne realnego PKB w analizowanych gospodarkach





Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.20. Testy ADF i KPSS ze stałą dla składowych cyklicznych realnego PKB

	Statystyka ADF (poziom)	Opóźnienie	p-value	Statystyka KPSS (poziom)	Szerokość pasma przenoszenia
strefa euro	-5,413	3	0,000	0,104	5
Czechy	-11,354	3	0,000	0,072	5
Estonia	-7,005	3	0,000	0,073	5
Litwa	-6,283	3	0,000	0,067	5
Łotwa	-6,991	3	0,000	0,090	5
Polska	-4,906	3	0,000	0,126	5
Słowacja	-6,548	3	0,000	0,088	5
Węgry	-10,344	3	0,000	0,114	5
Austria	-6,917	3	0,000	0,100	5
Belgia	-4,685	3	0,000	0,101	5
Finlandia	-4,998	3	0,000	0,123	5
Francja	-6,890	3	0,000	0,097	5
Hiszpania	-7,607	3	0,000	0,113	5
Holandia	-7,667	3	0,000	0,120	5
Niemcy	-5,121	3	0,000	0,099	5
Portugalia	-5,316	3	0,000	0,136	5
Słowenia	-4,207	3	0,002	0,153	5
Włochy	-5,389	3	0,000	0,068	5

Uwaga: w przypadku testu ADF hipoteza zerowa zakłada obecność pierwiastka jednostkowego, natomiast w przypadku testu KPSS hipoteza zerowa mówi o stacjonarności badanej zmiennej. Wartość opóźnienia w regresji pomocniczej testu ADF dobrano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza. W przypadku testu ADF w tabeli zawarto jednostronne wartości *p-value* MacKinnona (1996). W przypadku testu KPSS szerokość pasma przenoszenia przy estymacji wariancji długookresowej za pomocą zmodyfikowanego okna Bartletta dobrano na podstawie metody Neweya-Westa (1994). Asymptotyczne wartości krytyczne dla testu KPSS wynoszą odpowiednio 0,347, 0,463 i 0,739 dla 10%, 5% i 1% poziomu istotności.

Źródło: opracowanie własne.

W pierwszym etapie analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych posłużono się współczynnikami korelacji. W tabeli 4.21 przedstawiono współczynniki korelacji bieżącej składowych cyklicznych poszczególnych gospodarek z analogiczną składową dla strefy euro jako całości. Uzyskane wyniki wskazują, że wahania aktywności gospodarczej Polski i strefy euro są średnio skorelowane, niemniej jednak względnie wysoko pośród innych gospodarek pozostających poza strefą euro. Z kolei gospodarki wchodzące w skład strefy euro wykazują wysoką korelację krajowych cykli gospodarczych z cyklem referencyjnym strefy euro rozpatrywanej jako całość.

Tabela 4.21. Współczynniki korelacji składowych cyklicznych realnego PKB poszczególnych gospodarek i strefy euro

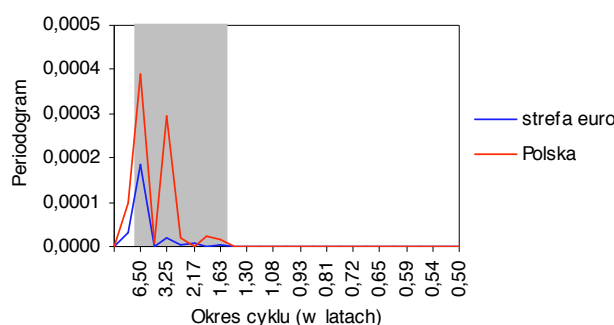
Czechy	Estonia	Litwa	Łotwa	Polska	Słowacja	Węgry
0,213	-0,053	-0,550***	0,461***	0,482***	-0,313**	0,451***
Austria	Belgia	Finlandia	Francja	Hiszpania	Holandia	Niemcy
0,912***	0,898***	0,810***	0,929***	0,941***	0,923***	0,965***
Portugalia	Słowenia	Włochy				
0,771***	0,661***	0,850***				

Uwaga: symbole ** i *** oznaczają odrzucenie hipotezy zerowej mówiącej o tym, że współczynnik korelacji jest równy zero kolejno przy poziomie istotności 5% i 1%.

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym etapie na podstawie analizy spektralnej składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce i strefie euro określono długości cykli mających dominujący wpływ na kształtowanie wahań aktywności gospodarczej w obydwu gospodarkach. Rysunek 4.14 przedstawia periodogramy składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce i strefie euro wynikające z zastosowania filtra CF.

Rysunek 4.14. Periodogramy składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce i strefie euro



Uwaga: zacieniony obszar wyznacza pasmo długości cykli, które mogą być uznane za wahania aktywności gospodarczej zgodnie z przyjętą definicją cyklu koniunkturalnego. Z uwagi na to, że periodogramy są wyprowadzone na podstawie dyskretnych częstotliwości Fouriera pasmo to nie pokrywa dokładnie przedziału 1,5–10 lat, a jedynie jest jego przybliżeniem. Składowe cykliczne są złożone z 52 obserwacji, a tym samym zaznaczone pasmo pokrywa zakres cykli od 1,6 do 6,5 roku.

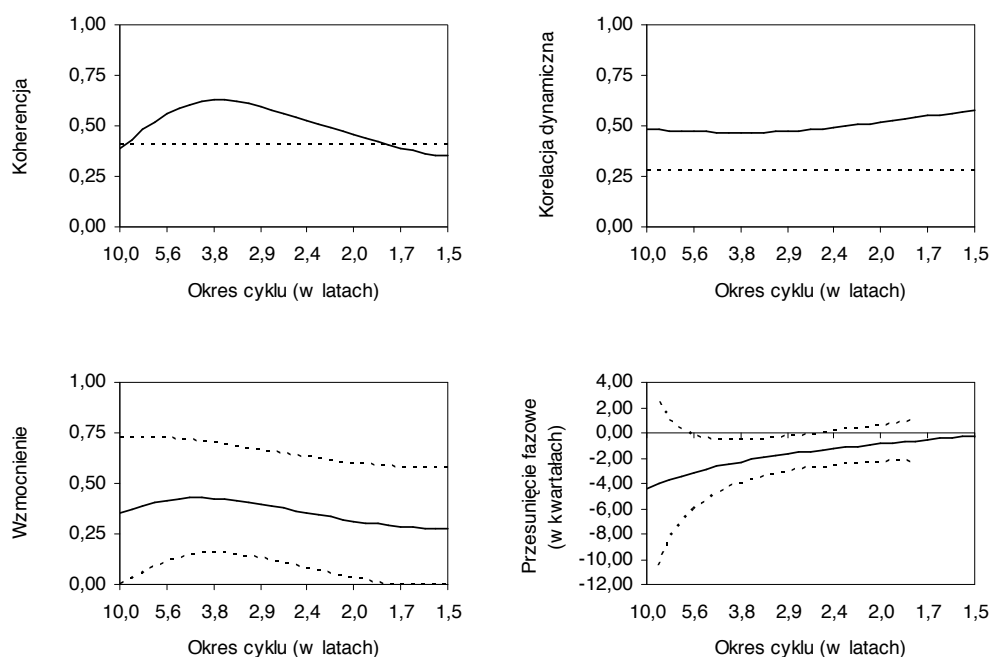
Źródło: opracowanie własne.

Porównanie obydwu rozkładów wariancji wskazuje, że zarówno cykl koniunkturalny w Polsce, jak i strefie euro jest kształtowany przez dwa rodzaje fluktuacji: o okresie 3-letnim oraz o okresie około 6–7 lat. Ponadto cykl 3-letni w przypadku strefy euro wyraźnie słabiej wpływa na ogólny przebieg wahań aktywności gospodarczej aniżeli ma to miejsce w przypadku Polski. Dodatkowo dzięki uzyskanym periodogramom można zaobserwować, że cykl koniunkturalny w strefie euro cechuje się mniejszymi amplitudami niż cykl Polski. Zostało to bezpośrednio wyeksponowane na podstawie statystyk cross-spektralnych, które umożliwiły zarówno porównanie zróżnicowania amplitud badanych cykli, jak również zobrazowanie ich przesunięć w czasie⁹². Rysunek 4.15 przedstawia oszacowane statystyki cross-spektralne dla Polski i strefy euro⁹³.

⁹² Komponent cyklu koniunkturalnego strefy euro jest traktowany jako zmienna zależna, natomiast komponent cyklu koniunkturalnego Polski jako zmienna niezależna. Układ ten zachowano również w dalszej części i jest on jedynie umowny, co wynika z wymogu określenia takiego układu w przypadku analizy pary szeregów czasowych. Określenie zmienna zależna i niezależna nie jest tu podyktowane przyczynowością czy też innym kryterium.

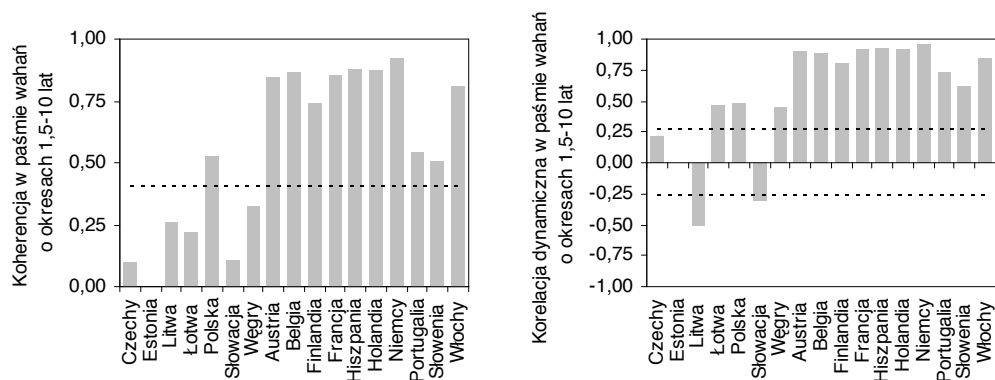
⁹³ Przy estymacji statystyk cross-spektralnych wykorzystano metodę wygładzania w dziedzinie opóźnień za pomocą okna Parzena, uwzględniając opóźnienia do 14 włącznie. W przypadku koherencji i dynamicznego współczynnika korelacji naniesiono na wykresy korespondujące wartości krytyczne dla 5% poziomu istotności,

Rysunek 4.15. Analiza cross-spektralna składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce i strefie euro

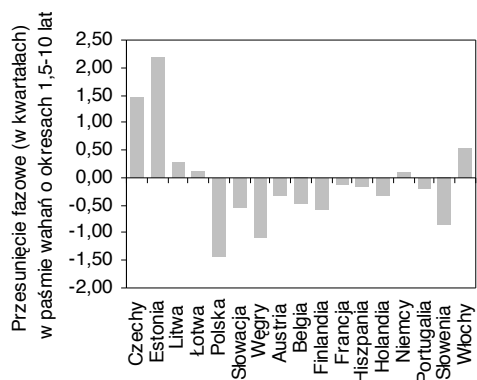
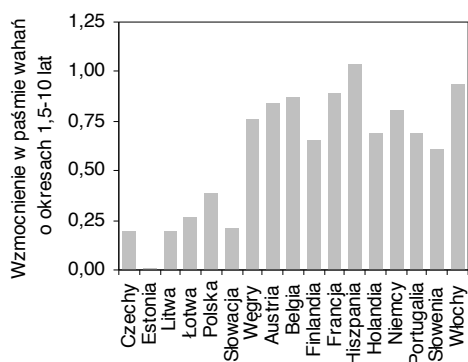


Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.16. Analiza cross-spektralna składowych cyklicznych realnego PKB w analizowanych gospodarkach i strefie euro



natomiast w przypadku wzmocnienia i przesunięcia fazowego zaznaczono korespondujące 95% przedziały ufności. Wykresy dotyczące statystyk cross-spektralnych obrazujących współzależności pomiędzy cyklami pozostałych gospodarek a cyklem strefy euro nie zostały zaprezentowane z uwagi na dużą ilość informacji konieczną do przedstawienia tego typu zestawieniu. W zamian na rysunku 4.16 przedstawiono korespondujące wartości tych statystyk w paśmie cykli o charakterze koniunkturalnym (1,5–10 lat). W przypadku koherencji i dynamicznego współczynnika korelacji naniesiono na wykresy korespondujące wartości krytyczne dla 5% poziomu istotności.



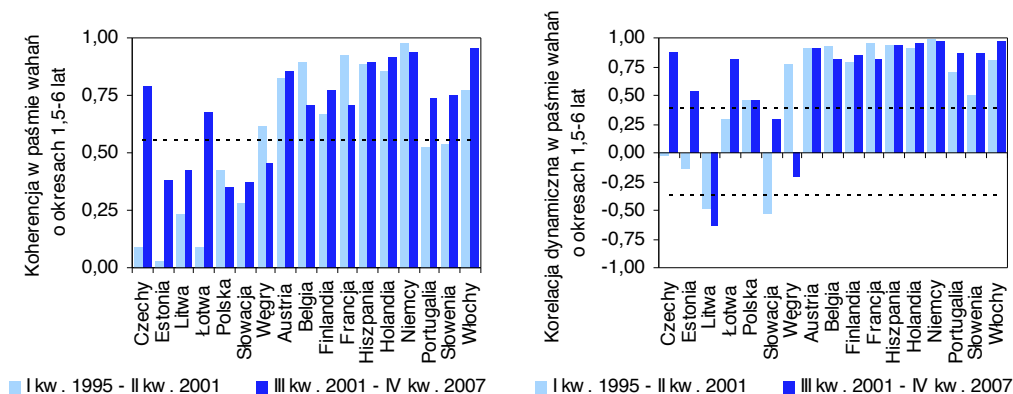
Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki wskazują na średnie dopasowanie cyklu koniunkturalnego Polski do analogicznych wahań aktywności gospodarczej obserwowanych w strefie euro w okresie I kw. 1995 – IV kw. 2007. Koherencja przyjmuje wartości istotnie różne od zera przy założonym 5-procentowym poziomie istotności w zdecydowanej większości pasma wahań koniunkturalnych, niemniej jednak jej poziom w całym paśmie wahań koniunkturalnych wynosi około 52% (por. rysunek 4.16). Współczynnik korelacji dynamicznej wskazuje na istotną dodatnią zależność pomiędzy cyklem w Polsce i strefie euro. Siła powiązania pomiędzy obydwo ma komponentami jest umiarkowana i kształtuje się na poziomie około 48% w całym paśmie wahań koniunkturalnych (por. rysunek 4.16). Jeżeli chodzi o miarę wzmocnienia, to wskazuje ona wyraźnie, że amplitudy wahań koniunkturalnych w Polsce są zdecydowanie wyższe od amplitud fluktuacji koniunkturalnych w strefie euro (około 2,6 razy dla całego pasma wahań 1,5–10 lat, por. rysunek 4.16). Z kolei przesunięcie fazowe, które przyjmuje ujemne wartości na całym paśmie wahań koniunkturalnych wskazuje, że cykl gospodarczy w Polsce jest wyprzedzający w stosunku do koniunktury w strefie euro. Jest to szczególnie wyraźnie widoczne w przypadku cykli o dłuższych okresach (wyprzedzenie rzędu roku, por. rysunek 4.15). W przypadku cykli o krótszych okresach przesunięcie występowania punktów zwrotnych aktywności gospodarczej w obydwu regionach jest dużo mniejsze (rzędu 1–2 kwartałów, por. rysunek 4.15). Tym samym dzięki analizie cross-spektralnej komponentów cyklicznych realnego PKB w Polsce i strefie euro można dojść do wniosku, że cykle gospodarcze Polski i strefy euro są umiarkowanie zsynchronizowane, ponieważ występują zarówno różnice w amplitudach, jak również różnice w czasie występowania punktów zwrotnych, zastrzegając jednak, że wahania o okresach do 3 lat w obydwu gospodarkach są lepiej dopasowane aniżeli cykle o dłuższych okresach, co w szczególności dotyczy występowania punktów zwrotnych. Wreszcie należy zauważyć, że dopasowanie

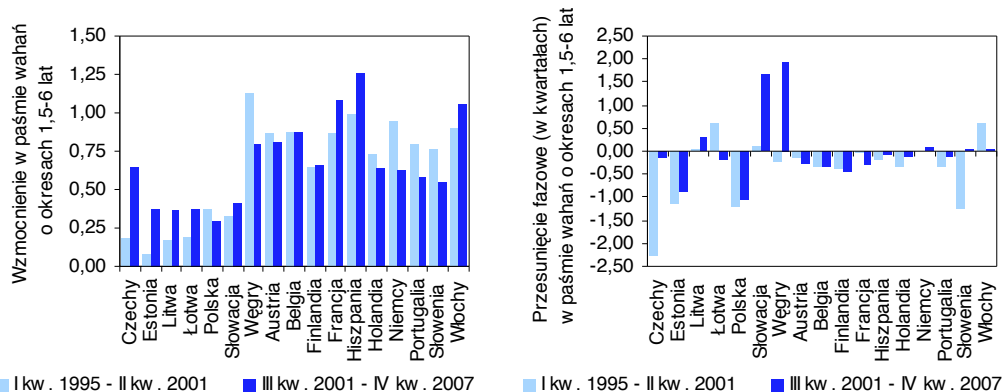
cyklu gospodarki polskiej do cyklu referencyjnego strefy euro w okresie I kw. 1995 – IV kw. 2007 jest relatywnie wysokie pośród gospodarek pozostających poza strefą euro oraz wyraźnie niższe pośród gospodarek wchodzących w skład strefy euro (por. rysunek 4.16).

W celu określenia przebiegu procesu dopasowywania się cyklu koniunkturalnego w Polsce i strefie euro w czasie dokonano estymacji statystyk cross-spektralnych na dwóch próbach liczących po 26 obserwacji każda. Analogiczne obliczenia wykonano dla pozostałych gospodarek objętych analizą względem strefy euro. Wybór tej liczby obserwacji został podyktowany z jednej strony długością całej dostępnej próby obserwacji (52 kwartalne obserwacje), natomiast z drugiej długością cykli zidentyfikowanych w poprzednim etapie jako te, które mają dominujący wpływ na kształtowanie wahań aktywności gospodarczej w obydwu gospodarkach (do 6–7 lat łącznie). Rysunek 4.17 przedstawia uzyskane statystyki cross-spektralne dla Polski i innych gospodarek względem strefy euro w okresie I kw. 1995 – II kw. 2001 oraz III kw. 2001 – IV kw. 2007 dla wahań o okresach pomiędzy 1,5 roku i 6 lat⁹⁴.

Rysunek 4.17. Analiza cross-spektralna składowych cyklicznych realnego PKB w analizowanych gospodarkach i strefie euro w dwóch próbach obserwacji



⁹⁴ Przy estymacji statystyk cross-spektralnych wykorzystano metodę wygładzania w dziedzinie opóźnień za pomocą okna Parzena, uwzględniając opóźnienia do 10 łącznie. W przypadku koherencji i dynamicznego współczynnika korelacji naniesiono na wykresy korespondujące wartości krytyczne dla 5% poziomu istotności.

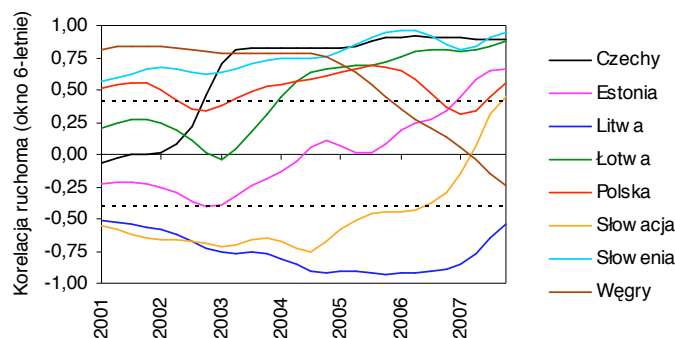


Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki wskazują, że zależność pomiędzy cyklem gospodarczym w Polsce i strefie euro pozostaje zbliżona w obydwu próbach, co może wskazywać na stabilność zjawiska synchronizacji cykli w czasie. W przypadku gospodarki polskiej wszystkie statystyki cross-spektralne pozostają w obydwu próbach na zbliżonym poziomie, podobnie jak ma to miejsce w przypadku zdecydowanej większości gospodarek będących członkami unii monetarnej. Wyraźne zmiany są natomiast widoczne w przypadku Czech, Estonii, Łotwy i Słowenii, które wykazują tendencję do wyższej synchronizacji krajowych cykli gospodarczych z wahaniami koniunkturalnymi strefy euro w drugiej próbie. W przypadku tych gospodarek widoczny jest wyraźny przyrost zarówno koherencji, jak i dodatniej korelacji dynamicznej, którym towarzyszy równoczesny spadek zróżnicowania amplitud i przesunięć pomiędzy punktami zwrotnymi. Z kolei w przypadku Litwy i Węgier zaobserwowano spadek synchronizacji. W przypadku Litwy poprzez wzrost ujemnej korelacji dynamicznej, z kolei w przypadku Węgier poprzez wyraźny wzrost przesunięć występowania punktów zwrotnych. Można dojść do wniosku, że w przypadku Czech, Estonii, Łotwy i Słowenii, która 1 stycznia 2007 r. weszła do strefy euro, proces dostosowywania się cykli gospodarczych pomiędzy tymi krajami a unią monetarną postępuje szybciej niż ma to miejsce w przypadku Polski. Potwierdzenie powyższego stwierdzenia płynącego z analizy cross-spektralnej zobrazowano na rysunku 4.18. Rysunek ten przedstawia współczynniki bieżącej korelacji ruchomej (okno 6-letnie) składowych cyklicznych realnego PKB w Czechach, Estonii, Litwie, Łotwie, Polsce, Słowacji, Słowenii i Węgrzech ze składową cykliczną realnego PKB w strefie euro w okresie I kw. 2001 – IV kw. 2007. Pomimo, że zależności w przypadku Polski nie wykazują tendencji do umacniania się w czasie, pozostają w najbardziej korzystnym układzie w sensie miary koherencji, korelacji dynamicznej i dopasowania amplitud reprezentowanego przez

wzmocnienie dla całej próby obserwacji (I kw. 1995 – IV kw. 2007) pośród gospodarek pozostających poza strefą euro.

Rysunek 4.18. Korelacje ruchome pomiędzy składowymi cyklicznymi realnego PKB w wybranych gospodarkach i strefie euro



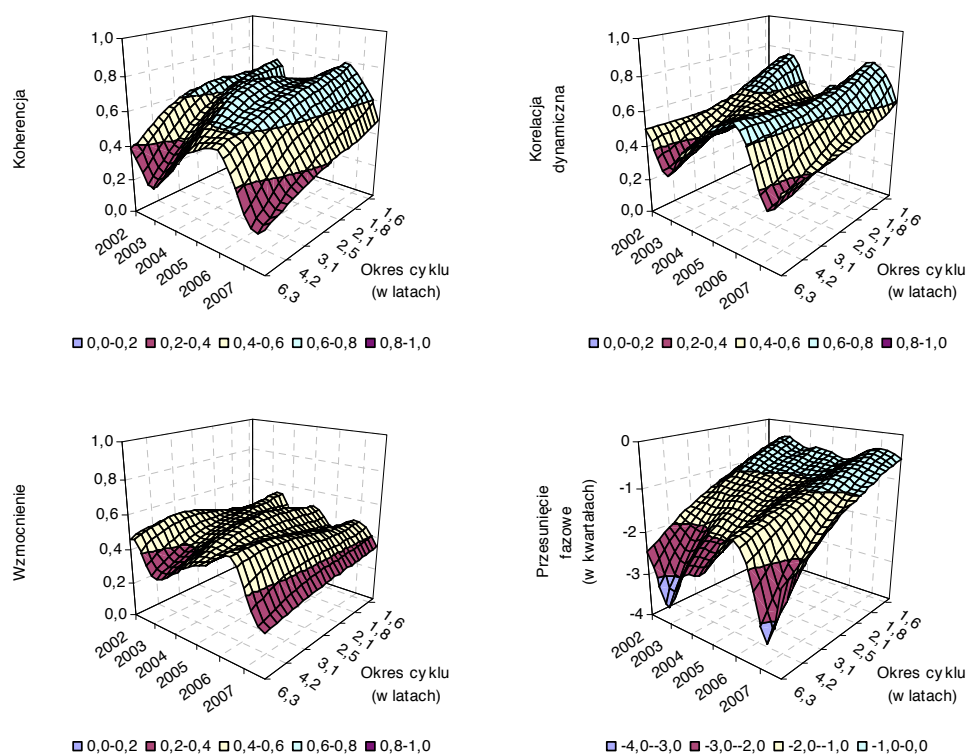
Uwaga: linie przerywane oznaczają wartości krytyczne dla 5% poziomu istotności.

Źródło: opracowanie własne.

W ostatnim etapie analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych Polski i strefy euro przeprowadzono czasowo-częstotliwościową analizę składowych cyklicznych realnego PKB w obydwu regionach. Dzięki analizie tego typu możliwym było zobrazowanie kształtowania się koherencji, wzmocnienia, korelacji dynamicznej oraz przesunięcia fazowego w czasie, co należy traktować jako rozszerzenie przedstawionej w poprzednim etapie analizy cross-spektralnej na dwóch próbach obserwacji. Tym samym pozwoliło to na sformułowanie bardziej szczegółowych wniosków dotyczących stabilności synchronizacji cyklicznej obydwu gospodarek w czasie. W tym celu oszacowano statystyki cross-spektralne na podstawie ruchomego okna obejmującego po 26 kwartalnych obserwacji z okresu I kw. 1995 – IV kw. 2007⁹⁵. Podobnie jak poprzednio wybór tej szerokości okna został podyktowany maksymalną długością cykli (6–7 lat), które w przypadku obydwu gospodarek zostały zidentyfikowane jako dominujące na podstawie pełnej próby obserwacji, jak również długością całej dostępnej próby obserwacji (52 kwartalne obserwacje). Rysunek 4.19 przedstawia uzyskane wyniki dla okresu 2002–2007.

⁹⁵ Przy estymacji statystyk cross-spektralnych wykorzystano metodę wygładzania w dziedzinie opóźnień za pomocą okna Parzena, uwzględniając opóźnienia do 10 włącznie.

Rysunek 4.19. Analiza czasowo-częstotliwościowa składowych cyklicznych realnego PKB w Polsce i strefie euro



Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wyniki skłaniają do wniosku, że dopasowanie pomiędzy cyklem koniunkturalnym w Polsce i strefie euro pozostaje względnie stabilne w czasie, aczkolwiek można wyróżnić okresy, w których obserwowano wyraźnie lepsze dopasowanie niżeli przy końcu próby obserwacji, tj. pod koniec 2007 r. Równocześnie analiza zachowania się statystyk cross-spektralnych w czasie wskazuje, analogicznie do wyników uzyskanych dla całej próby obserwacji, że dopasowanie krótszych cykli jest lepsze niżeli cykli o dłuższym okresie, co w szczególności dotyczy dopasowania pomiędzy punktami zwrotnymi aktywności gospodarczej w obydwu regionach. W latach 2005–2006 obserwowano najwyższe wartości zarówno w zakresie koherencji, jak i korelacji dynamicznej przy jednocześnie najniższym przesunięciu punktów zwrotnych aktywności gospodarczej dla cykli o wszystkich rozpatrywanych długościach. Może to świadczyć o tym, że w latach 2005–2006 gospodarka polska wykazywała najlepsze dopasowanie do cyklu strefy euro w całej rozpatrywanej próbie obserwacji. Należy jednak pamiętać, że również w tym okresie, tak jak w całej próbie obserwacji, na podstawie wzmocnienia widoczne jest wyraźne zróżnicowanie amplitud wahań

cyklicznych. Oszacowane wartości wzmocnienia świadczą o tym, że cykle polskie cechują się wyższą zmiennością niż cykle strefy euro.

Przeprowadzona analiza dopasowania cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro wskazuje, że obydwa regiony wykazywały średnią i względnie stabilną w czasie synchronizację cykliczną w latach 1995–2007. Synchronizacja ta była względnie wysoka pośród gospodarek pozostających poza strefą euro i równocześnie wyraźnie niższa w porównaniu z gospodarkami tworzącymi strefę euro. Głównymi przyczynami średniego dopasowania cyklicznego pomiędzy Polską i strefą euro są wyraźnie wyższe amplitudy wahań cyklicznych w Polsce w porównaniu do strefy euro, co dotyczy zarówno cykli krótkich, jak i długich, jak również słabe dopasowanie punktów zwrotnych aktywności gospodarczej w zakresie wahań o długich okresach (około 6–7 lat). Dużo mniejsze zróżnicowanie punktów zwrotnych jest natomiast cechą charakterystyczną cykli o krótszych okresach (do około 3 lat).

4.2.4. Transmisja szoków

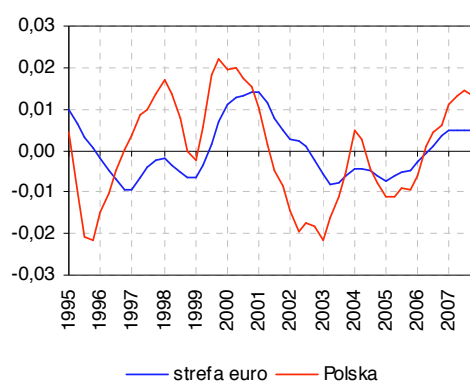
Celem kolejnego etapu analizy jest odpowiedź na pytanie, jak szoki generujące cykl koniunkturalny gospodarki strefy euro wpływały na wahania aktywności gospodarczej w Polsce w latach 1995–2007. W tym celu dokonano dekompozycji składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce na składową obrazującą wpływ szoków charakterystycznych dla gospodarki polskiej oraz składową wynikającą z szoków charakterystycznych dla gospodarki strefy euro. Dekompozycja ta została uzyskana w ramach modelu SVAR. Dodatkowo w ramach tego modelu dokonano analizy cross-spektralnej modelowanych zmiennych, co tym samym, podobnie jak w poprzedniej części, pozwoliło na określenie synchronizacji wahań cyklicznych w Polsce i strefie euro w latach 1995–2007.

Punktem wyjściowym do estymacji modelu SVAR była postać zredukowana tego modelu, czyli model VAR. Dwuwymiarowy model VAR, bez wektora stałych, został oszacowany za pomocą MNK na podstawie zmiennej obrazującej składową cykliczną realnego PKB w strefie euro⁹⁶ (EA_t) oraz zmiennej przedstawiającej składową cykliczną realnego PKB w Polsce (PL_t) w okresie I kw. 1995 – IV kw. 2007. Obydwie zmienne zostały uzyskane za pomocą filtra HP, który w obydwu przypadkach zastosowano do składowych trend-cykl realnego PKB, uzyskanych w ramach wyrównywania sezonowego metodą TRAMO/SEATS, co tym samym pozwoliło na wyeliminowanie wpływu składowych

⁹⁶ Analogicznie do poprzedniego badania jako szereg czasowy realnego PKB w strefie euro wykorzystano agregat obejmujący 13 gospodarek wchodzących w skład unii monetarnej.

nieregularnych PKB na ostateczny wynik analizy⁹⁷. W ramach filtra HP wykorzystano parametr wygładzający $\lambda = 1600$, co tym samym oznacza, że oscylacje produktu o okresach do 10 lat są traktowane w analizie jako wahania o charakterze koniunkturalnym. Rysunek 4.20 przedstawia składową cykliczną produktu w strefie euro i Polsce w latach 1995–2007. Zarówno test ADF, jak i KPSS nakazały uznać obydwie zmienne za stacjonarne.

Rysunek 4.20. Składowe cykliczne realnego PKB w strefie euro i Polsce w latach 1995–2007



Źródło: opracowanie własne.

Dobór rzędu opóźnień modelu VAR został dokonany na podstawie kryterium informacyjnego Schwarz, które nakazało wykorzystanie specyfikacji z trzema opóźnieniami⁹⁸. Oszacowany model okazał się stabilny. Przeprowadzony w ramach uzyskanego modelu VAR test przyczynowości Grangera wykazał, że nie istnieją podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o tym, że składowa cykliczna realnego PKB w Polsce nie jest przyczyną w sensie Grangera składowej cyklicznej realnego PKB w strefie euro. Hipoteza odwrotna została natomiast odrzucona przy 5% poziomie istotności. Uzyskany wyniki wydaje się być zbieżny z intuicją ekonomiczną, zgodnie z którą wahania

⁹⁷ O ile w przypadku poprzednich analiz preferowanym narzędziem ekstrakcji składowych cyklicznych był pasmowo-przepustowy filtr CF, o tyle w przypadku tej analizy uznano, że bardziej zasadne jest wykorzystanie filtra HP. Głównym argumentem przemawiającym za tym wyborem jest to, że składowe cykliczne wynikające z zastosowania filtra CF mają „gładki” przebieg, co w przypadku modelowania VAR oznacza, że uzyskiwane składniki losowe charakteryzują się autokorelacją, bez względu na dobór opóźnień modelu.

⁹⁸ Rozpatrywany model VAR może zostać zapisany przy wykorzystaniu operatora opóźnień L jako

$$\mathbf{y}_t = \Phi(L)\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} EA_t & PL_t \end{bmatrix}', \quad \Phi(L) = \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\phi}_k L^k, \quad \boldsymbol{\phi}_k = \begin{bmatrix} \phi_{k,11} & \phi_{k,12} \\ \phi_{k,21} & \phi_{k,22} \end{bmatrix} \quad \text{oraz}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{EA} & \varepsilon_t^{PL} \end{bmatrix}'. \quad \text{Reszty tego modelu spełniają natomiast warunek} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i.i.d.N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}), \quad \text{gdzie} \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s') = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon^{EA}}^2 & \sigma_{\varepsilon^{EA} \varepsilon^{PL}} \\ \sigma_{\varepsilon^{PL} \varepsilon^{EA}} & \sigma_{\varepsilon^{PL}}^2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s') = \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad t \neq s.$$

koniunkturalne w gospodarce polskiej pozostają pod wpływem koniunktury w strefie euro, podczas gdy sprzężenie zwrotne nie występuje. Tabela 4.22 przedstawia wyniki testu przyczynowości Grangera.

Tabela 4.22. Test przyczynowości Grangera w modelu VAR

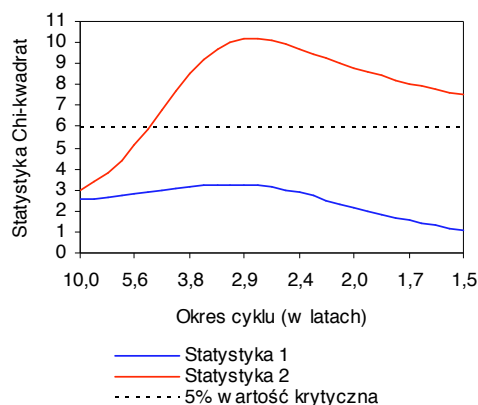
<i>Dependent variable: EA</i>			
<i>H0: PL does not Granger Cause EA</i>			
<i>Exclude</i>	<i>Chi-sq</i>	<i>df</i>	<i>Prob.</i>
PL	3,264	3	0,353
<i>Dependent variable: PL</i>			
<i>H0: EA does not Granger Cause PL</i>			
<i>Exclude</i>	<i>Chi-sq</i>	<i>df</i>	<i>Prob.</i>
EA	10,182	3	0,017

Źródło: opracowanie własne.

Analogiczne wyniki w zakresie przyczynowości uzyskano na podstawie testu Breitunga i Candelona (2006). Test ten polega na weryfikacji analogicznych hipotez zerowych jak w przypadku testu przyczynowości Grangera, z tą jednak różnicą, że wnioskowanie jest przeprowadzane na bazie statystyk Walda mających reprezentację w dziedzinie częstotliwości, tj. statystyk $W(\omega)$ dla $\omega \in (0, \pi]$. Oznacza to, że test ten pozwala na weryfikację hipotez zerowych o braku przyczynowości dla danej częstotliwości ω . W rozpatrywanym modelu VAR, test Breitunga i Candelona dla hipotez zerowych mówiących o tym, że składowa cykliczna realnego PKB w Polsce nie jest przyczyną składowej cyklicznej realnego PKB w strefie euro, polega na obliczeniu statystyk Walda łącznie dla restrykcyjnych postaci $\sum_{k=1}^3 \phi_{k,12} \cos(\omega k) = 0$ i $\sum_{k=1}^3 \phi_{k,12} \sin(\omega k) = 0$ kolejno dla częstotliwości $\omega \in (0, \pi]$. Dla odwrotnych hipotez zerowych, tj. gdy zakłada się, że składowa cykliczna realnego PKB w strefie euro nie jest przyczyną składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce, restrykcje przyjmują postać $\sum_{k=1}^3 \phi_{k,21} \cos(\omega k) = 0$ i $\sum_{k=1}^3 \phi_{k,21} \sin(\omega k) = 0$ dla $\omega \in (0, \pi]$. W związku z tym w teście Breitunga i Candelona uzyskiwane są statystyki Walda kolejno dla częstotliwości z przedziału $(0, \pi]$. Jeżeli wartość statystyki Walda dla danej częstotliwości ω jest większa niż korespondująca wartość krytyczna dla poziomu istotności α , wówczas hipoteza zerowa jest odrzucona. Przy poziomie istotności α dla każdej z częstotliwości z przedziału $(0, \pi]$ wartości krytyczne testu Breitunga i Candelona są dane jako punkty rozkładu Chi-kwadrat o 2 stopniach swobody dla prawdopodobieństwa α , tzn. $W_{\alpha}^*(\omega) = \chi_{\alpha}^2(2)$ dla $\omega \in (0, \pi]$. Rysunek 4.21 przedstawia wyniki testu Breitunga i Candelona dla analizowanego modelu VAR. W przypadku cykli o długościach do około 5 lat hipoteza

zerowa mówiąca o tym, że składowa cykliczna realnego PKB w strefie euro nie jest przyczyną składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce jest odrzucona. W przypadku hipotezy odwrotnej nie istnieją podstawy do jej odrzucenia na całym paśmie wahań koniunkturalnych.

Rysunek 4.21. Test Breitunga i Candelona w modelu VAR



Uwaga: prezentowane statystyki obejmują wahania o okresach, które mogą być utożsamiane z cyklem koniunkturalnym (1,5–10 lat). Statystyka 1 odpowiada hipotezie zerowej, mówiącej o tym, że składowa cykliczna realnego PKB w Polsce nie jest przyczyną składowej cyklicznej realnego PKB w strefie euro. Statystyka 2 odpowiada hipotezie zerowej, mówiącej o tym, że składowa cykliczna realnego PKB w strefie euro nie jest przyczyną składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce.

Źródło: opracowanie własne.

Ostatecznie oszacowana postać modelu to dwuwymiarowy system, w którym nie uwzględniono opóźnień składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce w równaniu opisującym składową cykliczną realnego PKB strefy euro. Uzyskany model należy traktować jako model klasy „near VAR”. Model ten może zostać zapisany przy wykorzystaniu operatora opóźnień L jako $\mathbf{y}_t = \Phi(L)\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, gdzie $\mathbf{y}_t = [EA_t \quad PL_t]'$, $\Phi(L) = \sum_{k=1}^3 \Phi_k L^k$,

$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{k,11} & 0 \\ \phi_{k,21} & \phi_{k,22} \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_t^{EA} \quad \varepsilon_t^{PL}]'$. Reszty modelu spełniają warunek

$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim i.i.d.N(\mathbf{0}, \Omega)$, gdzie $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$, $\Omega = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon^{EA}}^2 & \sigma_{\varepsilon^{EA} \varepsilon^{PL}} \\ \sigma_{\varepsilon^{PL} \varepsilon^{EA}} & \sigma_{\varepsilon^{PL}}^2 \end{bmatrix}$ oraz $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_s') = \mathbf{0}$ dla

$t \neq s$. Estymacji parametrów autoregresyjnych modelu (łącznie 9) dokonano za pomocą metody *Seemingly Unrelated Regression* (SUR), która jest wykorzystywana w przypadku

modeli klasy „near VAR”⁹⁹. Wyniki estymacji na podstawie próby obserwacji I kw. 1995 – IV kw. 2007 wskazują na wysokie dopasowanie modelu do danych oraz istotność statystyczną większości parametrów modelu przy 5% poziomie istotności (por. tabela 4.23). Test Walda łącznej istotności poszczególnych opóźnień wskazuje również na zasadność przyjętej postaci modelu, czyli braku wpływu wahań cyklicznych realnego PKB w Polsce na wahania koniunkturalne w strefie euro. Dla hipotezy zerowej tego testu mówiącej o tym, że każdy z parametrów modelu jest równy zero statystyka Chi-kwadrat przyjęła wartość 2653,755 przy korespondującym poziomie *p-value* 0,000. Oszacowany model spełnia również kryterium stabilności (por. rysunek 4.22).

Tabela 4.23. Wyniki estymacji modelu „near VAR”

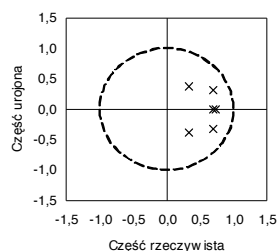
Tabela 4.25: Wyniki estymacji modelu „near VAR”				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	2,108	0,129	16,338	0,000
C(2)	-1,583	0,233	-6,797	0,000
C(3)	0,418	0,125	3,350	0,001
C(4)	1,066	0,425	2,511	0,014
C(5)	1,421	0,138	10,270	0,000
C(6)	-1,712	0,768	-2,227	0,029
C(7)	-0,761	0,212	-3,600	0,001
C(8)	0,559	0,439	1,274	0,206
C(9)	0,192	0,122	1,572	0,120
Determinant residual covariance			8,70E-12	
Equation: EA = C(1)*EA(-1) + 0*PL(-1) + C(2)*EA(-2) + 0*PL(-2) + C(3)*EA(-3) + 0*PL(-3)				
Observations: 49				
R-squared	0,976	Mean dependent var		0,000
Adjusted R-squared	0,975	S.D. dependent var		0,007
S.E. of regression	0,001	Sum squared resid		5,14E-05
Durbin-Watson stat	1,767			
Equation: PL = C(4)*EA(-1) + C(5)*PL(-1) + C(6)*EA(-2) + C(7)*PL(-2) + C(8)*EA(-3) + C(9)*PL(-3)				
Observations: 49				
R-squared	0,937	Mean dependent var		0,001
Adjusted R-squared	0,930	S.D. dependent var		0,012
S.E. of regression	0,003	Sum squared resid		4,70E-04
Durbin-Watson stat	1,830			

Uwaga: estymacja została przeprowadzona za pomocą metody SUR.

Źródło: opracowanie własne.

⁹⁹ W ramach analizy wrażliwości testowano również modele oszacowane za pomocą MNK i MNW (reprezentacja *state space*). Uzyskane wyniki prowadziły do analogicznych wniosków jak w przypadku prezentowanego modelu.

Rysunek 4.22. Stabilność modelu „near VAR”

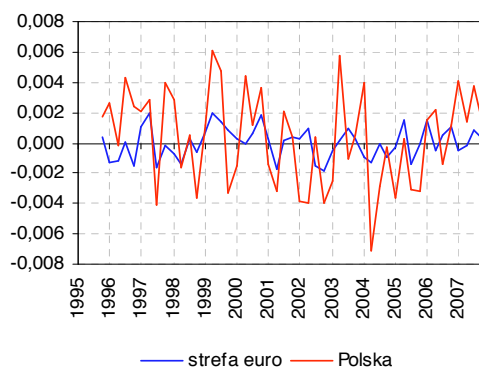


Uwaga: na wykresie zamieszczono wartości własne.

Źródło: opracowanie własne.

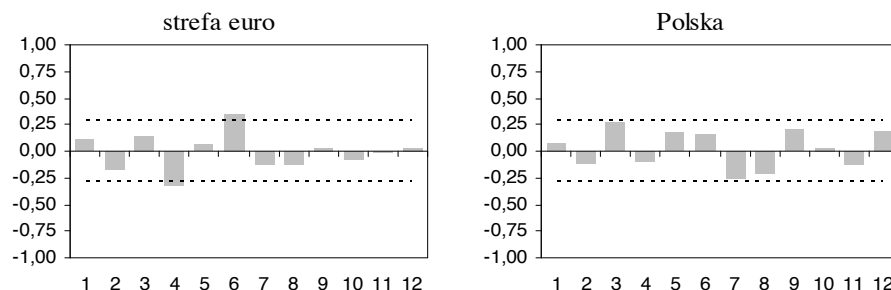
Reszty modelu (por. rysunek 4.23) mają pożądane własności statystyczne. W szczególności reszty obydwu równań systemu nie wykazują autokorelacji (por. rysunek 4.24). Na podstawie testu Jarque’a-Bera zarówno w przypadku reszt równania zmiennej EA_t , jak i PL_t , nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o normalności rozkładu tych serii (por. rysunek 4.25).

Rysunek 4.23. Składniki losowe modelu „near VAR”



Źródło: opracowanie własne.

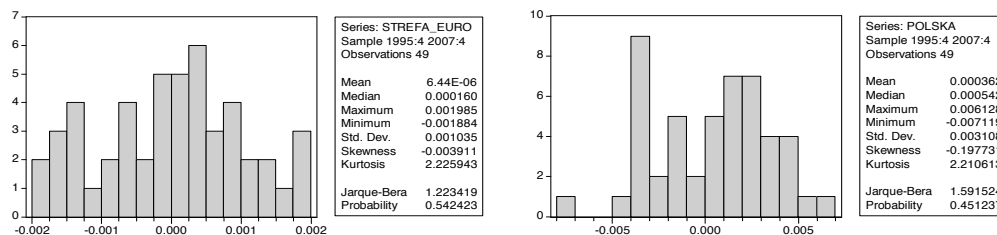
Rysunek 4.24. Funkcje SACF dla reszt modelu „near VAR”



Uwaga: linie przerywane oznaczają wartości krytyczne dla 5% poziomu istotności.

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.25. Normalność rozkładu reszt modelu „near VAR”



Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym etapie analizy dokonano identyfikacji postaci strukturalnej modelu „near VAR” za pomocą metody trójkątnej faktoryzacji macierzy wariancji-kowariancji składników losowych (por. rozdział 3, s. 122). Tym samym przy wykorzystaniu operatora opóźnień L uzyskana na podstawie modelu „near VAR” postać modelu SVAR może zostać zapisana jako

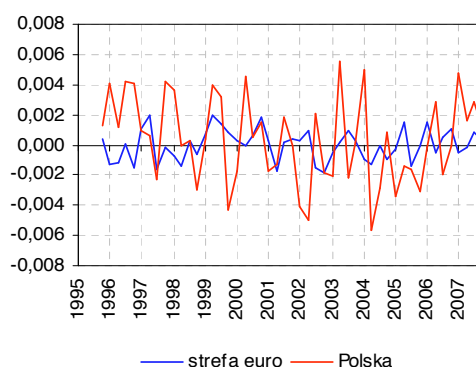
$$\Gamma \mathbf{y}_t = \Theta(L) \mathbf{y}_t + \mathbf{u}_t, \quad \text{gdzie} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 \end{bmatrix}, \quad \Theta(L) = \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\theta}_k L^k, \quad \boldsymbol{\theta}_k = \begin{bmatrix} \theta_{k,11} & 0 \\ \theta_{k,21} & \theta_{k,22} \end{bmatrix} \quad \text{oraz}$$

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_t^{EA} & u_t^{PL} \end{bmatrix}'. \quad \text{Szoki strukturalne spełniają warunek } \mathbf{u}_t \sim i.i.d.N(\mathbf{0}, \Lambda), \quad \text{gdzie } E(\mathbf{u}_t) = \mathbf{0},$$

$$\Lambda = E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t') = \begin{bmatrix} \sigma_{u^{EA}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u^{PL}}^2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_s') = \mathbf{0} \quad \text{dla } t \neq s. \quad \text{Oznacza to, że identyfikacja postaci}$$

strukturalnej polega na narzuceniu na postać zredukowaną, czyli model „near VAR”, czterech restrykcji: trzech związanych z macierzą związków natychmiastowych Γ oraz jednej związanej z macierzą wariancji-kowariancji składników losowych modelu „near VAR”, która prowadzi do ortogonalizacji szoków. Restrykcje te prowadzą w przypadku modelu dwuwymiarowego do jednoznacznej identyfikacji postaci SVAR. Rysunek 4.26 przedstawia zidentyfikowane szoki strukturalne.

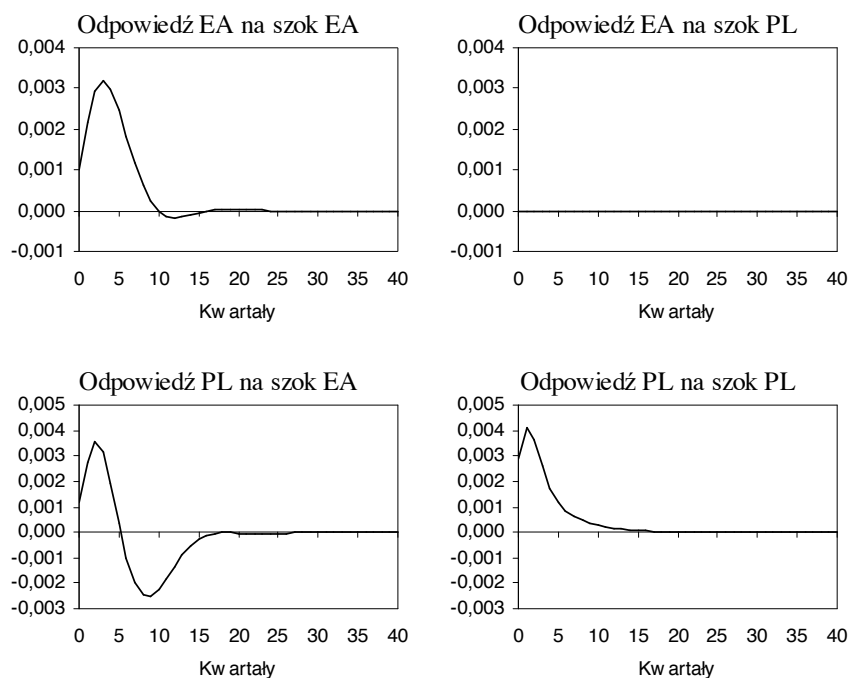
Rysunek 4.26. Szoki strukturalne w modelu SVAR



Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie wartości odchyłeń standardowych szoków strukturalnych można dojść do wniosku, że zmienność szoków generujących wahania cykliczne w gospodarce polskiej jest około 2,8 razy wyższa niż szoków generujących wahania produktu w strefie euro. Rysunek 4.27 przedstawia odpowiedzi impulsowe systemu na szoki strukturalne poddane normalizacji. Są to funkcje reakcji na szoki strukturalne o wartości jednego odchylenia standardowego. Uzyskane wyniki wskazują, że w horyzoncie do 4 kwartałów po wystąpieniu danego szoku reakcja składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce na szoki ze strefy euro i krajowe jest w zasadzie zbliżona co do skali. Natychmiastowa reakcja składowej cyklicznej w Polsce jest większa w przypadku szoku charakterystycznego dla Polski niż w przypadku szoku ze strefy euro (około 2,5 razy). Z kolei w dłuższym horyzoncie (powyżej 4 kwartałów) szoki ze strefy euro odpowiadają w większym stopniu za wahania cykliczne produktu w Polsce niż szoki specyficzne dla gospodarki polskiej, tzn. wykazują wyższy stopień trwałości. W związku z tym można dojść do wniosku, że wahania aktywności gospodarczej w Polsce w dużym stopniu wynikają z wpływu koniunktury strefy euro.

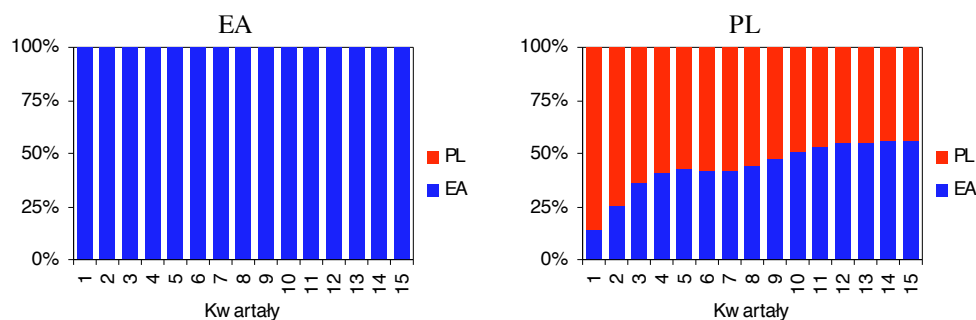
Rysunek 4.27. Funkcje odpowiedzi impulsowej na znormalizowane szoki strukturalne w modelu SVAR



Źródło: opracowanie własne.

Podobne wnioski można wyciągnąć na podstawie dekompozycji wariancji błędu prognozy oszacowanego modelu SVAR (por. rysunek 4.28). Dekompozycja ta wskazuje, że w krótkim okresie krajowe szoki odgrywają główną rolę w kształtowaniu wahań aktywności gospodarczej w Polsce, natomiast w dłuższym okresie rola szoków ze strefy euro wyraźnie wzrasta (do około 55% po 3 latach od wystąpienia szoku).

Rysunek 4.28. Dekompozycja wariancji błędu prognozy na podstawie modelu SVAR

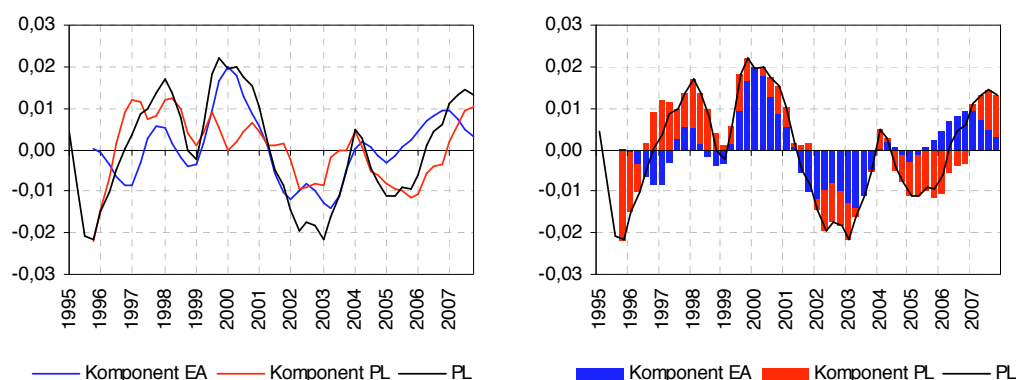


Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie zapisu modelu SVAR w postaci wektorowej średniej ruchomej (VMA) jest możliwe dokonanie dekompozycji składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce na dwa komponenty: komponent wynikający z szoków strefy euro oraz komponent wynikający z szoków polskich. Przy wykorzystaniu operatora opóźnień L postać VMA modelu SVAR jest dana jako $\mathbf{y}_t = (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Theta}(L))^{-1} \mathbf{u}_t = \mathbf{\Psi}(L) \mathbf{u}_t$, gdzie $\mathbf{\Psi}(L) = \sum_{h=0}^{+\infty} \mathbf{\Psi}_h L^h$, $\mathbf{\Psi}_h = \begin{bmatrix} \psi_{h,11} & 0 \\ \psi_{h,21} & \psi_{h,22} \end{bmatrix}$.

Tym samym składowa cykliczna produktu w strefie euro może zostać zapisana jako $EA_t = \sum_{h=0}^{+\infty} \psi_{h,11} u_{t-h}^{EA}$, natomiast składowa cykliczna realnego PKB w Polsce jako $PL_t = \sum_{h=0}^{+\infty} \psi_{h,21} u_{t-h}^{EA} + \sum_{h=0}^{+\infty} \psi_{h,22} u_{t-h}^{PL}$. W przypadku składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce pierwsza suma reprezentuje komponent wynikający z szoków strefy euro (komponent EA) natomiast druga suma reprezentuje komponent wynikający z szoków polskich (komponent PL). Rysunek 4.29 przedstawia uzyskaną na podstawie oszacowanego modelu SVAR dekompozycję składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce na korespondujące komponenty EA i PL. W lewym panelu rysunku zamieszczono dekompozycję w formie szeregów czasowych, natomiast w prawym panelu zobrazowano kontrybucję obydwu komponentów.

Rysunek 4.29. Dekompozycja składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce na podstawie modelu SVAR

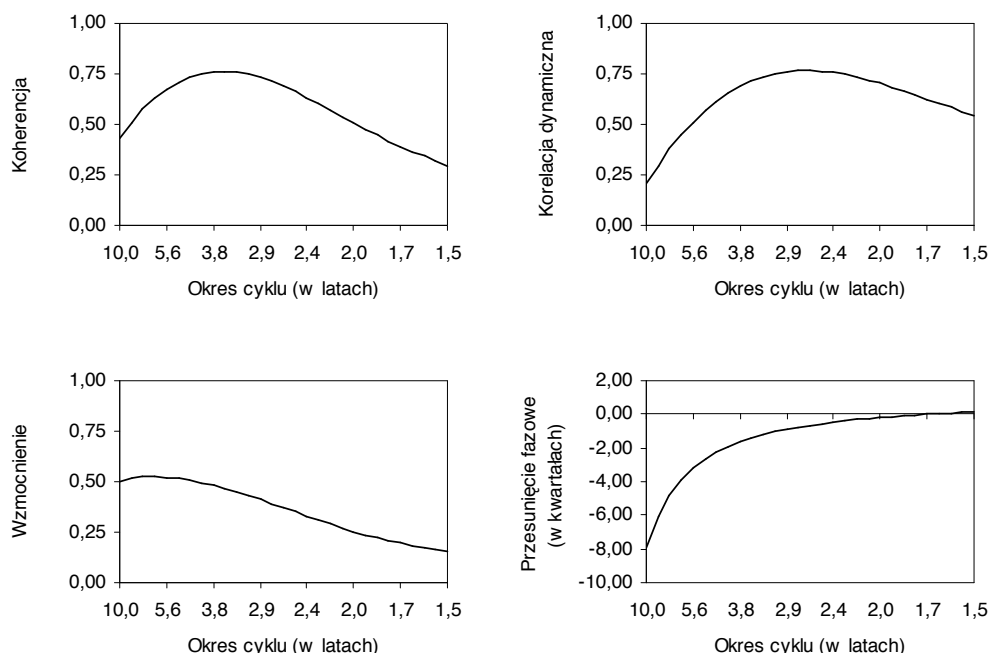


Źródło: opracowanie własne.

Tak samo jak w przypadku wniosków uzyskanych na podstawie funkcji odpowiedzi impulsowej można stwierdzić, że szoki charakterystyczne dla gospodarki strefy euro w dużym stopniu wpływają na kształtowanie wahań koniunkturalnych w Polsce. Relacja pomiędzy odchyleniem standardowym komponentu PL i komponentu EA wynosi 0,98, co oznacza, że amplituda wahań komponentu krajowego i zagranicznego w przypadku polskiej składowej cyklicznej realnego PKB jest zbliżona. Naturalnie wpływ strefy euro na koniunkturę w kraju pozostaje zmienny w czasie, niemniej jednak zgodnie ze wskazaniami modelu, w latach 1995–2007 był on zdecydowanie procykliczny względem wahań aktywności gospodarczej w Polsce. Korelacja pomiędzy komponentem krajowej składowej cyklicznej realnego PKB, wynikającym z szoków strefy euro, a składową cykliczną realnego PKB w Polsce w okresie IV kw. 1995 – IV kw. 2007 wynosi 78%. Model wskazuje, że w latach 1995–1998 składowa cykliczna realnego PKB w Polsce była w głównej mierze determinowana przez szoki krajowe, natomiast w latach 1999–2007 wpływ szoków ze strefy euro na wahania aktywności gospodarczej w Polsce uległ wyraźnemu zwiększeniu. Model pokazuje również, że w latach 2004–2005 osłabienie aktywności gospodarczej w Polsce po akcesji do UE było wynikiem szoków krajowych, podczas gdy „czynnik europejski” pozostawał w tym okresie neutralny. W 2006 r. obserwowano natomiast wyraźny wzrost pozytywnego wpływu szoków strefy euro na koniunkturę w Polsce. Warto także zauważyć, że zgodnie z wynikami modelu narastanie dodatniego odchylenia realnego PKB w Polsce od długookresowego trendu w 2007 r. było w głównej mierze spowodowane przez dodatnie szoki krajowe, co w szczególności jest wyraźnie widoczne w II połowie 2007 r., podczas gdy dodatni wpływ szoków ze strefy euro w tym okresie zaczął stopniowo wygasać.

W ostatnim etapie badania wykorzystano oszacowany model „near VAR” do przeprowadzenia analizy cross-spektralnej. W ramach uzyskanego modelu analiza ta sprowadza się do parametrycznego oszacowania miar takich jak koherencja, korelacja dynamiczna, wzmocnienie i przesunięcie fazowe (por. rozdział 3, s. 125). Miary te umożliwiają kompleksowy opis zależności pomiędzy modelowanymi zmiennymi, tj. EA_t i PL_t w dziedzinie częstotliwości. Rysunek 4.30 przedstawia uzyskane na podstawie oszacowanego modelu „near VAR” miary cross-spektralne na paśmie wahań o charakterze koniunkturalnym (od 1,5 roku do 10 lat).

Rysunek 4.30. Analiza cross-spektralna na podstawie modelu „near VAR”



Źródło: opracowanie własne.

Uzyskane wyniki prowadzą do sformułowania następujących wniosków. Wzmocnienie wskazuje, że amplituda wahań aktywności gospodarczej w Polsce jest zdecydowanie wyższa niż w strefie euro – około 2 razy w przypadku wahań o okresie większym niż 6 lat. W przypadku wahań o krótszych okresach różnicowanie amplitud jest jeszcze wyższe. Przesunięcie fazowe wskazuje, że polskie cykle koniunkturalne o okresach długich mają wyprzedzający charakter względem analogicznych fluktuacji w strefie euro, podczas gdy polskie cykle o krótkich okresach charakteryzują się zbieżnym ze strefą euro występowaniem punktów zwrotnych. Koherencja wskazuje na stosunkowo wysokie dopasowanie cykli

koniunkturalnych w Polsce i strefie euro o okresach od około 3 do około 4 lat (około 75%). Wartość koherencji w całym przedziale wahań o okresach 1,5–10 lat wynosi natomiast 57%. Równocześnie korelacja dynamiczna wskazuje na stosunkowo wysoką skalę współzależności (do 75%) w przypadku cykli o okresie do około 3 lat oraz na zdecydowanie niższą współzależność w przypadku cykli o okresach powyżej 6 lat. Wartość współczynnika korelacji dynamicznej w całym paśmie wahań o okresach 1,5–10 lat wynosi 55%. Ogólnie rzecz biorąc, na bazie parametrycznej analizy cross-spektralnej w ramach prezentowanego modelu można dojść do wniosku, że cykle koniunkturalne w Polsce i strefie euro pozostają zróżnicowane pod względem amplitud (wyższe w przypadku Polski), oraz że cykle długie w przypadku Polski są wyprzedzające względem wahań aktywności gospodarczej w strefie euro, podczas gdy cykle krótkie nie wykazują tendencji do przesunięć w występowaniu punktów zwrotnych. Ostatecznie pomimo wysokiego wpływu szoków ze strefy euro na koniunkturę krajową, co pokazano we wcześniejszych etapach analizy, synchronizacja pomiędzy wahaniami aktywności gospodarczej w Polsce i strefie euro w latach 1995–2007 kształtowała się na średnim poziomie, co jest również spójne z wynikami uzyskanymi na podstawie nieparametrycznej analizy cross-spektralnej zaprezentowanej w poprzedniej części.

Oszacowany model SVAR umożliwił dekompozycję składową cyklicznej realnego PKB w Polsce na dwie składowe: komponent obrazujący wpływ szoków ze strefy euro oraz komponent wynikający z szoków charakterystycznych dla gospodarki polskiej. W modelu założono, że gospodarka polska reaguje na wahania koniunktury gospodarczej w strefie euro, podczas gdy sprzężenie zwrotne nie występuje, co wydaje się być zgodne z intuicją ekonomiczną. Warto podkreślić, że testowany model alternatywny bez restrykcji tego typu wskazywał na brak istotnego statystycznie wpływu szoków polskich na składową cykliczną realnego PKB w strefie euro, co tym samym dodatkowo przemawia za zasadnością przyjętej postaci modelu. Oszacowany model pozwolił również na przeprowadzenie analizy synchronizacji cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro w oparciu o metody estymacji parametrycznej. Uzyskane wyniki mogą świadczyć o wysokim wpływie koniunktury strefy euro na aktywność gospodarczą w Polsce oraz o średnim stopniu dopasowania cykli koniunkturalnych pomiędzy dwoma gospodarkami w latach 1995–2007. W szczególności pokazano, że w krótkim okresie szoki krajowe odgrywają główną rolę w kształtowaniu wahań aktywności gospodarczej w Polsce, natomiast w dłuższym okresie rola szoków ze strefy euro wyraźnie wzrasta. Model wskazał, że wpływ aktywności gospodarczej w strefie euro na koniunkturę w Polsce pozostaje zmienny w czasie, niemniej jednak w latach 1995–2007 był on zdecydowanie procykliczny względem wahań aktywności gospodarczej w Polsce. Zgodnie

ze wskazaniami modelu w latach 1995–1998 aktywność gospodarcza w Polsce była w głównej mierze determinowana przez szoki krajowe, natomiast w latach 1999–2007 wpływ szoków ze strefy euro na wahania aktywności gospodarczej w Polsce uległ wyraźnemu zwiększeniu. Dodatkowo można przypuszczać, że zmienność szoków kształtujących wahania aktywności gospodarczej w Polsce, która zgodnie ze wskazaniami modelu jest wyraźnie wyższa niż zmienność szoków kształtujących koniunkturę w strefie euro, jest główną przyczyną wyższych amplitud wahań cyklicznych realnego PKB w Polsce niż w strefie euro.

Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono wyniki badań cyklu koniunkturalnego w gospodarce polskiej w latach 1995–2007. Dzięki wykorzystaniu metod filtracji szeregów czasowych oraz modeli ekonometrycznych typu SVAR i UCARIMA dokonano estymacji składowej cyklicznej obrazującej wahania koniunkturalne w Polsce. Następnie przy wykorzystaniu metody analizy cross-spektralnej przeprowadzono analizę mającą na celu weryfikację hipotez o stylizowanych faktach koniunktury gospodarczej w przypadku Polski oraz wykonano badanie w zakresie synchronizacji cyklu koniunkturalnego w Polsce i strefie euro.

Wyniki w zakresie estymacji składowej cyklicznej realnego PKB w Polsce, która obrazuje przebieg cyklu koniunkturalnego, okazały się być zadowalające z uwagi na to, że wszystkie wykorzystane metody prowadziły do analogicznych rezultatów. Uzyskane wyniki wskazują, że wahania koniunkturalne w Polsce są kształtowane przez dwa rodzaje cykli: cykl długi, którego okres wynosi około 6–7 lat oraz cykl krótki, którego okres wynosi około 3 lat. Cykle te oprócz różnicy w zakresie ich czasu trwania pozostają również zróżnicowane pod względem amplitudy, tzn. cykl długi charakteryzuje się wyższą amplitudą wahań niż cykl 3-letni. Analiza zachowania się różnych zmiennych ekonomicznych w ramach cyklu koniunkturalnego w Polsce prowadzi do konkluzji, że „typowe” dla gospodarki rynkowej zależności pomiędzy tymi zmiennymi a wahaniami produktu mają również miejsce w przypadku Polski. Świadczy to o tym, że cykl koniunkturalny w gospodarce polskiej wykazuje cechy charakterystyczne dla cykli gospodarczych obserwowanych w większości rozwiniętych gospodarek rynkowych. Z kolei uzyskane wyniki w zakresie synchronizacji polskiego cyklu koniunkturalnego z wahaniami aktywności gospodarczej w strefie euro wskazują, że w latach 1995–2007 gospodarka polska i strefy euro wykazywały średnie i stabilne w czasie dopasowanie wahań cyklicznych. W szczególności synchronizacja cykli o długości około 3 lat okazała się być wyższa niż cykli o dłuższym okresie z uwagi na lepsze

dopasowanie punktów zwrotnych. W przypadku polskiego cyklu o dłuższym okresie stwierdzono, że ma on tendencję do wyprzedzania analogicznych fluktuacji w strefie euro. Ponadto uzyskane wyniki wskazują, że zarówno cykl o długości około 3 lat, jak również cykl o okresie około 6–7 lat, ma w przypadku Polski wyższą amplitudę wahań niż w strefie euro. Analogiczne wnioski na temat synchronizacji cykli koniunkturalnych wyciągnięto na podstawie analizy opartej na modelu typu SVAR, co tym samym może świadczyć o trwałości uzyskanych wyników. Model ten wskazał również, że wpływ aktywności gospodarczej w strefie euro na koniunkturę w Polsce pozostaje zmienny w czasie, niemniej jednak w latach 1995–2007 był on zdecydowanie procykliczny względem wahań aktywności gospodarczej w Polsce. Dodatkowo należy podkreślić, że pomimo średniego dopasowania pomiędzy wahaniami aktywności gospodarczej w Polsce i strefie euro można stwierdzić, że synchronizacja cykli koniunkturalnych pomiędzy tymi gospodarkami była względnie wysoka pośród analizowanych gospodarek regionu Europy Środkowej i Wschodniej.

Zakończenie

Pytania dotyczące cech charakterystycznych, mechanizmów generujących oraz mechanizmów przenoszenia się cykli koniunkturalnych pomiędzy gospodarkami znajdują się w centrum zainteresowań makroekonomii. Ten stan rzeczy można tłumaczyć tym, że cykle koniunkturalne pozostają nieodzownym elementem funkcjonowania gospodarki światowej. Zatem rozumienie tego zjawiska jest kluczowe dla prowadzenia polityki gospodarczej, jak również nie pozostaje bez znaczenia dla funkcjonowania przedsiębiorstw i gospodarstw domowych. Również współczesne wydarzenia ekonomiczne wskazują, że wahania aktywności gospodarczej pozostają istotnym elementem życia gospodarczego. W szczególności kryzys na światowych rynkach finansowych, który w połowie 2007 r. doprowadził do wyraźnego narastania zaburzeń w funkcjonowaniu rynków pieniężnych i rynków kredytowych w Stanach Zjednoczonych i gospodarkach europejskich, stanowił czynnik, który w 2008 r. zaczął oddziaływać negatywnie na funkcjonowanie sfery realnej gospodarki światowej. Zaburzenia te doprowadziły do recesji, która swym zasięgiem objęła zarówno gospodarki rozwinięte, jak i wschodzące, przybierającej wyraźnie na sile na przełomie lat 2008–2009. W związku z powyższym można dojść do wniosku, że również współczesne wydarzenia pokazują, że zagadnienia związane z modelowaniem cykli koniunkturalnych pozostają ważnym elementem współczesnych badań ekonomicznych.

W pracy postawiono trzy tezy badawcze. Pierwsza dotyczyła użyteczności metod spektralnych w analizie szeregów czasowych do badań związanych ze zjawiskiem cyklu koniunkturalnego. W pracy omówiono szczegółowo metody analizy spektralnej, przedstawiając zarówno metody pomiaru, jak i analizy wahań cyklicznych ekonomicznych szeregów czasowych. W opisie prezentowanych metod ekonometrycznych zwrócono uwagę zarówno na ich zalety, jak i wady. W szczególności podkreślono, że pomiar wahań aktywności gospodarczej na podstawie obserwowalnych szeregów czasowych może

prorowadzić do uzyskania obciążonych estymatorów przy końcach próby obserwacji, co w zasadzie jest cechą charakterystyczną wszystkich metod estymacji składowych cyklicznych. Należy podkreślić, że wszelkie metody ekonometryczne, które służą do estymacji zmiennych obrazujących wahania aktywności gospodarczej, pozostają wrażliwe na rewizje danych ekonomicznych, na co wskazują Orphanides i van Norden (2002). Pomimo powyższych problemów związanych z estymacją zmiennej, która oddaje „prawdziwy” przebieg cyklu koniunkturalnego w danej gospodarce, pierwsza teza została zweryfikowana pozytywnie, ponieważ metody spektralne umożliwiają rozpatrywanie cech charakterystycznych cyklu koniunkturalnego zarówno w zakresie czasu trwania cyklu, jak i jego amplitudy wahań, dając tym samym możliwość kompleksowego opisu wahań cyklicznych. Preferowanym narzędziem do estymacji komponentu obrazującego zachowanie się analizowanej zmiennej w ramach cyklu koniunkturalnego jest pasmowo-przepustowy filtr Christiano-Fitzgeralda (1999). Filtr ten umożliwia ograniczenie analizy *stricte* do zakresu wahań koniunkturalnych, a ponadto uwzględnia przy estymacji informację o tym, czy dekomponowany szereg czasowy jest stacjonarny, czy nie, co wydaje się cechą pożądaną z punktu widzenia jakości estymacji.

Użyteczność rozpatrywanych w pracy metod spektralnych dla estymacji i analizy cyklu koniunkturalnego została również zobrazowana poprzez określenie przebiegu i oszacowanie charakterystyk takich jak okres i amplituda w przypadku wahań aktywności gospodarczej w Polsce w latach 1995–2007. W tym celu wykorzystano dane o realnym PKB w Polsce. Uzyskane w tym zakresie wyniki okazały się zadowalające, wskazując na to, że cykl koniunkturalny w Polsce jest kształtowany przez dwa rodzaje wahań: cykl o okresie około 3 lat oraz cykl o okresie około 6–7 lat. Zgodnie z uzyskanymi wynikami cykl o dłuższym okresie ma wyższą amplitudę wahań niż cykl krótszy, co stanowi „typową” w sensie Grangera (1966) charakterystykę wahań cyklicznych. Dodatkowo uzyskane wyniki okazały się w dużym stopniu spójne, niezależnie od przyjętej metody estymacji wahań cyklicznych, co może przemawiać za tym, że uzyskane wyniki są trwałe.

Druga teza badawcza dotyczyła prawdziwości tzw. stylizowanych faktów na temat wahań aktywności gospodarczej w przypadku Polski. W celu weryfikacji tej tezy przeprowadzono przy wykorzystaniu metod spektralnych badanie mające na celu ustalenie współzależności pomiędzy zachowaniem się wybranych polskich zmiennych ekonomicznych i finansowych, a przebiegiem realnego PKB w cyklu koniunkturalnym w latach 1995–2007. Uzyskane wyniki były zadowalające, ponieważ wskazały na to, że w przypadku polskiego cyklu koniunkturalnego mamy do czynienia z analogicznymi prawidłowościami do tych, jakie mogą być zaobserwowane w innych gospodarkach rynkowych. Tym samym uzyskany wynik

oznacza, że polski cykl koniunkturalny charakteryzuje się „typowymi” dla gospodarki rynkowej współzależnościami pomiędzy realnym PKB a innymi zmiennymi ekonomicznymi i finansowymi, co przemawia za pozytywną weryfikacją drugiej tezy badawczej pracy.

Według trzeciej tezy dopasowanie pomiędzy wahaniami aktywności gospodarczej w Polsce i strefie euro kształtuje się na stosunkowo wysokim poziomie. Aby to zweryfikować, przeprowadzono na podstawie danych o realnym PKB badanie, które wykorzystując metody spektralne, umożliwiło zobrazowanie współzależności pomiędzy cyklami koniunkturalnymi w Polsce i strefie euro pod względem dopasowania amplitud i punktów zwrotnych wahań aktywności gospodarczej. Tym samym w badaniu pokazano cechy charakterystyczne cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro, opisując ich ilościowe oraz jakościowe podobieństwa i różnice. Uzyskane wyniki zaprezentowano na tle analogicznego porównania wybranych gospodarek ze strefą euro. Uwzględnienie w badaniu zarówno gospodarek pozostających poza strefą euro, jak również wchodzących w jej skład, umożliwiło umiejscowienie Polski pośród obydwu grup. Uzyskane wyniki wskazują, że w latach 1995–2007 gospodarka polska wykazywała średnie i stabilne w czasie dopasowanie wahań koniunkturalnych do fluktuacji obserwowanych w strefie euro. Zgodnie z uzyskanymi wynikami stwierdzono, że synchronizacja cykli gospodarczych w Polsce i strefie euro o długości około 3 lat jest wyższa niż cykli o dłuższym okresie, co wynika głównie z dobrego dopasowania punktów zwrotnych w przypadku cykli krótkich. W przypadku polskiego cyklu o okresie około 6–7 lat stwierdzono, że wykazuje on tendencję do wyprzedzania analogicznych fluktuacji w strefie euro. Wyniki badania wskazują również na dużo wyższe amplitudy wahań aktywności gospodarczej w Polsce niż w strefie euro, co dotyczy zarówno wahań o krótkich, jak i długich okresach. W badaniu pokazano, że jest to „typowa” charakterystyka analizowanych gospodarek pozostających poza strefą euro. Należy podkreślić, że w latach 1995–2007 cykl koniunkturalny w Polsce był relatywnie wysoko dopasowany do wahań aktywności gospodarczej strefy euro pośród gospodarek regionu Europy Środkowej i Wschodniej. W świetle uzyskanych rezultatów można stwierdzić, że trzecia teza badawcza również została zweryfikowana pozytywnie. Niemniej jednak należy mieć na uwadze, że o ile wahania aktywności gospodarczej w Polsce i strefie euro o krótkich okresach cechują się zbliżonym występowaniem punktów zwrotnych, to podobnie jak cykle o dłuższych okresach różnią się wyraźnie pod względem amplitud. W związku z tym wydaje się, że można mówić o występowaniu pewnej synchronizacji krótkich cykli gospodarczych w Polsce i strefie euro, która wynika przede wszystkim z dobrego dopasowania punktów zwrotnych. Zjawisku temu towarzyszy jednak niepożądane z punktu widzenia „pełnej”

synchronizacji zróżnicowanie skali fluktuacji koniunkturalnych w obydwu gospodarkach, co przemawia za tym, że dopasowanie cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro w latach 1995–2007 należy uznać za średnie.

Badanie synchronizacji cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro zostało uzupełnione poprzez analizę opartą na modelu SVAR. Model ten umożliwił zobrazowanie faktu, że wpływ koniunktury w strefie euro na wahania aktywności gospodarczej w Polsce w latach 1995–2007, choć zmienny w czasie, pozostawał istotny, przyczyniając się do wyraźnych w tym okresie odchyleń realnego PKB w Polsce od długookresowego trendu. Równocześnie na podstawie tego modelu wyciągnięto analogiczne do poprzedniej analizy wnioski o synchronizacji cykli koniunkturalnych w obydwu gospodarkach, co tym samym może świadczyć o trwałości uzyskanych wyników i potwierdzać zasadność przyjętej postaci modelu SVAR.

Ekonomiczna interpretacja wyników uzyskanych na podstawie przedstawionych w pracy badań jest trudnym zadaniem, ponieważ w ekonomii istnieją różne koncepcje próbujące tłumaczyć fenomen cyklu koniunkturalnego. Ponadto należy pamiętać, że prezentowane w pracy podejście do analizy cykli koniunkturalnych jest koncepcją skupiającą się na badaniu własności stochastycznych ekonomicznych szeregów czasowych. Tym samym nie można w nim kompleksowo opisać analizowanych gospodarek pod kątem zjawiska i źródeł cykli koniunkturalnych, odmiennie niż w przypadku bogato wyspecyfikowanego modelu makroekonomicznego (por. Smets i Wouters (2007)).

Pomimo powyższych ograniczeń na podstawie uzyskanych wyników można sformułować wnioski, jak również postawić pewne hipotezy dotyczące w szczególności przyczyn zróżnicowania cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro. Wydaje się, że wyższe amplitudy cykli koniunkturalnych w Polsce niż w strefie euro mogą być najprawdopodobniej utożsamiane z większą zmiennością szoków wpływających na wahania koniunktury w Polsce niż szoków kształtujących koniunkturę w strefie euro. W przeprowadzonych w opracowaniu badaniach zostało to zobrazowane przy pomocy modelu SVAR opisującego wahania aktywności gospodarczej w strefie euro i Polsce. Wniosek ten jest spójny z wynikami badań innych autorów. Fidrmuc i Korhonen (2003) wskazują m.in., że zmienność szoków popytowych i podażowych w Polsce jest większa niż analogicznych szoków w strefie euro. Z kolei wy tłumaczenie przyczyn wyprzedzającego charakteru wahań aktywności gospodarczej w Polsce w stosunku do cyklu koniunkturalnego strefy euro (szczególnie w przypadku wahań o okresach 6–7 lat) jest o wiele trudniejsze. Najprawdopodobniej jest to częściowo związane ze specyfiką indywidualnych szoków

kształtujących koniunkturę w Polsce i strefie euro w latach 1995–2007, ale również z charakterystyką indywidualnych mechanizmów propagacji tych szoków w obydwu gospodarkach.

W pracy dołożono wszelkich starań, aby stanowiła ona wszechstronny przegląd metod ekonometrycznych z zakresu analizy spektralnej szeregów czasowych. Przedstawione w niej metody ilościowe to użyteczny zestaw narzędzi badawczych znajdujących szerokie zastosowanie we współczesnych analizach cykli koniunkturalnych. Metody te mogą być również z powodzeniem stosowane do badania fluktuacji gospodarczych w Polsce. Potwierdzają to przedstawione na łamach opracowania analizy z zakresu wahań aktywności gospodarczej w Polsce w latach 1995–2007. W pracy dążono do przedstawienia analiz empirycznych, które składają się na wszechstronne badanie cech charakterystycznych cyklu koniunkturalnego w Polsce, obrazując w szczególności jego związek z wahaniami aktywności gospodarczej w strefie euro.

Bibliografia

- [1] Adamowicz, E., Męczarski, M., Podgórska, M. (1998), „Statystyczne i ekonometryczne metody badania krótkookresowych zmian stanu gospodarki”, *Prace i Materiały, Zeszyt 60*, Instytut Rozwoju Gospodarczego, Szkoła Główna Handlowa.
- [2] Adamowicz, E., Dudek, S., Pachucki, D., Walczyk, K. (2008), „Synchronizacja cyklu koniunkturalnego polskiej gospodarki z krajami strefy euro w kontekście struktury tych gospodarek”, Instytut Rozwoju Gospodarczego, Szkoła Główna Handlowa.
- [3] Allen, D. S. (1997), „Filtering Permanent Cycles with Complex Unit Roots”, Working Paper No. 1997-001A, Federal Reserve Bank of St. Louis.
- [4] Araujo, F., Areosa, M. B. M., Neto, J. A. R. (2003), „r-filters: a Hodrick-Prescott Filter Generalization”, Working Paper Series 69, Banco Central do Brasil.
- [5] Barczyk, R., Kąsek, L., Lubiński, M., Marczewski, K. (2006), *Nowe oblicza cyklu koniunkturalnego*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [6] Baxter, M., King, R. G. (1995), „Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series”, NBER Working Paper No. 5022, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- [7] Benati, L. (2001), „Band-pass filtering, cointegration, and business cycle analysis”, Working Paper No. 142, Bank of England.
- [8] Bergman, M. (2004), „How Similar Are European Business Cycles?”, Working Paper No. 2004:9, Lund University, Department of Economics.
- [9] Beveridge, S., Nelson, C. R. (1981), „A New Approach to Decomposition of economic time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the ‘Business Cycle’”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 7, s. 151-174.
- [10] Billmeier, A. (2004), „Ghostbusting: Which Output Gap Measure Really Matters?”, IMF Working Paper WP/04/146, International Monetary Fund, Washington.
- [11] Blanchard, O. J., Quah, D. (1988), „The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances”, NBER Working Paper No. 2737, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- [12] Borowski, K., Skrzypczyński, P. (2006), „Analiza spektralna indeksów giełdowych DJIA i WIG”, *Studia i Prace Kolegium Zarządzania i Finansów, Zeszyt Naukowy 67*, Szkoła Główna Handlowa, s. 41-59.
- [13] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. (1983), *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, PWN, Warszawa.
- [14] Breitung, J., Candelon, B. (2006), „Testing for short- and long-run causality: A frequency-domain approach”, *Journal of Econometrics*, Vol. 132, s. 363-378.
- [15] Bruzda, J. (2003), „Analiza falkowa – alternatywa dla spektralnej analizy procesów ekonomicznych?”, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, s. 231-240.

- [16] Bruzda, J. (2009), „Badanie synchronizacji cykli koniunkturalnych w Polsce i strefie euro. Zastosowanie analizy czasowo-skalowej”, *Equilibrium*, Nr 2 (3), Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, s. 9-26.
- [17] Burda, M., Wyplosz, C. (2000), *Makroekonomia. Podręcznik europejski*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [18] Burman, J. P. (1980), „Seasonal Adjustment by Signal Extraction”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, Vol. 143, s. 321-337.
- [19] Burns, A. F., Mitchell, W. C. (1946), *Measuring Business Cycles*, N.Y.: National Bureau of Economic Research, New York.
- [20] Campbell, J. Y., Mankiw, N. G. (1987), „Permanent and Transitory Components in Macroeconomic Fluctuations”, NBER Working Paper No. 2169, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- [21] Canova, F. (1998), „Detrending and Business Cycle Facts”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 41, s. 475-512.
- [22] Charemza, W. W., Deadman, D. F. (1997), *Nowa ekonometria*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [23] Chatfield, C. (1996), *The Analysis of Time Series: An Introduction*, Fifth Edition, Chapman & Hall, London.
- [24] Christiano, L. J., Fitzgerald, T. J. (1998), „The Business Cycle: It's Still a Puzzle”, *Economic Perspectives*, Issue Q IV 1998, Federal Reserve Bank of Chicago, s. 56-83.
- [25] Christiano, L. J., Fitzgerald, T. J. (1999), „The Band Pass Filter”, Working Paper No. 9906, Federal Reserve Bank of Cleveland.
- [26] Clark, P. K. (1987), „The Cyclical Component of U.S. Economic Activity”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 102, No. 4, s. 797-814.
- [27] Cogley, T., Nason, J. M. (1995), „Effects of the Hodrick-Prescott Filter on Trend and Difference Stationary Time Series: Implications for Business Cycle Research”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 19, s. 253-278.
- [28] Croux, C., Forni, M., Reichlin, L. (1999), „A Measure of Comovement for Economic Variables: Theory and Empirics”, CEPR Discussion Paper No. 2339, Centre for Economic Policy Research, London.
- [29] Darvas, Z., Szapary, G. (2004), „Business Cycle Synchronisation in the Enlarged EU: Comovements in the New and Old Members”, MNB Working Papers 2004/1, Magyar Nemzeti Bank.
- [30] De Haan, J., Inklaar, R., Sleijpen, O. (2002), „Have Business Cycles Become More Synchronized?”, *Journal of Common Market Studies*, Vol. 40, s. 23-42.
- [31] Dędyś, M., Dorosiewicz, S. (2005), *Procesy stochastyczne?*, Szkoła Główna Handlowa.
- [32] Dickerson, A. P., Gibson, H. D., Tsakalotos, E. (1998), „Business Cycle Correspondence in the European Union”, *Empirica*, Vol. 25, s. 51-77.

- [33] Dickey, D. A., Fuller, W. A. (1979), „Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 74, s. 427-431.
- [34] Dueker, M. J., Nelson, C. R. (2002), „Business Cycle Filtering of Macroeconomic Data Via a Latent Business Cycle Index”, Working Paper 2002-025C, Federal Reserve Bank of St. Louis.
- [35] Eickmeier, S., Breitung, J. (2006), „How Synchronized are New EU Member States with the Euro Area? Evidence from a Structural Factor Model”, *Journal of Comparative Economics*, Vol. 34, No. 3, s. 538-563.
- [36] Estrella, A. (2007), „Extracting Business Cycle Fluctuations: What Do Time Series Filters Really Do?”, Staff Report No. 289, Federal Reserve Bank of New York.
- [37] Fic, T., Kolasa, M., Kot, A., Murawski, K., Rubaszek, M., Tarnicka, M. (2005), „Model gospodarki polskiej ECMOD”, *Materiały i Studia, Zeszyt nr 194*, Narodowy Bank Polski.
- [38] Fic, T. (2007), „Cykl koniunkturalny w Polsce. Wnioski z modeli Markowa”, w: Welfe, A. (red.) (2007), *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, Szkoła Główna Handlowa, s. 33-54.
- [39] Fidrmuc, J., Korhonen, I. (2003), „Similarity of supply and demand shocks between the euro area and the CEECs”, *Economic Systems*, Vol. 27, No. 3, s. 313-334.
- [40] Fidrmuc, J., Korhonen, I. (2006), „Meta-analysis of the business cycle correlation between the euro area and the CEECs”, CESifo Working Paper No. 1693, CESifo GmbH, Munich.
- [41] Gerlach, S., Smets, F. (1997), „Output Gaps and Inflation: Unobservable-Components Estimates for the G-7 Countries”, mimeo, Bank for International Settlements, Basel.
- [42] Gomez, V. (1999), „Three Equivalent Methods for Filtering Nonstationary Time Series”, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 17, s. 109-116.
- [43] Gradzewicz, M., Kolasa, M. (2004), „Szacowanie luki popytowej dla gospodarki polskiej przy wykorzystaniu metody VECM”, *Bank i Kredyt*, Nr 2 (Luty) 2004, Narodowy Bank Polski, s. 14-30.
- [44] Granger, C. W. J. (1966), „The Typical Spectral Shape of an Economic Variable”, *Econometrica*, Vol. 34, No. 1, s. 150-161.
- [45] Granger, C. W. J., Hatanaka, M. (1964), *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton University Press, Princeton.
- [46] Hamilton, J. D. (1989), „A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle”, *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, s. 357-384.
- [47] Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- [48] Harvey, A. C. (1985), „Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series”, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 3, No. 3, s. 216-227.
- [49] Harvey, A. C., Jaeger, A. (1993), „Detrending, Stylized Facts and the Business Cycle”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 8, No. 3, s. 231-247.
- [50] Hodrick, R. J., Prescott, E. C. (1980), „Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation”, Discussion Paper 451, Carnegie-Mellon University.

- [51] Hodrick, R. J., Prescott, E. C. (1997), „Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation”, *Journal of Money Credit and Banking*, Vol. 29, No. 1, s. 1-16.
- [52] Hughes Hallett, A., Richter, C. R. (2007), „Time Varying Cyclical Analysis for Economies in Transition”, Studies & Analyses 334, Center for Social and Economic Research, Warsaw.
- [53] Kaiser, M. (2005), „Euro zone: uncompleted convergence”, *BNP PARIBAS Conjoncture*, September 2005, No. 7, s. 20-33.
- [54] Kaiser, R., Maravall, A. (1999), „Estimation of the business cycle: A modified Hodrick-Prescott filter”, *Spanish Economic Review*, Vol. 1, s. 175-206.
- [55] Kaiser, R., Maravall, A. (2001), *Measuring Business Cycles in Economic Time Series*, Lecture Notes in Statistics Vol. 154, Springer-Verlag, New York.
- [56] Kaiser, R., Maravall, A. (2002), „A Complete Model-Based Interpretation of the Hodrick-Prescott Filter: Spuriousness Reconsidered”, Servicio de Estudios, Documento de Trabajo n.º 0208, Banco de España.
- [57] Kalman, R. E. (1960), „A new approach to linear filtering and prediction problems”, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, No. 1, s. 35-45.
- [58] King, R., Plosser, C., Stock, J., Watson, M. (1987), „Stochastic Trends and Economic Fluctuations”, NBER Working Paper No. 2229, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- [59] King, R. G., Rebelo, S. T. (1993), „Low frequency filtering and real business cycles”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, Issues 1-2, s. 207-231.
- [60] Koopman, S. J., Valle e Azevedo, J. (2003), „Measuring Synchronisation and Convergence of Business Cycles”, Tinbergen Institute Discussion Papers 03-052/4, Tinbergen Institute.
- [61] Kose, M. A., Prasad, E. S., Terrones, M. E. (2003), „How Does Globalization Affect the Synchronization of Business Cycles?”, IMF Working Paper WP/03/27, International Monetary Fund, Washington.
- [62] Koško, M. (2008), „Przełącznikowe modele typu Markowa w analizie procesów makroekonomicznych i finansowych w Polsce”, praca doktorska napisana pod kierunkiem naukowym prof. dr hab. Magdaleny Osińskiej, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.
- [63] Krolzig, H.-M. (1997), *Markov-Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Applications to Business Cycle Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- [64] Kwiatkowski, D. P., Phillips, C. B., Schmidt, P., Shin, Y. (1992), „Testing the Null Hypothesis of Stationary against the Alternative of a Unit Root”, *Journal of Econometrics*, Vol. 54, s. 159-178.
- [65] Kydland, F. E., Prescott, E. C. (1982), „Time to build an aggregate fluctuations”, *Econometrica*, Vol. 50, No. 6, s. 1345-1370.
- [66] Kydland, F. E., Prescott, E. C. (1990), „Business Cycles: Real Facts and a Monetary Myth”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, Vol. 14, No. 2, Spring, s. 3-18.
- [67] Levy, D. (2005), „Output, Capital, and Labor in the Short, and Long-Run”, Development and Comp Systems 0505012, Economics Working Paper Archive at WUSTL.

- [68] Long, J. B., Jr, Plosser, C. I. (1983), „Real Business Cycles”, *Journal of Political Economy*, Vol. 91, No. 1, s. 39-69.
- [69] Lubiński, M. (2004), *Analiza koniunktury i badanie rynków*, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa.
- [70] Lucas, R. E. (1977), „Understanding Business Cycles”, w: Kydland, F. E. (red.) (1995), *Business Cycle Theory*, Edward Elgar Publishing Limited, Aldershot, s. 85-107.
- [71] Lund, R., Vidakovic, B., Vidyashankar, A. N. (2004), „Testing equality of autocovariance functions”, Technical Report, URL: <http://smartech.gatech.edu/bitstream/1853/25851/1/04-31.pdf>.
- [72] Lütkepohl, H. (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- [73] MacKinnon, J. G. (1996), „Numerical Distribution Functions for Unit Root and Cointegration Tests”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, s. 601-618.
- [74] Maravall, A., del Rio, A. (2001), „Time Aggregation and the Hodrick-Prescott Filter”, Servicio de Estudios, Documento de Trabajo n.º 0108, Banco de España.
- [75] Mills, T. C. (1993), *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [76] Murray, C. J. (2003), „Cyclical Properties of Baxter-King Filtered Time Series”, *The Review of Economics and Statistics*, MIT Press, Vol. 85, No. 2, s. 472-476.
- [77] Nelson, C. R., Plosser, C. I. (1982), „Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, s. 139-162.
- [78] Newey, W. K., West, K. D. (1987), „A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix”, *Econometrica*, Vol. 55, No. 3, s. 703-708.
- [79] Newey, W. K., West, K. D. (1994), „Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 61, No. 4, s. 631-653.
- [80] Orphanides, A., van Norden, S. (2002), „The Unreliability of Output-Gap Estimates in Real Time”, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 84, No. 4, s. 569-583.
- [81] Piech, K., Pangsy-Kania, S. (red.) (2003), *Diagnozowanie koniunktury gospodarczej w Polsce*, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa.
- [82] Pollock, D. S. G. (2000), „Trend estimation and de-trending via rational square-wave filters”, *Journal of Econometrics*, Vol. 99, No. 2, s. 317-334.
- [83] Prescott, E. (1986), „Theory Ahead of Business Cycle Measurement”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, Vol. 10, No. 4, Fall, s. 9-22.
- [84] Proietti, T. (2008), „Structural Time Series Models for Business Cycle Analysis”, MPRA Paper No. 6854, Munich Personal RePEc Archive.
- [85] Ravn, M. O., Uhlig, H. (2002), „On Adjusting the HP-Filter for the Frequency of Observations”, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 84, s. 371-376.

- [86] Rekowski, M. (red.) (2003), *Wskaźniki wyprzedzające jako metoda prognozowania koniunktury w Polsce*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- [87] Romer, D. (2000), *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa.
- [88] Rose, A. K., Engel, C. (2002), „Currency Unions and International Integration”, *Journal of Money Credit and Banking*, Vol. 34, No. 3, s. 804-826.
- [89] Sargent, T. J. (1987), *Macroeconomic Theory*, Second Edition, Academic Press, London.
- [90] Schleicher, C. (2002), „An Introduction to Wavelets for Economists”, Working Paper 2002-3, Bank of Canada.
- [91] Schleicher, C. (2003), „Kolmogorov-Wiener Filters for Finite Time Series”, *Computing in Economics and Finance 2003*, No. 109, Society for Computational Economics.
- [92] Skrzypczyński, P. (2006), „Analiza synchronizacji cykli koniunkturalnych w strefie euro”, *Materiały i Studia*, Zeszyt nr 210, Narodowy Bank Polski.
- [93] Skrzypczyński, P. (2008), „Wahania aktywności gospodarczej w Polsce i strefie euro”, *Materiały i Studia*, Zeszyt nr 227, Narodowy Bank Polski.
- [94] Słucki, E. (1937), „The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes”, *Econometrica*, Vol. 5, No. 2, s. 105-146.
- [95] Smets, F., Wouters, R. (2007), „Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach”, *American Economic Review*, Vol. 97, No. 3, s. 586-606.
- [96] Solow, R. (1957), „Technical change and the aggregate production function”, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, No. 3, s. 312-320.
- [97] Stawicki, J. (1993), *Metody filtracji w modelowaniu procesów ekonomicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń.
- [98] Stock, J. M., Watson, M. W. (1998), „Business Cycle Fluctuations in U.S. Macroeconomic Time Series”, NBER Working Paper No. 6528, National Bureau of Economic Research, Cambridge.
- [99] Syczewska, E. M. (2002), „Analiza relacji długookresowych: estymacja i weryfikacja”, *Monografie i Opracowania*, Nr 462, Szkoła Główna Handlowa.
- [100] Valle e Azevedo, J. (2002), „Business Cycles: Cyclical Comovement Within the European Union in the Period 1960-1999. A frequency domain approach”, Working Paper WP 5-02, Banco de Portugal.
- [101] Valle e Azevedo, J. (2008), „A Multivariate Band-Pass Filter”, MPRA Paper No. 6555, Munich Personal RePEc Archive.
- [102] Varpalotai, V. (2005), „Are Old and New EU Member Countries' Cycles Getting More Synchronized? Proposing a Time Varying Lag Method for Analyzing Time Varying Cyclical Co-Movements among Economic Data”, *EcoMod.Net Working Paper*, URL: http://www.ecomod.net/conferences/ecomod2005/ecomod2005_papers/936.pdf.
- [103] Watson, M. W. (1986), „Univariate detrending methods with stochastic trends”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 18, No. 1, s. 49-75.

- [104] Welfe, A. (2003), *Ekonometria. Metody i ich zastosowanie*, Wydanie III zmienione, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [105] Whittle, P. (1963), *Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods*, English Universities Press, London.
- [106] Woźniak, P., Paczyński, W. (2007), „A Time-Frequency Analysis of Business Cycle Coherence between the Euro-zone and the New Member States”, CERGE-EI Working Paper, URL: http://www.cerge-ei.cz/pdf/gdn/RRCVI_61_paper_01.pdf.
- [107] Wynne, M. A., Koo, J. (2000), „Business Cycles under Monetary Union: A Comparison of the EU and US”, *Economica*, Vol. 67, s. 347-374.
- [108] Yogo, M. (2008), „Measuring business cycles: A wavelet analysis of economic time series”, *Economics Letters*, Vol. 100, No. 2, s. 208-212.
- [109] Yule, G. U. (1921), „On the Time-Correlation Problem, with Especial Reference to the Variate-Difference Correlation Method”, *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 84, No. 4, s. 497-537.
- [110] Zieliński, Z., Talaga, L. (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.
- [111] Zięba, J. (2002), „Długo- i krótkookresowa składowa Produktu Krajowego Brutto według metody Blancharda i Quaha”, *Materiały i Studia*, Zeszyt nr 155, Narodowy Bank Polski.

Aneks

Źródła pochodzenia danych wykorzystanych w rozdziale 4

Dane dla gospodarki polskiej:

- PKB (dotyczy również danych *real-time*), konsumpcja prywatna, inwestycje, wydatki rządowe, eksport i import – źródło: GUS, szeregi czasowe pozyskane z bazy danych modelu prognostycznego ECMOD (por. Fic et al. (2005)); opis: dane kwartalne, poziomy, ceny stałe 2005 r.
- Deflator PKB – źródło: GUS, szereg czasowy pozyskany z bazy danych modelu prognostycznego ECMOD (por. Fic et al. (2005)); opis: dane kwartalne, poziom, indeks jednopodstawowy, 2005=100.
- CPI – źródło: OECD, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (oecd:pol_cpaltt01_ixobq); opis: dane kwartalne, średnia kwartalna obliczona na podstawie danych miesięcznych, poziom, indeks jednopodstawowy, 2000=100.
- Przetwórstwo przemysłowe – źródło: OECD, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (oecd:pol_prmto01_ixobq); opis: dane kwartalne, średnia kwartalna obliczona na podstawie danych miesięcznych, poziom, indeks jednopodstawowy, 2000=100.
- Stopa bezrobocia – źródło: GUS, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (ew:pln09007); opis: dane kwartalne, średnia kwartalna obliczona na podstawie danych miesięcznych, poziom.
- Zatrudnienie – źródło: GUS, szereg czasowy pozyskany z bazy danych modelu prognostycznego ECMOD (por. Fic et al. (2005)); opis: dane kwartalne, poziom.
- Nominalna podaż pieniądza M3 – źródło: OECD, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (oecd:pol_mabmm301_stm); opis: dane kwartalne, średnia kwartalna obliczona na podstawie danych miesięcznych, poziom.
- Realna podaż pieniądza M3 – zmienna wynikowa, otrzymana poprzez deflowanie nominalnej podaży pieniądza M3 za pomocą deflatora CPI; opis: dane kwartalne, średnia kwartalna, poziom.
- Nominalna stopa procentowa 3M WIBOR – źródło: Reuters, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (ew:pln14203); opis: dane kwartalne, średnia kwartalna obliczona na podstawie danych dziennych, poziom.
- Realna stopa procentowa 3M WIBOR – zmienna wynikowa, otrzymana poprzez deflowanie nominalnej stopy procentowej 3M WIBOR za pomocą deflatora CPI r/r; opis: dane kwartalne, średnia kwartalna, poziom.
- Indeks giełdowy WIG20 – źródło: GPW, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (ew:pln15520); opis: dane kwartalne, średnia kwartalna obliczona na podstawie danych dziennych, poziom.

Dane dla gospodarek zagranicznych:

- PKB dla strefy euro – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122ez13); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r., agregat EA13 obejmujący 13 gospodarek: Austria, Belgia, Finlandia, Francja, Grecja, Hiszpania, Holandia, Irlandia, Luksemburg, Niemcy, Portugalia, Słowenia i Włochy.
- PKB dla Czech – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188cz); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.

- PKB dla Estonii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188ee); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Litwy – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188lt); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Łotwy – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188lv); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Słowacji – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188sk); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Węgier – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188hu); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Austrii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122at); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Belgii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122be); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Finlandii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122fi); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Francji – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122fr); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Hiszpanii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122es); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Holandii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122nl); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Niemiec – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122de); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Portugalii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km149255121pt); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Słowenii – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_km628449188si); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.
- PKB dla Włoch – źródło: Eurostat, szereg czasowy pozyskany z bazy danych Ecwin (es:q_gdp_k92079122it); opis: dane kwartalne, poziom, ceny stałe 2000 r.