

MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 259

Opracowanie metody badania wpływu zdarzeń
ekstremalnych i superekstremalnych
na stochastyczną dynamikę szeregów czasowych

Tomasz Gubiec, Ryszard Kutner, Tomasz Werner

Warszawa, 2011 r.

Tomasz Gubiec, Ryszard Kutner, Tomasz Werner – Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Projekt badawczy został zrealizowany w ramach konkursu Komitetu Badań Ekonomicznych NBP na projekty badawcze przeznaczone do realizacji przez pracowników NBP i osoby spoza NBP oraz sfinansowany ze środków Narodowego Banku Polskiego.

Projekt graficzny:

Oliwka s.c.

Skład i druk:

Drukarnia NBP

Wydał:

Narodowy Bank Polski

Departament Edukacji i Wydawnictw

00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21

tel. 22 653 23 35, fax 22 653 13 21

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2011

Materiały i Studia są rozprowadzane bezpłatnie

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: <http://www.nbp.pl>

Spis treści

1	Wstęp	10
1.1	Wstępne uwagi o procesie błędzenia losowego w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota	12
2	Motywacja empiryczna	15
3	Krótki przegląd literatury dotyczącej zdarzeń superekstremalnych	20
4	Definicja problemu	22
5	Błądzenie losowe w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota	26
5.1	Definicja procesu WM-CTRW	26
5.2	Faza superdyfuzji	29
6	Wyprowadzenie wzorów na autokowariancje w obecności królewskich smoków	31
6.1	Przypadek długotrwałego zdarzenia superekstremalnego	31
6.2	Przypadek zdarzenia superekstremalnego typu szoku	39
7	Algorytm i otrzymane wyniki	43
7.1	Dynamika stochastyczna	43
7.1.1	Konstrukcja długotrwałych zdarzeń superekstremalnych	44
7.1.2	Hierarchiczne błędzenie losowe a zdarzenia ekstremalne	46
7.2	Porównanie przewidywań formalizmu teoretycznego z wynikami symulacji	50
7.2.1	Wyniki dla długotrwałego zdarzenia superekstremalnego	51
7.2.2	Wyniki dla zdarzenia superekstremalnego typu szoku .	55
8	Wnioski i krótkie podsumowanie	58

Spis tablic

- 1 Cztery nieunormowane statystyki $S(j)$ (odwrócone piramidy) hierarchii poziomów (indeksów) j dla czterech zdarzeń super-ekstremalnych o różnej wielkości j_d 52

Spis rysunków

- 1 Kurs kupna CHF w złotych w okresie od 21 kwietnia 2005 do 20 kwietnia 2011. Dobrze widoczny jest systematyczny, liniowy (abstrahując od relatywnie niewielkiego rozrzutu) ponad półroczny blisko osiemdziesięcioprocentowy wzrost kursu w drugiej połowie 2008 roku i pierwszej 2009. 15
- 2 Kurs kupna EUR/USD między 6 a 10 maja (wieczór) 2010. Dobrze widoczny jest poniedziałkowy (poranny) pozytywny szok, czyli znaczący, skokowy (nagły) wzrost notowań euro względem dolara wywołany zapowiedzią gigantycznej pomocy finansowej dla Grecji. 16
- 3 Porównanie w skali półlogarytmicznej (shistogramowanej z krokiem 5 pipsów) empirycznej, leptokurtycznej częstotliwości występowania zmian kursu kupna EUR/USD w latach 2004 (krosy), 2006 (punkty), 2008 (gwiazdki), 2010 (kółka) wystawionego u znanego brokera GAIN Capital. Odwrócona parabola (linia przerywana) przedstawia rozkład Gaussa, przykładowo, dla roku 2008. Dobrze widoczne są pogrubione ogony histogramów empirycznych. Właśnie te ogony są bezpośrednim powodem wprowadzenia przez nas procesu WM-CTRW. 18

- 4 Schematyczny szereg czasowy trwający t_{tot} , zawierający długo-trwałego królewskiego smoka (najdłuższy ukośny odcinek) o nachyleniu v_d i czasie trwania t_d . Czas trwania szeregu czasowego przed i po tym superekstremalnym zdarzeniu wynosi, odpowiednio, t_L i t_R . Oczywiście, $t_{tot} = t_L + t_d + t_R$ 23
- 5 Schematyczny szereg czasowy zawierający zdarzenie superekstremalne w postaci szoku (czyli najdłuższego pionowego odcinka). Czas trwania szeregu czasowego przed i po szoku oznaczono, odpowiednio, przez t_L i t_R , natomiast czas trwania szoku $t_d = dt$ jest tak krótki, że nie mógł być przedstawiony w przyjętej czasowej zdolności rozdzielczej wykresu (oczywiście, $t_{tot} = t_L + dt + t_R$). 24
- 6 Schematyczna trajektoria hierarchicznie uporządkowanych kroków (τ^j, b^j) , dla prostoty, dla $N = 3$ i $j_{MAX} = 2$ oraz jednostkowych wartościach parametrów kalibrujących $\tau_0 = 1$ i $b_0 = 1$. Oczywiście, w naszych obliczeniach przyjęliśmy $j_{MAX} \gg 1$. Zatem zdarzenie ekstremalne, czyli czarny łabędź, jest zdefiniowany w postaci pary $(\tau^{j_{MAX}}, b^{j_{MAX}j})$ 47

- 7 Porównanie przewidywań formuły (27) (cienkie, ciągłe linie) z wynikami statystycznych symulacji numerycznych (ciągłe, grube linie) dla czterech różnych wartości stosunku charakterystycznych czasów $t_d/\Delta t_{MAX} = 1,653; 10,496; 66,651; 423,263 [\times 10^5]$, które odnoszą się, odpowiednio, do $j_d = 13, 15, 17, 19$. Linie przerywaną otrzymano na podstawie wzoru (11), czyli pod nieobecność królewskiego smoka. Wszystkie krzywe były wyznaczone dla tych samych wartości parametrów sterujących $\tau = 2.52$, $v = 0.992$ oraz $N = 4$. Zwróćmy uwagę, że przewidywania teoretyczne dla $j_d = 17$ i 19 są prawie nierozróżnialne (w ramach zdolności rozdzielczej wykresu) od odpowiadających im wyników symulacji, w całym dostępnym przedziale czasu $dt \leq \Delta t \leq \Delta t_{MAX}$. Jak widać, obecność długotrwałego królewskiego smoka odchyła krzywe od linii prostej (w skali log – log) tym bardziej im bardziej długotrwałe jest zdarzenie superekstremalne. . . . 54

- 8 Porównanie przewidywań formuły (48) (linie: kropkowane, przerywane kropkami oraz szare ciągłe) z wynikami symulacji (odpowiednie obszary o różnym stopniu szarości ulokowane pomiędzy wspomnianymi liniami) oznaczone dodatkowo (odpowiednio) literami a, b, oraz c dla trzech różnych wartości skoku $X_d = 0.41, 2.44, 5.26 [\times 10^6]$. Czarna linia ciągła jest przewidywaniem wynikającym z formuły (11), czyli pod nieobecność zdarzenia superekstremalnego w postaci szoku. Odpowiadający tej linii wynik uzyskany na drodze symulacji jest przedstawiony za pomocą najbardziej wewnętrznego, ciemnego, rozszerzającego się obszaru. Podobnie jak dla długotrwałego zdarzenia superekstremalnego, wszystkie krzywe otrzymano dla wspólnych wartości parametrów $\tau = 2,52; v = 0,992$ and $N = 4$ 55

Streszczenie

Ogólnie mówiąc, zasadniczym celem artykułu jest przedstawienie oprzyrządowania statystycznego możliwego do wykorzystania w modelowaniu przede wszystkim dynamiki finansowych szeregów czasowych. Nasze podejście koncentruje się na modelowaniu załamania strukturalnych oraz nieprzewidywalnych skoków i lokalnych trendów w obserwowanych szeregach czasowych, które w konsekwencji prowadzą do obserwacji nietypowych. Przyjmując stochastyczną naturę zjawisk obserwowanych na rynkach finansowych, podejście dostarcza procedur wykrywania skrajnie nietypowych obserwacji, pomijając (na obecnym etapie) kwestie związane z wyjaśnieniem przyczyn ich występowania.

Dokładniej rzecz biorąc, zbadano wpływ dwóch skrajnie różnych ale charakterystycznych rodzajów zdarzeń *superekstremalnych* na hierarchiczne błędzenie losowe w czasie ciągłym; błędzenie to jest w stanie opisać (w zależności od wartości parametrów) szeroki wachlarz brownowskich i niebrownowskich procesów stochastycznych. Porównano wyniki uzyskane na dwóch niezależnych drogach: analitycznego modelowania oraz na drodze symulowania na poziomie dynamiki stochastycznej zależnej od czasu autokowariancji prędkości procesu (rozumianej jako autokowariancji jego zmian na jednostkę czasu¹). Uzyskano dobrą zgodność obydwu podejść.

Pierwsze zdarzenie superekstremalne było określone przez swoją wyjątkową długotrwałość, wprowadzając tym samym przerwanie typu lokalnego dryfu w błędzeniu losowym. Drugie stanowiło szok, gdyż posiadało wielkość i prędkość dominujące w porównaniu z analogicznymi charakteryzującymi pozostałe zdarzenia losowe. Zależność wspomnianej autokowariancji od czasu miała w tym przypadku cha-

¹Prędkość procesu może być traktowana jak najprostsza zmienność.

rakter niestabilności. W obu przypadkach zaobserwowano, drastycznie różniące się od siebie, zmiany autokowariancji w czasie. Zostały one opisane w Raporcie w sposób ilościowy a następnie przedyskutowane.

Przedstawiona metodologia jest oryginalna, umożliwiając traktowanie autokowariancji prędkości procesu jako czułego, ilościowego detektora zdarzeń superekstremalnych - zostanie ona użyta w drugim etapie Projektu do analizy porównawczej danych empirycznych dotyczących przede wszystkim kursów walut. Ponadto, stworzona metodologia umożliwi zbadanie (w drugim etapie Projektu) wpływu zdarzeń superekstremalnych na ryzyko rynkowe, wyrażone np. za pomocą zależności wariancji procesu od czasu. Co więcej, pozwoli ona na opracowanie nowej ogólnej metodologii szacowania czasów występowania krachów opartej na zjawisku krytycznego spowolnienia towarzyszącego nieciągłym przemianom fazowym czy ogólniej mówiąc katastrofom (w sensie teorii katastrof René Thoma). Zauważyliśmy bowiem, że tego typu przemiany pojawiają się w trakcie trwania giełdowej hossy, poprzedzając właściwy krach. Badania prowadzone w ramach obu części Projektu mają charakter uniwersalny w tym sensie, że nie zależą od konkretnej przyczyny wywołującej zdarzenia superekstremalne. Jest to własność przypominająca dobrze znaną uniwersalność występującą w zjawiskach o charakterze krytycznym.

JEL: C02, C15, G01

Słowa kluczowe: kowariancja prędkości procesu, wariancja, ryzyko, hierarchiczne (fraktalne) błędzenie losowe, zdarzenie ekstremalne, czarny łabędź, zdarzenie superekstremalne, królewski (czerwony) smok, szok, prawo potęgowe, nieciągła przemiana fazowa, zjawiska krytyczne, krytyczne spowolnienie, teoria katastrof, krach, prognozowanie.

1 Wstęp

Jedną z najbardziej uderzających cech charakteryzujących dane empiryczne dostarczane przez nauki ekonomiczno-społeczne, a w tym zwłaszcza przez szeroko rozumiane finanse, jak też przyrodnicze jest fakt, że dane te mogą zawierać *ekstremalne zdarzenia rzadkie*, zwane (obrazowo) *czarnymi łabędziami*, które mogą odgrywać dominującą rolę. Prowadzi to najczęściej do praw skalowania a w tym praw potęgowych, zjawisk bezskalowych i rozkładów prawdopodobieństwa posiadających pogrubione (algebraiczne) ogony (ang. *heavy-tailed probability distributions*) a te przekładają się, o ile dotyczą zagadnień dynamicznych, na efekt długiej pamięci. Godnym odnotowania jest fakt powstania w ramach ekonometrii dynamicznej i finansowej, a ostatnio także ekonofizyki, ogromnej literatury poświęconej tego typu zagadnieniom zwłaszcza w kontekście funkcjonowania rynków finansowych (patrz pozycje literaturowe [1], [6]-[8], [9]-[14], [17], [23]-[26], [31], [37]-[39], [41, 42, 44, 45, 48, 49], [51, 52] oraz wybrane odnośniki literaturowe tamże). Podkreślmy, że obecne tam już od około trzydziestu lat podejście do modelowania pamięci w procesach stóp zmian z instrumentów finansowych wypracowało metody testowania i opisu specyficznego przebiegu kowariancji, wariancji oraz funkcji autokorelacji, zarówno dla samych procesów obserwowanych, jak i na przykład dla zmienności.

Jednakże, **pojawiło się szereg wskazówek [52], głównie empirycznych, że poza prawami potęgowymi i pogrubionymi ogonami, czyli poza zdarzeniami ekstremalnymi, istnieje jeszcze coś więcej.**

Właśnie w takim kontekście mówimy potocznie o zdarzeniach superekstremalnych zwanych też *królewskimi smokami*² (ang. *dragon-kings*) czy nawet

²Poetycki termin 'królewski smok' podkreśla, że mamy tutaj do czynienia ze zdarzeniem unikalnym, które całkowicie różni się od wszystkich pozostałych. Ponadto, jest to

czerwonymi smokami (ang. *red dragons*).

Przez zdarzenie superekstremalne rozumiemy zdarzenie leżące niezwykle daleko od wszystkich pozostałych zdarzeń losowych tworzących daną populację [52]. Dotychczas, tego typu anomalii nie brano pod uwagę, traktując ją jako błąd gruby lub jakąś efemerydę psującą tylko estymatory statystyczne. W niniejszym Projekcie traktuje się ją jako komplementarną do wspomnianych na wstępie zdarzeń ekstremalnych. W dalszym ciągu **nasze podejście umożliwi doprecyzowanie pojęcia zdarzenia superekstremalnego**. Należy podkreślić, że koncepcja królewskich smoków została po raz pierwszy sformułowana w roku 2009 właśnie w pracy **Didier Sornette** [52] - do tego czasu ani ekonometria, ani matematyka finansowa ani ekonofizyka nie zajmowały się tego typu zdarzeniami. Niniejszy Raport jest poświęcony głównie zdarzeniom superekstremalnym, traktując zdarzenia ekstremalne jedynie jako tło. Innymi słowy, ryzyko strat³ wywołane przez zdarzenie superekstremalne jest bez porównania większe od analogicznego spowodowanego wystąpieniem zdarzenia ekstremalnego. Jak widać, ma tutaj miejsce przewartościowanie roli zdarzeń ekstremalnych - są one zepchnięte na drugi plan. Na pierwszy plan wysunięte zostały zdarzenia superekstremalne, które przypuszczalnie odgrywają główną rolę w pojawianiu się krachów na rynkach finansowych [52].

W pracy [52] wskazano, że to zdarzenia superekstremalne (a nie ekstremalne) są często odpowiedzialne za występowanie różnego rodzaju bifurkacji a w tym katastrof czy przemian fazowych, czyli można je powiązać np. z istnieniem w układzie punktów przejścia bifurkacyjnego o charakterze

zdarzenie kluczowe, deformujące np. prawa potęgowe, czyli prawa Pareto [37].

³Miarą ryzyka może być iloczyn prawdopodobieństwa wystąpienia danego zdarzenia oraz wielkości straty jaką może ono spowodować. Dla zdarzenia superekstremalnego pierwsza wielkość jest znikomo mała podczas gdy druga jest gigantyczna. Oznacza to, że wspomniany iloczyn może być znacząco duży.

1

katastroficznym czy też punktów niestabilności o charakterze krytycznym. Zasugerowano tam nawet, że zdarzenia superekstremalne są czasami poprzedzane przez zdarzenia towarzyszące, zwane *prekursorami* królewskich smoków, co stwarza szansę na ich przewidywalność.

Zasadniczym celem niniejszej części Projektu jest modelowanie na drodze analitycznej oraz na drodze symulacji komputerowych wpływu dwóch skrajnie różnych ale charakterystycznych rodzajów egzogenicznych zdarzeń superekstremalnych na zależną od czasu autokowariancję prędkości procesu stochastycznego.

1.1 Wstępne uwagi o procesie błędzenia losowego w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota

Procesem stochastycznym, w ramach którego przeprowadzono konkretne obliczenia numeryczne, było hierarchiczne błędzenie losowe w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota (ang. *Weierstrass-Mandelbrot Continuous-Time Random Walk*, WM-CTRW), które jest w stanie opisać szerokie spektrum brownowskich i niebrownowskich procesów stochastycznych [32]-[34]. Model ten jest hierarchiczną wersją kanonicznego błędzenia losowego w czasie ciągłym (ang. *Continuous-Time Random Walk*, CTRW) [46, 22, 28] ponieważ podstawowy rozkład prawdopodobieństwa używany w modelu, czyli funkcja rozkładu czasów międzytransakcyjnych⁴ (ang. *waiting-time distribution*, WTD), jest dana czasoprzestrzenną funkcją Weierstrassa-Mandelbrota (patrz rozdz. 5.1 niniejszego Raportu bądź też równanie (2) w pracy [33]). Co więcej, na przykładzie błędzeń hierarchicznych stosunkowo łatwo jest zdefiniować w sposób obrazowy zdarzenia ekstremalne oraz

⁴Czas międzytransakcyjny rozumiany jest tutaj szeroko jako czas rozdzielający kolejne zdarzenia. Czas ten jest zmienną losową a zdarzenia mogą dotyczyć zarówno świata materii nieożywionej jak też wszelkiej ludzkiej aktywności.

dobrze określić rolę jaką pełnią w błędzeniu - będzie jeszcze o tym mowa w rozdz. 7.1.2. Dodajmy, że zarówno CTRW jak i WM-CTRW można zaliczyć do tzw. procesów odnowienia lub półmarkowowskich procesów stochastycznych [2, 3], [15]-[20] rozwijanych i stosowanych zarówno przez matematyków i ekonometryków jak też ekonofizyków od połowy lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. **Najistotniejszym elementem tych procesów jest traktowanie czasów oczekiwania (międzytransakcyjnych) jak zmiennych losowych.**

Należy zauważyć, że formalizm WM-CTRW jest wystarczająco ogólny i elastyczny aby wyprodukować, w zależności od wartości parametrów sterujących, różne rodzaje dyfuzji: od dyfuzji normalnej, poprzez superdyfuzję (np. ułamkowy ruch Browna (fBm) [53]) i dyfuzję balistyczną aż do spacerów Lévy'ego. Wynika to z faktu, że w strukturze czasoprzestrzennej szeregu czasowego symulowanego w ramach WM-CTRW zawarte są ekstremalne zdarzenia rzadkie. To właśnie one są odpowiedzialne za spowolnioną, potęgową relaksację układu.

Ponadto, zdecydowaliśmy się na wykorzystywanie formalizmu WM-CTRW ponieważ wcześniej sprawdziliśmy, że hierarchiczna WTD dobrze opisuje np. empiryczną WTD otrzymaną dla notowań (prawie) ciągłych niektórych kursów walutowych a także wybranych kursów akcji na giełdzie.

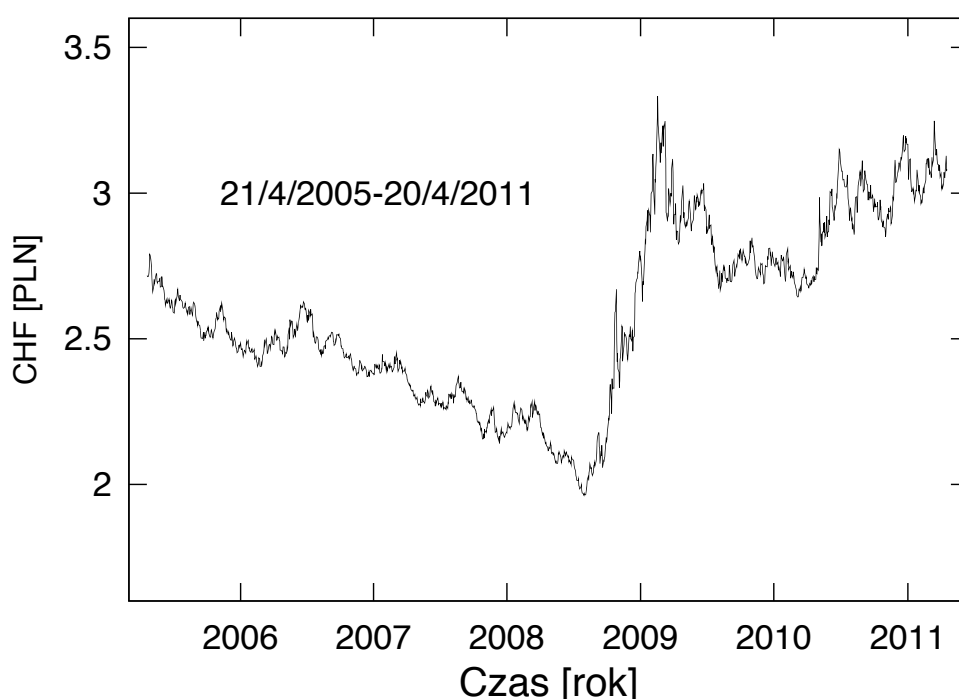
Niniejszy Raport jest zorganizowany następująco. Po pierwsze, w rozdz. 2, przedstawiona jest bezpośrednia motywacja pracy a w rozdz. 3 krótki przegląd literatury dotyczącej tylko zdarzeń superekstremalnych. Następnie, w rozdz. 4 zdefiniowany został problem wraz z podstawowymi wielkościami. W kolejnym kroku (rozd. 5) przedstawiony został krótko formalizm WM-CTRW wraz z fazą superdyfuzji wybraną przykładowo dla zilustrowania rozwiniętej w niniejszej części Projektu metody. Następnie, w rozdz. 6 wy-

1

proawdzono wzory na zależną od czasu autokowariancję prędkości procesu stochastycznego uwzględniającą oba, skrajnie różne rodzaje królewskich smoków. Porównanie przewidywań otrzymanych wzorów z danymi uzyskanymi z symulacji zostało zawarte w rozdz. 7. Wreszcie, wnioski końcowe i krótkie podsumowanie przedstawiono w rozdz. 8.

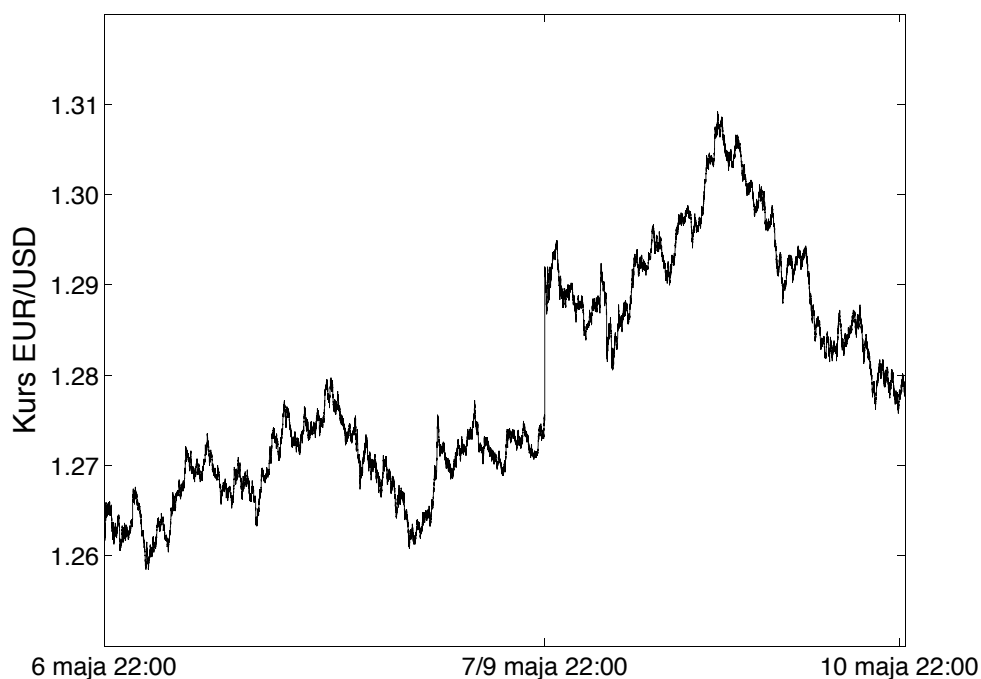
2 Motywacja empiryczna

Bezpośrednia motywacja niniejszego Projektu jest inspirowana własnościami empirycznych szeregów czasowych pochodzących z rynków finansowych (przede wszystkim z rynku Forex), których istotne fragmenty przedstawiono na rysunkach 1 i 2. Długotrwały liniowy (abstrahując od relatyw-



Rysunek 1: Kurs kupna CHF w złotych w okresie od 21 kwietnia 2005 do 20 kwietnia 2011. Dobrze widoczny jest systematyczny, liniowy (abstrahując od relatywnie niewielkiego rozrzutu) ponad półroczny blisko osiemdziesięcioprocentowy wzrost kursu w drugiej połowie 2008 roku i pierwszej 2009.

nie niewielkiego rozrzutu), blisko osiemdziesięcioprocentowy wzrost kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w drugiej połowie 2008 roku i pierwszej 2009 (patrz rysunek 1) oraz szok w notowaniach euro względem złotego z niedzieli (9 maja 2010) na poniedziałek (patrz rysunek 2), są to



Rysunek 2: Kurs kupna EUR/USD między 6 a 10 maja (wieczór) 2010. Dobrze widoczny jest poniedziałkowy (poranny) pozytywny szok, czyli znaczący, skokowy (nagły) wzrost notowań euro względem dolara wywołany zapowiedzią gigantycznej pomocy finansowej dla Grecji.

dwa, wspomniane wcześniej, skrajnie różne rodzaje zachowań kursów (szeregów czasowych).

Ten ogromny wzrost notowań franka szwajcarskiego (nie tylko względem złotego ale także w stosunku do euro oraz dolara) został wywołany, ogólnie mówiąc, nastrojami na światowych rynkach finansowych. Kraje Unii Europejskiej, a stąd euro i złoty, odczuwają skutki nadmiernego zadłużenia Grecji, Irlandii, Portugalii i Hiszpanii. Inwestorzy poszukują walut, które są znacznie pewniejsze a za taką wciąż uważany jest frank. Co do dolara, to dodruk przez Fed setek miliardów dolarów mających na celu pobudzenie amerykańskiej gospodarki, automatycznie wpływa na jego osłabienie.

Jeżeli chodzi o szok, to pozytywny szok w notowaniach EUR/USD z niedzieli 9 na poniedziałek 10 maja 2010, był skutkiem jednorazowej decyzji wyasygnowania przez UE i MFW ok. 750 mld euro pomocy finansowej dla (wspomnianych powyżej) upadających gospodarek eurolandu. Zauważmy, że **dana empiryczna opisująca ten szok leżałaby na wykresie na rysunku 3 około 200 pipsów na prawo a więc z punktu widzenia tego wykresu byłoby to zdarzenie superekstremalne, którego rolę jest wprost trudno przecenić.**

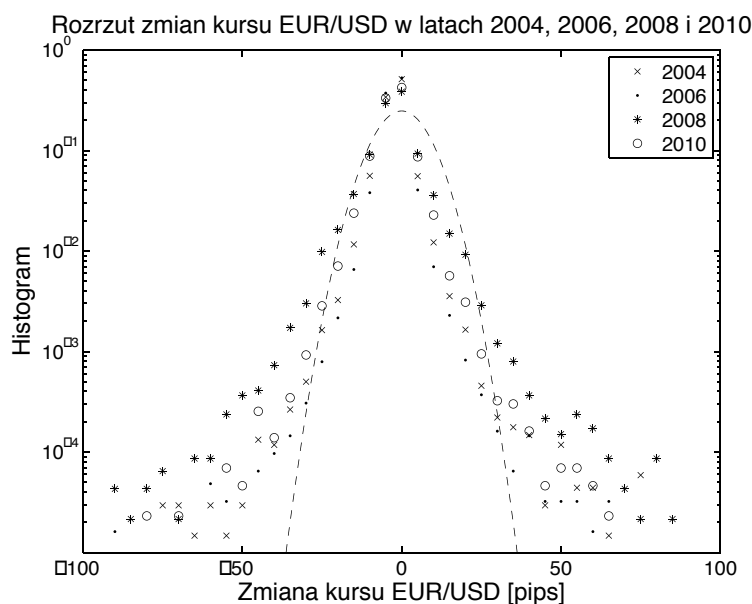
Należy zaznaczyć, że w niniejszej części Projektu analizujemy tylko (wspomniane powyżej) dwa skrajne rodzaje zdarzeń superekstremalnych bez "wchodzenia" w przyczyny wywołujące ich występowanie. Oczywiście, zdajemy sobie w zarysach sprawę, przynajmniej z głównych przyczyn ale w niniejszej części Projektu nie korzystamy z nich, gdyż zajmujemy się wybranymi, uniwersalnymi własnościami szeregów czasowych, czyli (na razie) ich skutkami a nie przyczynami.

Na referencyjnym rysunku 3 przedstawiono (w skali półlogarytmicznej) empiryczne histogramy częstotliwości zmian kursu kupna EUR/USD⁵ w latach 2004 (krosy), 2006 (punkty), 2008 (gwiazdki) i 2010 (kółka). Dla porównania na wykres naniesiono także rozkład Gaussa (linia przerywana) zbudowany na wartości średniej i dyspersji (przykładowo) dla 2008 roku⁶.

Jak widać, wszystkie cztery empiryczne rozkłady różnią się w sposób istotny od rozkładu Gaussa, gdyż są leptokurtyczne, charakteryzując się pogrubionymi ogonami, których jak wiadomo rozkład Gaussa nie posiada. Ten

⁵Dane empiryczne zaczerpnięto ze strony <http://ratedata.gaincapital.com/> znanego brokera GAIN Capital (adres: <http://www.gaincapital/contact.shtml>). Natomiast sam rysunek jest ograniczoną do wybranych trzech lat wersją wcześniejszego zamieszczonego w pracy [27]. Należy dodać, że analiza przedstawiona w tej pracy bazuje na materiale zamieszczonym w [8].

⁶Dla roku 2010 rozkład Gaussa byłby nieco szerszy o maksimum położonym nieco niżej natomiast dla lat 2004 i 2006 byłby wyższy o maksimum leżącym nieco wyżej.



Rysunek 3: Porównanie w skali półlogarytmicznej (shistogramowanej z krokiem 5 pipsów) empirycznej, leptokurtycznej częstotliwości występowania zmian kursu kupna EUR/USD w latach 2004 (krosy), 2006 (punkty), 2008 (gwiazdki), 2010 (kółka) wystawionego u znanego brokera GAIN Capital. Odwrócona parabola (linia przerywana) przedstawia rozkład Gaussa, przykładowo, dla roku 2008. Dobrze widoczne są pogrubione ogony histogramów empirycznych. Właśnie te ogony są bezpośrednim powodem wprowadzenia przez nas procesu WM-CTRW.

właśnie fakt leptokurtyczności jest nadzwyczaj interesujący z poznawczego punktu widzenia, posiadając doniosłe konsekwencje praktyczne (o których wspomniano we Wstępie). Generalnie, wynik przedstawiony na rysunku 3 wprowadza nas w świat stochastycznych procesów niegaussowskich rządzonej ekstremalnymi zdarzeniami rzadkimi generowanymi (w naszym przypadku) przez rynki finansowe. Tego typu procesami zajmujemy się właśnie w ramach niniejszego Projektu jako procesami bazowymi (referencyjnymi), na tle których pojawiać się będą zdarzenia superekstremalne. Zatem, przedmiotem badań niniejszego Projektu są własności zda-

rzeń superekstremalnych oraz skutki przez nie wywołane analizowane w kontekście wybranych procesów niegaussowskich (jako procesów referencyjnych).

3 Krótki przegląd literatury dotyczącej zdarzeń superekstremalnych

Od razu pragniemy podkreślić, że dotychczas ukazała się tylko jedna publikacja [52] dokonująca przeglądu faktów empirycznych z różnych dziedzin, od nauk ekonomicznych (a w tym szeroko rozumianych finansów) i socjologicznych po przyrodnicze, wskazująca na możliwość istnienia *świata pozaekstremalnego*, czyli *świata zdarzeń superekstremalnych*. Publikacja ta wskazała przede wszystkim na przyczyny powodujące odstępstwa od praw potęgowych. Za główne uznano w niej pojedyncze, niezwykle mało prawdopodobne zdarzenia o ogromnym natężeniu; w przypadku szeroko rozumianych finansów mówimy dodatkowo o wielkim ryzyku⁷ jakie zdarzenia te niosą ze sobą. Jeżeli zdarzenia takie pojawiają się, to nawet w pojedynkę są w stanie zdemolować (wielce stabilne) prawa potęgowe, rządzone przecież przez zdarzenia ekstremalne a więc także o wyjątkowo dużym (ale nie aż tak dużym) natężeniu. Jeżeli chodzi o zdarzenie ekstremalne i ich rolę w szeroko rozumianych finansach to szczególnie polecana jest przez nas literatura przeglądowa [1], [18], [25], [57]-[59], [38, 39], [12, 13], [41, 48].

Ostatnio, przez wykonawców niniejszego Projektu, wspólnie z autorem publikacji [52], została wysłana do druku⁸ praca [21] analizująca systematycznie, na drodze teoretycznej oraz symulacji numerycznych, dwa skrajne ale kluczowe przypadki zdarzeń superekstremalnych (czyli królewskich smoków). Jest pierwszą na świecie precyzyjnie definiującą zdarzenie superekstremalne i analizującą systematycznie, na drodze analitycznej oraz symu-

⁷Prosta miara tego ryzyka została zdefiniowana we Wstępie (rozdz. 1).

⁸Chodzi tutaj o druk w specjalnym tomie 'The European Journal of Physics' pt.: *Power Laws in Natural and Social Systems and Beyond*, w nowo powstałej serii pn.: 'Special Topics'.

lacji numerycznych, wpływ tych zdarzeń na szeregi czasowe zwłaszcza zawierające ekstremalne zdarzenia rzadkie. Praca ta zostanie przedstawiona w postaci referatu na międzynarodowej konferencji ekonofizycznej w Szanghaju, ICE 2011 [56]. Praca ta stanowi jeden z oryginalnych metodologicznych filarów⁹ niniejszego Projektu.

⁹Drugim filarem, będącym podstawą drugiej części niniejszego Projektu, jest zastosowanie teorii katastrof René Thoma [54] do opisu zjawisk katastrofalnej bifurkacji pojawiających się na wybranych rynkach finansowych, poprzedzających krachy giełdowe [29]. Ta ostatnia praca także zostanie przedstawiona w postaci referatu [35] na International Conference on Econophysics, ICE 2011, Shanghai.

4 Definicja problemu

W niniejszej, pierwszej części Projektu, tytułem pożytecznego przykładu, rozważamy w ramach formalizmu WM-CTRW superdyfuzję, dla której spełniona jest własność słabej ergodyczności [4], [5], [40]. Oznacza to, że średnia wartość czasu międzytransakcyjnego jest w tej fazie dyfuzji skończona (czyli istnieje).

Ponieważ prawdopodobieństwo pojawienia się królewskiego smoka jest znikomo małe (tzn. na jego pojawienie się musielibyśmy czekać zbyt długo), został on wyprodukowany po przeprowadzeniu pełnej symulacji szeregu czasowego (za pomocą tego samego algorytmu co sam szereg) a następnie włożony *ręcznie* w jego część centralną. W tym sensie pojawienie się zdarzenia superekstremalnego traktujemy jako wydarzenie egzogeniczne pomimo, że pochodzi z tego samego algorytmu co sam szereg.

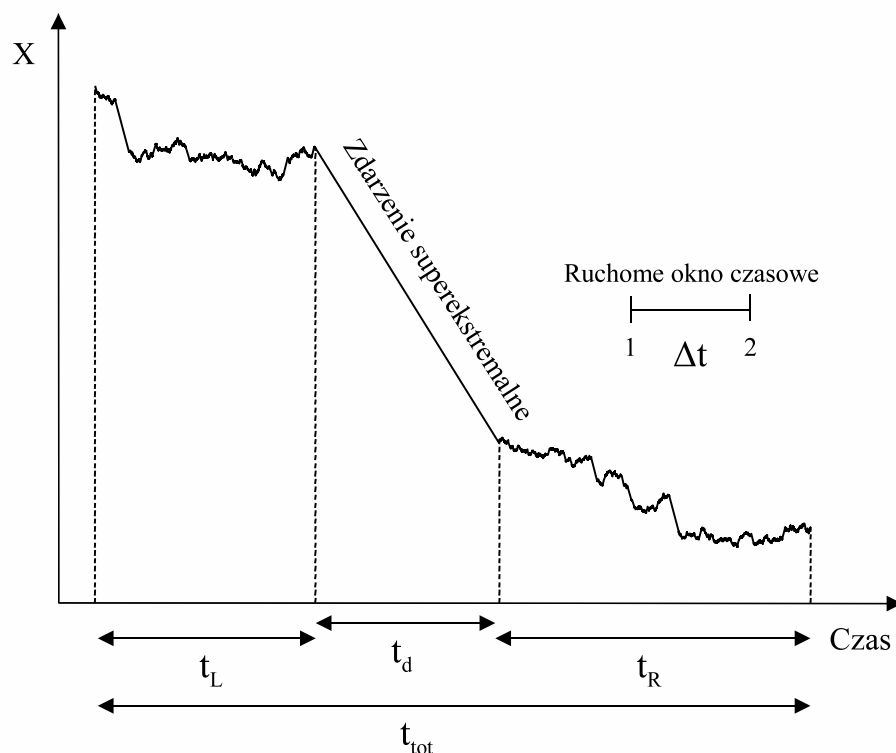
W ramach niniejszej części Projektu zamierzamy odpowiedzieć na następujące pytanie: **jak bardzo autokowariancja prędkości procesu, wyznaczona w oparciu o dany szereg czasowy, ulegnie zmianie gdy wewnątrz takiego szeregu pojawi się królewski smok?**

Rozważamy dwa rodzaje zdarzeń ekstremalnych:

- (a) długotrwałe zdarzenie ekstremalne (jego czas trwania oznaczyliśmy przez t_d , patrz rys. 4) oraz
- (b) szok, czyli nagły skok zmiennej losowej X , której prędkość ma wartość superekstremalną v_d (patrz rys. 5).

Wpływ tych zdarzeń na szereg czasowy został przedstawiony na rysunkach 4 i 5 - jest on systematycznie omawiany poniżej.

Autokowariancja prędkości procesu jest (dla naszej sytuacji) zdefiniowana

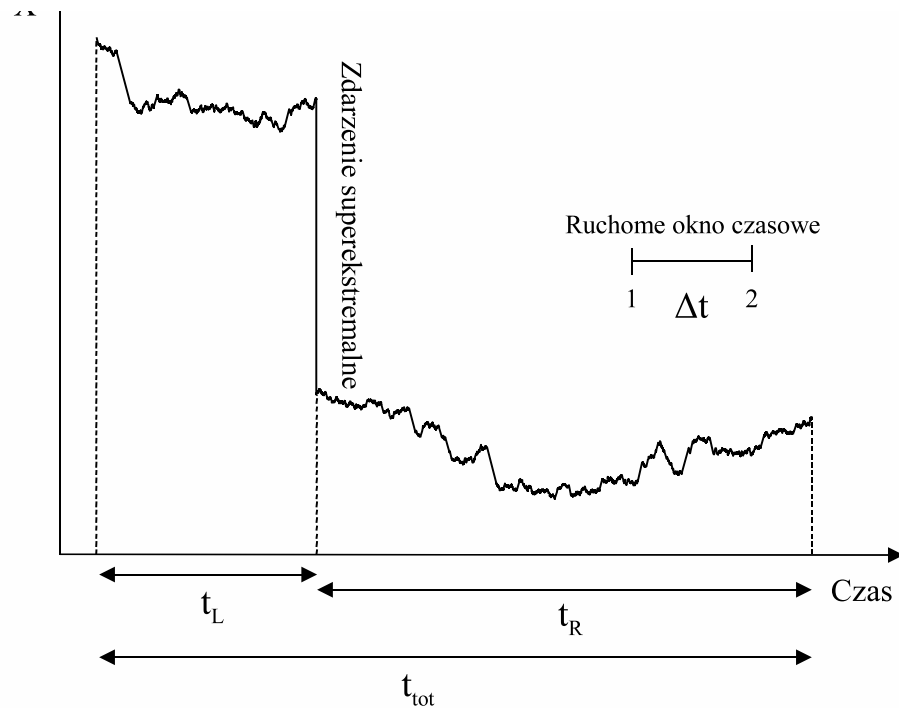


Rysunek 4: Schematyczny szereg czasowy trwający t_{tot} , zawierający długotrwałego królewskiego smoka (najdłuższy ukośny odcinek) o nachyleniu v_d i czasie trwania t_d . Czas trwania szeregu czasowego przed i po tym superekstremalnym zdarzeniu wynosi, odpowiednio, t_L i t_R . Oczywiście, $t_{tot} = t_L + t_d + t_R$.

następująco [16]-[43]:

$$\begin{aligned}
 Cov(v(t'), v(t' + \Delta t)) &= \langle v(t' + \Delta t) v(t') \rangle - \langle v(t' + \Delta t) \rangle \langle v(t') \rangle \\
 &= \langle v_1 v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle \\
 &= \begin{cases} C, & \text{w nieobecności królewskiego smoka} \\ C_d, & \text{w obecności królewskiego smoka} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza średnią po czasie $t' \leq t_{tot} - \Delta t$ przy ustalonej szeroko-



Rysunek 5: Schematyczny szereg czasowy zawierający zdarzenie superekstremalne w postaci szoku (czyli najdłuższego pionowego odcinka). Czas trwania szeregu czasowego przed i po szoku oznaczono, odpowiednio, przez t_L i t_R , natomiast czas trwania szoku $t_d = dt$ jest tak krótki, że nie mógł być przedstawiony w przyjętej czasowej zdolności rozdzielczej wykresu (oczywiście, $t_{tot} = t_L + dt + t_R$).

kości okna czasowego¹⁰ Δt (patrz rysunki 4 i 5 oraz rozważania w rozdz. 6), natomiast prędkość procesu $v(t') \stackrel{\text{def.}}{=} [X(t') - X(t' - dt)]/dt$ jest po prostu zmianą procesu na jednostkę czasu, gdzie krok dyskretyzacji czasu $dt \leq \Delta t$, t' . Prędkości v_1 and v_2 oznaczają w skrócie, odpowiednio, prędkości na początku i na końcu okna czasowego Δt , czyli $v_1 \equiv v(t')$ a $v_2 \equiv v(t' + \Delta t)$. Należy podkreślić, że (w ogólności) autokowariancja C_d (czyli w obecności królewskiego smoka) jest niestacjonarna zatem ma charakter dwupunktowy zależąc (w ogólności) także od wyjściowej chwili t' a

¹⁰Tego typu procedura nosi w fizyce nazwę *skanowania*.

nie tylko od różnicy Δt chwil (wyjściowej t' i aktualnej $t' + \Delta t'$). Jednakże, jak to wykazujemy (w rozdz. 6.1 przechodząc od wzoru (23) do wzoru (27) oraz przechodząc od wzoru (35) w rozdz. 6.2 do wzoru (48) w rozdz. 7.2.2), w analizowanych przez nas dwóch skrajnych przypadkach zdarzeń superekstremalnych, informacja o niestacjonarności ulega (paradoksalnie) degradacji, co przywraca stacjonarność kowariancji prędkości procesu w obecności królewskiego smoka, C_d .

Obie wielkości C i C_d są badane na drodze analitycznej (w rozdziałach 5 i 6) **oraz na drodze symulacji numerycznych** (w rozdz. 7) **ponieważ naszym zadaniem jest znalezienie relacji pomiędzy nimi w przypadku (a) i (b) oraz weryfikacja tych relacji.**

5 Błądzenie losowe w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota

W niniejszym rozdziale szkicujemy zasadnicze elementy formalizmu WM-CTRW, gdyż dokładniejszą analizę, np. wielkości $C(\Delta t)$, można znaleźć w naszych wcześniejszych pracach [33, 34].

5.1 Definicja procesu WM-CTRW

Błądzenie losowe w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota jest zdefiniowane za pomocą hierarchicznego, czasoprzestrzennego rozkładu prawdopodobieństwa WTD. Rozkład ten¹¹ jest dany za pomocą ważonego geometrycznie następującego, hierarchicznego szeregu, wprowadzającego sprzężenie czasoprzestrzenne

$$\psi(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} w(j) \psi_j(x, t), \quad (2)$$

gdzie x jest przemieszczeniem związanym z pojedynczym krokiem procesu trwającym przez czas t , natomiast $w(j)$ jest wagą daną rozkładem prawdopodobieństwa

$$w(j) = \frac{1}{N^j} \left(1 - \frac{1}{N}\right), \quad N > 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Waga ta może być interpretowana jako prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie j sukcesów w serii zdarzeń generowanej przez rozkład Bernoulli

¹¹Kompletna definicja formalizmu WM-CTRW wymaga osobnego średniowania po wyjściowym kroku błądzenia, czyli osobnej definicji WTD dla tego kroku, co zostało szczegółowo omówione w pracy [33]. Prowadząc tutaj symulacje numeryczne nie musimy o to zabiegać, gdyż używana jest tutaj średnia ruchoma automatycznie średniująca po pierwszym kroku błądzenia.

liego, gdzie $1/N$ jest prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu, natomiast warunkowa WTD jest już zdefiniowana w postaci sfaktoryzowanej za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa f i h

$$\psi_j(x, t) = \frac{1}{v_0 v^j t} f\left(\frac{|x|}{v_0 v^j t}\right) \frac{1}{\tau_0 \tau^j} h\left(\frac{t}{\tau_0 \tau^j}\right), \quad (4)$$

gdzie w dalszym ciągu korzystamy z prostej reprezentacji błądzenia losowego typu spacerów (a nie skoków lub przelotów), przyjmując warunkowe czasowe i przestrzenne rozkłady, odpowiednio, w postaci

$$f\left(\frac{|x|}{v_0 v^j t}\right) = \frac{1}{2} \delta\left(\frac{|x|}{v_0 v^j t} - 1\right) \quad (5)$$

oraz

$$h\left(\frac{t}{\tau_0 \tau^j}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_0 \tau^j}\right), \quad (6)$$

przy czym $v_0 v^j$ jest prędkością pojedynczego kroku błądzenia związaną z poziomem (stochastycznej) hierarchii o numerze (indeksie) j .

Zauważmy, że średni czas trwania pojedynczego kroku błądzenia $\tau_0 \tau^j$ oraz jego prędkość $v_0 v^j$ są sprzężone poprzez wspólny poziom j czasoprzestrzennej hierarchii definiującej (2). Parametry kalibrujące oznaczyliśmy tutaj przez τ_0 i v_0 .

Podkreślmy, że szczegółowe postacie rozkładów f i h są nieistotne z punktu widzenia asymptotycznych (długookresowych) własności układów, gdyż skalują się; ich możliwie najprostsze postacie są wybierane ze względów rachunkowych.

Jak wynika z wyrażenia (2), rozważany przez nas proces WM-CTRW należy do kategorii nieseparowalnych procesów typu CTRW, wprowadzając

tym samym dużo bogatszy dyfuzyjny diagram fazowy [32, 33].

Z wyrażenia (2) można łatwo wyprowadzić zamknięte formuły na czasowe i przestrzenne momenty opisujące pojedynczy krok błądzenia:

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty dt t \int_{-\infty}^\infty dx \psi(x, t) = \begin{cases} \tau_0 \frac{1-1/N}{1-\tau/N}, & \text{for } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{for } \alpha < 1 \end{cases} \quad (7)$$

gdzie $\alpha = \ln N / \ln \tau$ oraz

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty dx x^2 \int_0^\infty dt \psi(x, t) = \begin{cases} 2(b_0)^2 \frac{1-1/N}{1-b^2/N}, & \text{for } \beta > 2, \\ \infty, & \text{for } \beta < 2 \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $b_0 = v_0 \tau_0$, $b = v \tau$ i $\beta = \ln N / \ln b$. Jak widać mają one charakter progowy. Z grubsza mówiąc, **progowość ta jest wynikiem istnienia dwóch sąsiadujących ze sobą światów: brownowskiego (w tradycyjnym sensie¹²) i niebrownowskiego.** (Przypadkami marginalnymi, gdy $\alpha = 1$ i $\beta = 2$, nie zajmujemy się w niniejszym Projekcie.)

Należy podkreślić, że α i β , są parametrami (a dokładniej wykładnikami cząstkowymi, odpowiednio, *czasowym* i *przestrzennym* procesu¹³) definiującymi różne fazy dyfuzji w zależności od przyjętych wartości tych parametrów. W pracy [33] wyprowadzono wzór określający asymptotyczną postać drugiego, wielokrokowego momentu całkowitego (sumarycznego) przemieszczenia w procesie WM-CTRW

$$\langle X^2(\Delta t) \rangle \approx \frac{2 D_{st}}{\Gamma(\eta + 1)} (\Delta t)^\eta, \quad (9)$$

¹²Przez proces brownowski w sensie tradycyjnym rozumiemy proces, którego variancja jest asymptotycznie liniowa w czasie.

¹³Można wykazać, że wykładniki α i β definiują także wykładnik sterujący asymptotyczną zależnością od przedziału czasu t drugiego momentu przemieszczenia x w pojedynczym kroku procesu WM-CTRW, $\langle [x(t)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty dx x^2 \psi(x, t)$.

gdzie fraktalny wykładnik η rządzący asymptotycznym w czasie zachowaniem wariancji $\langle X^2(\Delta t) \rangle$ zależy od α i β , podobnie jak fraktalny współczynnik dyfuzji D_{st} (patrz Tabela 1 oraz dyfuzyjny diagram fazowy przedstawiony na rysunku 1 w pracy [33]). Przy okazji, zauważmy, że całkowity czas $t_{tot} = \sum t$, przy czym t jest tutaj przedziałem czasu a nie czasem, natomiast sumaryczne przemieszczenie $X(t_{tot}) = \sum x$, gdzie (w obu określeniach $\sum \dots$ oznacza sumę po kolejnych krokach procesu).

Wyrażenia (2) - (6) pozwalają na symulowanie trajektorii błądzenia losowego w czasie ciągłym przedstawionej schematycznie na rysunkach 4 i 5. Dzieje się tak dlatego, że definiują one jednocześnie dynamikę stochastyczną (omawianą w rozdz. 7.1).

5.2 Faza superdyfuzji

Wykorzystywany w niniejszej pracy proces WM-CTRW jest stacjonarnym procesem stochastycznym określonym dla sytuacji gdy $\langle t \rangle < \infty$, tzn. gdy wykładnik cząstkowy $\alpha > 1$ (patrz równania (4) i (5) w [33]). W takiej sytuacji wykładnik dyfuzyjny $\eta = 2H$, gdzie $0 < H \leq 1$, jest dobrze znanym wykładnikiem Hursta [53].

Wszystkie obliczenia przeprowadzone w niniejszym Raporcie są ograniczone do sytuacji, gdy wariancja czyli średni kwadrat (wielokrokowego) przemieszczenia jest dla skończonego czasu pozbawiony osobliwości, rosnąc superliniowo dla asymptotycznie długiego czasu. Innymi słowy, ograniczeni jesteśmy do przypadku $\eta > 1$, czyli zachowania persystentnego. Ta faza dyfuzji jest ograniczona na dyfuzyjnym diagramie fazowym przez następującą nierówność

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}. \quad (10)$$

Autokowariancja prędkości pod nieobecność królewskiego smoka (będziemy ją nazywać swobodną autokowariancją prędkości) dana jest następującym wyrażeniem (patrz wzór (13) w pracy [33])

$$C(\Delta t) = \frac{2 D_{st}}{\Gamma(\eta - 1)} \frac{1}{\Delta t^{2-\eta}}, \quad (11)$$

gdzie fraktalny współczynnik dyfuzji dla fazy superdyfuzyjnej

$$D_{st} = \frac{1 - \frac{\tau}{N}}{\ln N} \frac{\pi\alpha}{\sin\left(2\pi\alpha\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}\right)\right)} \quad (12)$$

a fraktalny wykładnik dyfuzyjny dla tej fazy

$$\eta = 1 + 2\alpha\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Ponieważ wykładnik $\eta < 2$, więc swobodna autokowariancja prędkości, $C(\Delta t)$, dana wyrażeniem (11) zanika potęgowo dla asymptotycznie długiego czasu Δt . W rozdz. 6 wykazujemy, że obecność zdarzenia superekstremalnego w szeregu czasowym niszczy tę własność.

6 Wyprowadzenie wzorów na autokowariancję w obecności królewskich smoków

W niniejszym rozdziale wyprowadzamy ogólne relacje pomiędzy estymatorami autokowariancji C_d prędkości procesu w obecności królewskich smoków a estymatorami autokowariancji C prędkości procesu pod nieobecność tych zdarzeń. Zatem, na "pierwszy ogień" bierzemy poniżej w rozdz. 6.1 przypadek (a); następnie, w rozdz. 6.2 przypadek (b) - oba zdefiniowano wcześniej w rozdz. 4. Jeszcze raz pragniemy podkreślić, że oba skrajne przypadki (odpowiednio, ekstremalnie długiego czasu trwania królewskiego smoka t_d i skrajnie krótkiego czasu t_d) są ważne zarówno z teoretycznego, jako przypadki odniesienia, jak i praktycznego punktu widzenia gdyż często (zwłaszcza w ostatnich kilku latach) występują na rynkach finansowych a w tym zwłaszcza walutowych.

6.1 Przypadek długotrwałego zdarzenia superekstremalnego

Strategia wyprowadzenia poszukiwanych relacji polega na podziale całego szeregu czasowego na segmenty, w których mamy już do czynienia z szeregiem stacjonarnym. W przypadku (a), czyli wystąpienia długotrwałego zdarzenia superekstremalnego, przyjmujemy, że

$$(1) dt \leq \Delta t \leq \Delta t_{MAX} \ll t_L, t_R,$$

$$(2) \Delta t_{MAX} \leq t_d,$$

gdzie Δt_{MAX} jest maksymalną wartością rozmiaru Δt okna czasowego. Należy zauważyć, że założenie (2) nie jest spełnione dla przypadku (b); dlatego jest on analizowany osobno w rozdz. 6.2.

Średnią po czasie iloczyn prędkości występującą w formule (1) można podzielić na pięć niezależnych składników. Wynika to z konieczności osobnego traktowania części szeregu czasowego znajdujących się przed i za położeniem zdarzenia superekstremalnego. Zdarzenie to wprowadza (w ogólności) do szeregu czasowego niestacjonarność o stałej prędkości - rodzaj lokalnego dryfu. **Naszym faktycznym celem jest wyprowadzenie zamkniętej formuły na niestacjonarną (w ogólności) kowariancję prędkości procesu C_d , a następnie z redukowaniem jej do postaci stacjonarnej.** Wstępnym krokiem naszej procedury jest następująca, estymująca dekompozycja średniej po czasie iloczynu prędkości:

$$\langle v_1 v_2 \rangle = \sum_{m=1}^{M=5} \langle v_1 v_2 \rangle_m w_m. \quad (14)$$

Teraz możemy stosunkowo łatwo wyznaczyć każdy z potrzebnych składników $\langle v_1 v_2 \rangle_m (\Delta t)$ z osobna, używając odpowiednio skonstruowanych estymatorów. Przy okazji uzyskujemy automatycznie towarzyszące tym składnikom wagi w_m .

- (1) Pierwsza składowa (dla $m = 1$) opisuje sytuację, gdy obie prędkości v_1 i v_2 dotyczą zdarzeń poprzedzających zdarzenie superekstremalne. Składowa ta, razem z towarzyszącą jej wagą, przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_2 \rangle_1 &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{t_L - \Delta t} \sum_{t'=dt}^{t_L - \Delta t} v(t') v(t' + \Delta t), \\ w_1 &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{t_L - \Delta t}{t_{tot} - \Delta t}, \end{aligned} \quad (15)$$

odnoszące się do błędzenia pod nieobecność królewskiego smoka. Dokładnie rzecz biorąc, składowa ta odpowiada sytuacji, gdy prędkość

v_1 leży wewnątrz przedziału czasu $[0, t_L - \Delta t]$, podczas gdy prędkość v_2 może znajdować się zarówno wewnątrz powyższego przedziału, bądź też na jego prawym brzegu.

- (2) Druga składowa (dla $m = 2$) odpowiada sytuacji gdy prędkość v_1 jest ulokowana przed zdarzeniem superekstremalnym, natomiast prędkość v_2 jest równa (stałej) prędkości v_d jaką posiada to zdarzenie. Druga składowa wraz z towarzyszącą jej wagą wynoszą:

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_2 \rangle_2 &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\Delta t} \sum_{t'=t_L-\Delta t+dt}^{t_L} v(t') v_d = \langle v \rangle_L v_d, \\ w_2 &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Delta t}{t_{tot} - \Delta t}. \end{aligned} \quad (16)$$

Zauważmy, że v_d jest jednocześnie miarą nachylenia najdłuższego odcinka szeregu czasowego przedstawionego na rysunku 4. Składnik ten reprezentuje pierwszą krzyżową sytuację, gdy prędkość v_1 jest ulokowana wewnątrz przedziału czasowego $[t_L - \Delta t, t_L]$ bądź też na jego prawym brzegu, podczas gdy prędkość v_2 jest odpowiednio umiejscowiona wewnątrz odcinka $[t_L, t_L + \Delta t]$ bądź też na jego prawym brzegu.

- (3) Przypadek ten jest szczególnie prosty, gdyż tutaj obie prędkości v_1 i v_2 są równe prędkości królewskiego smoka v_d . Zatem, trzecia składowa (dla $m = 3$) jest najprostsza i razem z towarzyszącą jej wagą przyjmują postacie:

$$\langle v_1 v_2 \rangle_3 (\Delta t) \stackrel{\text{def.}}{=} v_d^2, \quad w_3 \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{t_d - \Delta t}{t_{tot} - \Delta t}. \quad (17)$$

Dokładniej, prędkości v_1 oraz v_2 leżą (odpowiednio) wewnątrz przedziału definiującego czas trwania zdarzenia superekstremalnego $[t_L, t_L + t_d]$, bądź też prędkość v_2 lokuje się na jego prawym brzegu.

- (4) Teraz, prędkość v_1 jest równa prędkości v_d królewskiego smoka, natomiast prędkość v_2 jest położona za nim. Zatem, czwarta składowa (dla $m = 4$) i odpowiadająca jej waga wynoszą:

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_2 \rangle_4 (\Delta t) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\Delta t} \sum_{t'=t_L+t_d-\Delta t+dt}^{t_L+t_d} v_d v(t') = v_d \langle v \rangle_R, \\ w_4 &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\Delta t}{t_{tot} - \Delta t}, \end{aligned} \quad (18)$$

dotycząc drugiej sytuacji krzyżowej. Dokładniej, dla tej sytuacji prędkość v_1 leży wewnątrz bądź też na prawym brzegu przedziału czasu $[t_L + t_d - \Delta t, t_L + t_d]$ wyznaczającego czas trwania zdarzenia ekstremalnego. Natomiast, prędkość v_2 jest umieszczona wewnątrz lub na prawym brzegu przedziału czasu $[t_L + t_d, t_L + t_d + \Delta t]$.

- (5) Wreszcie, dla piątej składowej ($m = 5$) obie prędkości v_1 i v_2 są położone za królewskim smokiem. Zatem, składowa ta oraz odpowiadająca jej waga wynoszą:

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_2 \rangle_5 (\Delta t) &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{t_R - \Delta t} \sum_{t'=t_{tot}-t_R+dt}^{t_{tot}-\Delta t} v(t') v(t' + \Delta t), \\ w_5 &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{t_R - \Delta t}{t_{tot} - \Delta t}, \end{aligned} \quad (19)$$

stanowiąc analogię do sytuacji opisanej w punkcie (1). Ujmując rzecz bardziej szczegółowo, sytuacja ta jest określona przez prędkości v_1 i v_2 położone wewnątrz przedziału czasu $[t_{tot} - t_R, t_{tot}]$ niezawierającego królewskiego smoka, przy czym prędkość v_2 może być także liczona w chwili t_{tot} .

Teraz możemy już wyznaczyć estymator zawierający wszystkie powyżej obliczone składowe, czyli wyznaczyć pełny, poszukiwany wpływ zdarzenia

superekstremalnego na autokowariancję prędkości

$$\begin{aligned}
C_d(\Delta t) &= \langle v_1 v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle \\
&= \frac{\gamma_L - \Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \langle v_1 v_2 \rangle_1(\Delta t) + \frac{\gamma_R - \Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \langle v_1 v_2 \rangle_5(\Delta t) \\
&+ \frac{\Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} (\langle v \rangle_L + \langle v \rangle_R) v_d + \frac{\gamma_d - \Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} v_d^2 \\
&- \frac{1}{(1 - \Delta t/t_{tot})^2} [\gamma_L \langle v \rangle_L + (\gamma_R - \Delta t/t_{tot}) \langle v \rangle_R + \gamma_d v_d] \times \\
&\times [(\gamma_L - \Delta t/t_{tot}) \langle v \rangle_L + \gamma_R \langle v \rangle_R + \gamma_d v_d], \tag{20}
\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy jawną zależność C_d od czasu Δt (którą dalej będziemy utrzymywać); oprócz tego wprowadziliśmy następujące, użyteczne parametry $\gamma_L \stackrel{\text{def.}}{=} t_L/t_{tot}$, $\gamma_R \stackrel{\text{def.}}{=} t_R/t_{tot}$ i $\gamma_d \stackrel{\text{def.}}{=} t_d/t_{tot}$, definiujące ułamki czasu trwania procesu, odpowiednio, na lewo i na prawo od królewskiego smoka oraz trwania jego samego ponadto, skorzystaliśmy z definicji

$$\begin{aligned}
\langle v_1 \rangle &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{t_{tot} - \Delta t} \left[\sum_{t'=dt}^{t_L} v(t') + t_d v_d + \sum_{t'=t_{tot}-t_R+dt}^{t_{tot}-\Delta t} v(t') \right] \\
&= \frac{1}{t_{tot} - \Delta t} [t_L \langle v \rangle_L + (t_R - \Delta t) \langle v \rangle_R + t_d v_d], \\
\langle v_2 \rangle &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{t_{tot} - \Delta t} \left[\sum_{t'=\Delta t+dt}^{t_L} v(t') + t_d v_d + \sum_{t'=t_{tot}-t_R+dt}^{t_{tot}} v(t') \right] \\
&= \frac{1}{t_{tot} - \Delta t} [(t_L - \Delta t) \langle v \rangle_L + t_R \langle v \rangle_R + t_d v_d], \tag{21}
\end{aligned}$$

tutaj $\langle v \rangle_L$ and $\langle v \rangle_R$ są średnimi prędkościami po częściach szeregu czasowego, odpowiednio, na lewo i na prawo od królewskiego smoka. W dalszym ciągu (dla uproszczenia metodologii) kładziemy te prędkości równe zero ze względu na brak dryfu w układzie przed wystąpieniem zdarzenia superekstremalnego i po jego ustaniu. W świecie realnym może to być usprawiedliwione jedynie dla danych o wysokiej częstotliwości, czyli dla właśnie takich

z jakimi tutaj mamy do czynienia. Oznacza to, że definicje (21) upraszczają się do postaci

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = \frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} v_d. \quad (22)$$

Dodajmy też, że uwzględnienie dryfu na lewo i na prawo od królewskiego smoka jest stosunkowo łatwe, prowadząc jedynie do większej komplikacji wzorów.

Ponieważ zajmujemy się układem pozbawionym dryfu na lewo i na prawo od królewskiego smoka, dlatego wyrażenie (20) można uprościć do postaci

$$\begin{aligned} C_d(\Delta t) &= \frac{\gamma_L - \Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \langle v_1 v_2 \rangle_1(\Delta t) + \frac{\gamma_R - \Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \langle v_1 v_2 \rangle_5(\Delta t) \\ &+ \left[\frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} \left(1 - \frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right) - \frac{\Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right] v_d^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Jak widać, niestacjonarna kowariancja prędkości $C_d(\Delta t)$ zależy w ogólności nie tylko od zmiennej względnej $\Delta t/t_{tot}$ ale również od parametrów γ_L , γ_R , γ_d . Stąd można twierdzić, że zależy ona także od położenia zdarzenia superekstremalnego wewnątrz analizowanego szerergu czasowego. Natomiast funkcja ta nie zależy od znaku prędkości królewskiego smoka a jedynie od jej wielkości absolutnej. Co więcej, pochodzenie zdarzenia ekstremalnego nie odgrywa w tej analizie żadnej roli, czyli **otrzymaliśmy wzór, który jest wystarczająco ogólny, słuszny dla dowolnego błędzenia losowego** a nie tylko dla procesu WM-CTRW.

Dla wystarczająco szerokiego okna czasowego Δt_{MAX} ale przy warunku, że $\Delta t_{MAX}/t_{tot} \ll 1$, funkcja $C_d(\Delta t)$ upraszcza się dalej do postaci

$$C_d(\Delta t) = \left[\frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} \left(1 - \frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right) - \frac{\Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right] v_d^2. \quad (24)$$

Gdy tylko długotrwałe zdarzenie superekstremalne jest obecne w danym szeregu czasowym, funkcja $C_d(\Delta t)$ nie znika pomimo, że oba estymatory $\langle v_1 v_2 \rangle_1(\Delta t)$ and $\langle v_1 v_2 \rangle_5(\Delta t)$ mogą (fluktuując) asymptotycznie zanikać. Oczywiście formuła (24) przybiera wtedy jeszcze prostszą postać

$$C_d(\Delta t) = \gamma_d(1 - \gamma_d)v_d^2 \quad (25)$$

o ile jest spełniona silna ale usprawiedliwiona nierówność

$$\frac{\Delta t_{MAX}}{t_{tot}} \ll \min(\gamma_L, \gamma_R, \gamma_d(1 - \gamma_d)). \quad (26)$$

Zakładając, że błędzenia losowe przed i po królewskim smoku są statystycznie identyczne (co nie wyklucza tego, że ich pojedyncze trajektorie mogą się znacznie różnić wyglądem) otrzymujemy, z dokładnością do nieusuwalnych fluktuacji, że $\langle v_1 v_2 \rangle_1(\Delta t) = \langle v_1 v_2 \rangle_5(\Delta t) = C(\Delta t)$. Umożliwia to **przekształcenie wyrażenia (23) do prostszej postaci**

$$C_d(\Delta t) = \frac{1 - \gamma_d - 2\Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} C(\Delta t) + \left[\frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} \left(1 - \frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right) - \frac{\Delta t/t_{tot}}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right] v_d^2, \quad (27)$$

stanowiącej naszą referencyjną, poszukiwaną relację pomiędzy $C_d(\Delta t)$ a $C(\Delta t)$. Zauważmy, że **powyższa formuła nie zależy od konkretnego usytuowania królewskiego smoka wewnątrz szeregu czasowego** w przeciwieństwie do wyrażenia (23) (analogiczną własność posiada również formuła (25) wynikająca także z powyższego wzoru).

Zasadnicza różnica pomiędzy $C(\Delta t)$ i $C_d(\Delta t)$ polega na tym, że ta pierwsza asymptotycznie znika, podczas gdy ta druga nie znika. Zatem można powiedzieć, że w zaistniałej sytuacji w układzie pojawiło się jakieś upo-

rządkowanie dalekiego zasięgu, tutaj wprowadzone przez zdarzenie superekstremalne.

Wspomniana różnica dostarcza narzędzia pozwalającego odróżnić np. potęgową relaksację spowodowaną istnieniem zdarzeń ekstremalnych czyli czarnych łabędzi od relaksacji wywołanej przez zdarzenia superekstremalne czyli królewskie smoki. Podkreślimy, że nasza formuła referencyjna (27) może pełnić taką rolę nawet dla sytuacji bardziej złożonych.

Przy okazji (w ramach tych samych upraszczających założeń) można wyznaczyć $\langle v_1^2 \rangle$ i $\langle v_2^2 \rangle$, analogicznie jak $\langle v_1 \rangle$ i $\langle v_2 \rangle$, a stąd wariancje $Var(v_j) \stackrel{\text{def.}}{=} \langle v_j^2 \rangle - \langle v_j \rangle^2$, $j = 1, 2$. W wyniku otrzymujemy

$$\begin{aligned} Var(\Delta t) &= Var(v_1) = Var(v_2) \\ &= \left(1 - \frac{\gamma_d}{1 - \frac{\Delta t}{t_{tot}}}\right) \left(Var_0(v) + \frac{\gamma_d}{1 - \frac{\Delta t}{t_{tot}}} v_d^2\right), \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie $Var_0(v) = Var_L(v) = Var_R(v)$ jest wariancją prędkości procesu pozbawionego zdarzenia superekstremalnego, przy czym $Var_L(v)$ i $Var_R(v)$ są wariancjami prędkości procesu, odpowiednio, przed wystąpieniem i po wystąpieniu zdarzenia superekstremalnego; innymi słowy, przyjęliśmy, że $\langle v^2 \rangle_L = \langle v^2 \rangle_R$.

Ze wzorów (27) i (28) określających, odpowiednio, autokowariancję i wariancję procesu zawierającego zdarzenie superekstremalne, wynika natychmiast, że funkcja autokorelacji prędkości procesu stochastycznego $VAF \stackrel{\text{def.}}{=} C_d(\Delta t)/Var(\Delta t)$ jest zależna jedynie od zmiennej Δt co oznacza, że proces stał się stacjonarny (jest to tzw. słaba stacjonarność). Oczywiście, $VAF(\Delta t)$ jest określona przez trzy parametry¹⁴, γ_d , t_{tot} i v_d , podobnie jak $C_d(\Delta t)$ ale, ze względu na prostszą postać tej drugiej, będziemy w dalszym ciągu roz-

¹⁴Nie bierzemy tutaj pod uwagę zupełnie innych parametrów określających $C(\Delta t)$.

ważać autokowariancję a nie funkcję autokorelacji.

Jeżeli spełnione jest założenie (26), możliwe jest uproszczenie wyrażenia (27) do postaci

$$C_d(\Delta t) = (1 - \gamma_d) [C(\Delta t) + \gamma_d v_d^2]. \quad (29)$$

Wyrażenie to zależy m.in. od dwóch parametrów γ_d i v_d całkowicie charakteryzujących zdarzenie superekstremalne. Parametry te można odczytać z początkowej i asymptotycznej wartości funkcji $C_d(\Delta t)$.

Podobnie rzecz się ma ze wzorem (28), który przechodzi w następujący

$$Var(\Delta t) = (1 - \gamma_d) (Var_0(v) + \gamma_d v_d^2), \quad (30)$$

gdzie teraz wariancja $Var(\Delta t)$ jest już niezależna od Δt , nie zmieniając tym samym kształtu funkcji autokorelacji w stosunku do kształtu autokowariancji. Wskazuje to raz jeszcze na możliwość używania w naszych rozważaniach autokowariancji prędkości procesu a nie koniecznie funkcji autokorelacji prędkości VAF .

6.2 Przypadek zdarzenia superekstremalnego typu szoku

Aby zbadać sytuację w której zdarzenie superekstremalne typu szoku pojawiło się wewnątrz danego szeregu czasowego (patrz przypadek (b) zdefiniowany w rozdz. 4), musimy zamienić założenie (2) przedstawione w rozdz.

6.1 przez następujące

$$t_d = dt. \quad (31)$$

Jak widać, czas trwania zdarzenia superekstremalnego jest tak krótki jak to jest tylko możliwe równając się czasowi trwania pojedynczego kroku dyskretyzacji czasu dt . Powyższe założenie wymaga modyfikacji składowych (2) i (4) w wyrażeniu (14). Mianowicie, składowe te wraz z odpowiadającymi im wagami zamieniane są przez poniższe

$$\langle v_1 v_2 \rangle_2 \stackrel{\text{def.}}{=} v_L v_d, \quad w_1 = \frac{dt}{t_{tot} - \Delta t},$$

i

$$\langle v_1 v_2 \rangle_4 \stackrel{\text{def.}}{=} v_d v_R, \quad w_2 = \frac{dt}{t_{tot} - \Delta t}.$$

Co więcej, zamiast składowej (3) podstawiamy

$$\langle v_1 v_2 \rangle_3, \quad w_3 = \frac{\Delta t - dt}{t_{tot} - \Delta t}, \quad (32)$$

gdzie prędkości $v_1 = v_L$ i $v_2 = v_R$ są ulokowane odpowiednio przed i za szokiem. Stąd, nowa formuła na $C_d(\Delta t)$ przybiera postać

$$\begin{aligned} C_d(\Delta t) &= [(t_L - \Delta t) \langle v_1 v_2 \rangle_1(\Delta t) + dt v_L v_d + (\Delta t - dt) \langle v_1 v_2 \rangle_3(\Delta t) + dt v_d v_R \\ &+ (t_R - \Delta t) \langle v_1 v_2 \rangle_5(\Delta t)] \frac{1}{t_{tot} - \Delta t} \\ &- [t_L \langle v \rangle_L + dt v_d + (t_R - \Delta t) \langle v \rangle_R] [(t_L - \Delta t) \langle v \rangle_L + dt v_d + t_R \langle v \rangle_R] \\ &\times \frac{1}{(t_{tot} - \Delta t)^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Analogicznie jak dla przypadku długotrwałego zdarzenia superekstremalnego przyjmujemy¹⁵, że $\langle v_1 v_2 \rangle_1(\Delta t) = \langle v_1 v_2 \rangle_3(\Delta t) = \langle v_1 v_2 \rangle_5(\Delta t) = C(\Delta t)$ co w przypadku nieobecności dryfu w układzie prowadzi do uprosz-

¹⁵Z założenia tego można by zrezygnować ale wtedy wzrośnie stopień komplikacji dalszych wzorów.

czonyj postaci równania (33)

$$C_d(\Delta t) = \frac{t_{tot} - \Delta t - 2dt}{t_{tot} - \Delta t} C(\Delta t) + \frac{(v_L + v_R) X_d}{t_{tot} - \Delta t} - \left(\frac{X_d}{t_{tot} - \Delta t} \right)^2, \quad (34)$$

gdzie $X_d = dt v_d$ jest wielkością szoku. Zauważmy, że v_L i v_R są prędkościami chwilowymi rozdzielonymi przedziałem czasu $2\Delta t$. Z definicji kroku czasowego dt otrzymujemy natychmiast, że $dt \ll t_{tot} - \Delta t$; stąd, równanie (34) można dalej uprościć

$$C_d(\Delta t) = C(\Delta t) + (v_L + v_R) \frac{X_d}{t_{tot}} \frac{1}{1 - \Delta t/t_{tot}} + \left(\frac{X_d}{t_{tot}} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \Delta t/t_{tot}} \right)^2, \quad (35)$$

do naszej drugiej podstawowej formuły. Równanie to będzie w dalszym ciągu przekształcane w rozdz. 7 prowadząc do tego, że dyspersja autokowariancji $C_d(\Delta t)$ będzie wyrażona przez zależną od czasu dyspersję sumarycznej prędkości $v_L + v_R$. W ten sposób uzyskamy autokowariancję $C_d(\Delta t)$ w postaci odpowiedniej obwiedni. Ułatwi to dopasowanie $C_d(\Delta t)$ do wyników symulacji.

Przy okazji zauważmy, że wariancja prędkości procesu przyjmuje w tym przypadku postać

$$Var(\Delta t) = \frac{1}{1 - \Delta t/t_{tot}} Var_0(v) + v_d \frac{X_d}{t_{tot}} \frac{1}{1 - \Delta t/t_{tot}}. \quad (36)$$

Z wyrażeń (35) i (36) wynika bezpośrednio, że VAF zależy jedynie od zmiennej Δt co oznacza, podobnie jak w poprzednim przypadku (długotrwałego zdarzenia superekstremalnego), że mamy tutaj do czynienia również z sytuacją stacjonarną (także w słabym sensie). Zatem podobnie jak w poprzednim przypadku, będziemy dla prostoty wykorzystywać formułę (35)

a nie bardziej skomplikowaną dla VAF .

7 Algorytm i otrzymane wyniki

7.1 Dynamika stochastyczna

Dynamika stochastyczna jest w istocie rzeczą algorytmem umożliwiającym symulowanie kolejnych, pojedynczych kroków procesu w ramach formalizmu WM-CTRW. Składa się ona z trzech następujących etapów:

- (i) najpierw losowany jest, w danym pojedynczym kroku błędzenia, indeks j z rozkładu (3),
- (ii) następnie można już wykorzystać równanie stochastyczne określające czas trwania t tego kroku

$$t = -\tau_0 \tau^j \ln(1 - R), \quad (37)$$

gdzie $R \in [0, 1[$ jest liczbą przypadkową generowaną z rozkładu jednorodnego określonego na przedziale jednostkowym; zauważmy, że (37) jest równoważne (6),

- (iii) przemieszczenie w pojedynczym kroku jest wyznaczone za pomocą poniższego równania stochastycznego

$$x(t) = \xi v_0 v^j t; \quad (38)$$

zmienna losowa ξ opisuje szum dychotomiczny (tzn. $\xi = +1$ albo -1 z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$) oraz $x(t) \stackrel{\text{def.}}{=} X(t') - X(t' - t)$, gdzie t' jest czasem bieżącym (a nie przedziałem czasu jak t).

W ten sposób udało nam się skonstruować pojedynczą trajektorię procesu błędzenia losowego w czasie ciągłym. Oczywiście, τ_0, τ i v_0, v są sterującymi parametrami wejściowymi (zostały one ustalone przed rozpoczęciem

symulacji). W dalszym ciągu przyjmujemy dla uproszczenia, że parametry kalibrujące $\tau_0 = 1$ i $v_0 = 1$.

Jak widać, powyższa trajektoria została zbudowana w ramach niestacjonarnej wersji formalizmu CTRW, gdzie pierwszy krok błędzenie nie jest wyróżniony [22, 32, 33], tzn. WTD dla pierwszego skoku ma taką samą postać jak dla pozostałych kroków. Właśnie, w ramach formalizmu WM-CTRW ma miejsce osobne traktowanie WTD dla pierwszego kroku¹⁶ [33]. Na szczęście, *VAF* wyprowadzona w ramach formalizmu WM-CTRW umożliwia porównanie jej przewidywań z wynikami symulacji. Jest to możliwe dzięki temu, że przy jej konstruowaniu wykorzystuje się średnią ruchomą, która z definicji uśrednia po warunkach początkowych stacjonaryzując *VAF*. Opisany powyżej algorytm został wykorzystany w rozdz. 7.2. Właśnie uzyskana dzięki temu trajektoria była przerywana zarówno przez długotrwałe zdarzenie superekstremalne jak też (osobno) przez zdarzenie superekstremalne typu szoku. Sposób przygotowania długotrwałego zdarzenia superekstremalnego wymaga nieco więcej wyjaśnień.

7.1.1 Konstrukcja długotrwałych zdarzeń superekstremalnych

Dynamika stochastyczna zdefiniowana równaniami (37) i (38) jest trójwymiarowa, tzn. jest sterowana za pomocą poziomu struktury hierarchicznej j , liczby losowej R oraz zmiennej dychotomicznej ξ , przy czym tylko pierwsze dwie zmienne są odpowiedzialne za wielkość pojedynczego kroku błędzenia. Jednak w przypadku generowania długotrwałych zdarzeń super-

¹⁶Można wykazać, że nawet w takim przypadku błędzenie losowe ma ogólniejszy charakter niż persystentny, fraktalny ruch Browna [53] wprowadzony przez Mandelbrota i van Nessa. Jest tak dlatego, że otrzymany propagator może mieć postać niegaussowską dla $1/\beta > 1/\alpha$.

ekstremalnych wykorzystujemy uproszczoną dynamikę stochastyczną¹⁷. W tym celu zastępujemy równanie (37) prostszym

$$t = t_d = v_0 \tau^{j_d}. \quad (39)$$

Jak widać, wielkość długotrwałego królewskiego smoka jest kontrolowana teraz tylko przez jedną zmienną, a mianowicie $j = j_d$, gdyż prędkość tego zdarzenia $v_d = v_0 v^{j_d}$, czas jego trwania $t_d = \tau_0 \tau^{j_d}$ oraz jego przemieszczenie $x_d = \xi b_0 b^{j_d}$, gdzie $b_0 = v_0 \tau_0$ oraz $b = v \tau$.

Inaczej mówiąc, proces stochastyczny zdefiniowany równaniami (39) i (38) jest procesem uproszczonym. Jest on dyskretny w czasie a stąd i w przestrzeni, gdyż

$$x(t) = x_d = \xi v_0 \tau_0 v^{j_d} \tau^{j_d} = \xi b_0 b^{j_d}. \quad (40)$$

Jeżeli index j_d został ustalony, to automatycznie czas międzytransakcyjny jest także ustalony. Jest on równy średniemu czasowi definiującemu rozkład wykładniczy dany wyrażeniem (37), czy równoważnie przez (6).

Jak widać mamy tutaj do czynienia z dwoma rodzajami procesów stochastycznych. Pierwszym, który leży u podstawy formalizmu WM-CTRW, czyli u podstawy czasoprzestrzennej hierarchii zdarzeń losowych i drugi proces, który generuje długotrwałe zdarzenia ekstremalne z uproszczonej, także hierarchicznej ale dyskretnej dynamiki stochastycznej. Ten drugi proces charakteryzuje się zarówno brakiem fluktuacji pojedynczych przemieszczeń jak też czasów międzytransakcyjnych. Faktycznie, proces ten został wykorzystany w rozdz. 7.1.2 do wyjaśnienia definicji czarnych łabędzi.

¹⁷Dynamik stochastycznych umożliwiających generowanie długotrwałych zdarzeń superekstremalnych można zaproponować wiele - my zdecydowaliśmy się na taką, która pozwoli przy okazji krótko objaśnić także sens i rolę czarnych łabędzi.

Teraz jesteśmy już w stanie skonstruować długotrwałe królewskie smoki dobrze widoczne na tle reszty zdarzeń (a w tym na tle czarnych łabędzi) należących do stochastycznej, czasoprzestrzennej hierarchii zdarzeń losowych. Mianowicie, wystarczy po prostu wybrać (a nie wylosować) index j_d dużo większy od maksymalnego poziomu $j = j_{MAX}$ definiującego najdłuższe pojedyncze przemieszczenie w ramach wysymulowanej trajektorii. Właśnie ta prostota generowania długotrwałych zdarzeń superekstremalnych była jednym z ważniejszych powodów wyboru przedstawionego powyżej podejścia.

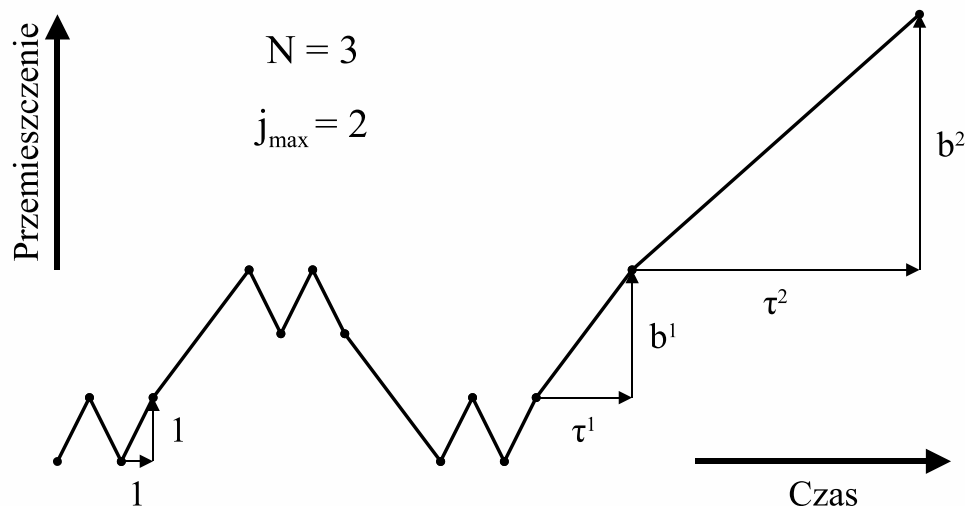
7.1.2 Hierarchiczne błędzenie losowe a zdarzenia ekstremalne

W niniejszym rozdziale pokazujemy, że (w istocie rzeczy) to czarne łabędzie rządzą hierarchicznym błędzeniem losowym. W tym celu zauważmy, że stosunek wag

$$\frac{w(j+1)}{w(j)} = \frac{1}{N} \quad (41)$$

jest niezależny od indeksu j . Oznacza to, że (średnio rzecz biorąc) przemieszczenie o numerze indeksu $j+1$ jest N razy mniej prawdopodobne od przemieszczenia o wcześniejszym numerze indeksu j . Czyli zanim wystąpi to pierwsze przemieszczenie (o indeksie $j+1$), pojawi się N tych drugich (o indeksie j).

Powyższe rozważania zilustrowano na rysunku 6 w postaci czasoprzestrzennej trajektorii składającej się z hierarchicznie (narastająco) uporządkowanych kroków (τ^j, b^j) , $j = 0, 1, 2$. Dla większej pogładowości zaniebano tutaj (na mocy prawa wielkich liczb Bernoulliego) zarówno fluktuacje wielkości kroków jak też ich kolejności. Zatem, dokonaliśmy tutaj transformacji od hierarchii stochastycznej do odpowiadającej jej hierarchii determi-



Rysunek 6: Schematyczna trajektoria hierarchicznie uporządkowanych kroków (τ^j, b^j) , dla prostoty, dla $N = 3$ i $j_{MAX} = 2$ oraz jednostkowych wartości parametrów kalibrujących $\tau_0 = 1$ i $b_0 = 1$. Oczywiście, w naszych obliczeniach przyjęliśmy $j_{MAX} \gg 1$. Zatem zdarzenie ekstremalne, czyli czarny łabędź, jest zdefiniowany w postaci pary $(\tau^{j_{MAX}}, b^{j_{MAX} j})$.

stycznej przyjmując, że ich wymiary fraktalne (samopodobieństwa) są takie same. Takie podejście ułatwi nam wyjaśnienie definicji czarnego łabędzia.

Korzystając z rysunku 6 można łatwo wyprowadzić relacje pomiędzy wielkością trajektorii a indeksem j_{MAX} charakteryzującym rozmiar zawartej w tej trajektorii struktury hierarchicznej. To właśnie indeks j_{MAX} definiuje czarnego łabędzia po prostu w postaci pary $(\tau^{j_{MAX}}, b^{j_{MAX} j})$. Dla $j_{MAX} \gg 1$, wielce charakterystyczną, najbardziej prawdopodobną wielkość kwadratu (sumarycznego) przemieszczenia można przestawić w kilku równoważnych postaciach

$$X^2 = X^2(j_{MAX}; b_0, b, N)$$

$$\begin{aligned}
&\approx (b_0)^2 \left(N^{j_{MAX}} (b^2)^0 + N^{j_{MAX}-1} (b^2)^1 + N^{j_{MAX}-2} (b^2)^2 + \dots + N^0 (b^2)^{j_{MAX}} \right) \\
&\approx (b_0)^2 N^{j_{MAX}} \frac{(b^2/N)^{j_{MAX}+1} - 1}{b^2/N - 1} \\
&\approx (b_0)^2 \begin{cases} \frac{1}{1-N/b^2} (b^2)^{j_{MAX}}, & \text{for } b^2/N > 1 \\ \frac{1}{1-b^2/N} N^{j_{MAX}}, & \text{for } b^2/N < 1 \end{cases} \quad (42)
\end{aligned}$$

lub

$$X^2 \approx (b_0)^2 \begin{cases} \frac{(1-1/N)^{2/\beta}}{1-1/N^{2/\beta-1}} L^{2/\beta}, & \text{for } \beta < 2 \\ \frac{1-1/N}{1-b^2/N} L, & \text{for } \beta > 2 \end{cases} \quad (43)$$

jak też

$$X^2 \approx \begin{cases} \frac{1}{1-1/N^{2/\beta-1}} (x_{MAX})^2, & \text{for } \beta < 2 \\ \frac{1-1/N}{1-N^{2/\beta-1}} L, & \text{for } \beta > 2 \end{cases} \quad (44)$$

dzięki temu, że pojedyncze kroki są nieskorelowane, ich całkowita liczba dana jest wzorem

$$\begin{aligned}
L = L(j_{MAX}; N) &\approx N^{j_{MAX}} + N^{j_{MAX}-1} + N^{j_{MAX}-2} + \dots + N^0 \\
&\approx \frac{1}{1-1/N} N^{j_{MAX}}. \quad (45)
\end{aligned}$$

a pojedyncze przemieszczenie czarnego łabędzia jest postaci $x_{MAX} = b_0 b^{j_{MAX}}$. Marginalny przypadek $\beta = 2$ nie jest tutaj rozważany. Widać, że dla $\beta < 2$, tzn. dla przypadku gdy X^2 skaluje się z L zgodnie z prawem potęgowym (tutaj o wykładniku $2/\beta$) otrzymujemy, że X^2 jest całkowicie określone przez x_{MAX}^2 , czyli przez kwadrat elementarnego przemieszczenia zdarzenia ekstremalnego. **Jest to właśnie ten wynik o który nam chodziło.** Przy okazji zauważmy, że dla $1 < \beta < 2$, funkcja autokorelacji VAF maleje

potęgowo z L (dla dużych wartości L), tzn.

$$VAF(L) \sim \frac{1}{L^{2(1-1/\beta)}}. \quad (46)$$

Tak więc, w przypadku $\beta < 2$, pod nieobecność zdarzeń superekstremalnych, światem błędzeń hierarchicznych rządzi zdarzenia ekstremalne.

Zgodnie z oczekiwaniami, dla ruchów Browna (tzn. dla przypadku $\beta > 2$ i asymptotycznie dużej wartości j_{MAX} w wyrażeniach (42), (43) i (44)) czynnik poprzedzający L w wyrażeniu (43) równa się, w zasadzie, temu obecnemu w wyrażeniu (8). Pominięcie tutaj cyfry 2 wynika tylko z braku fluktuacji międzytransakcyjnych przedziałów czasu.

Teraz jesteśmy już gotowi aby udzielić odpowiedzi na pytanie o **rozkład pojedynczych przemieszczeń** $|x| = b_0 b^j$ **procesu**. Odpowiedź wymaga po prostu zamiany zmiennej j na $|x|$ w rozkładzie $w(j)$, który jest dany wyrażeniem (3). Dzięki temu uzyskujemy pokrewny (unormowany) rozkład

$$\tilde{w}(|x|) \approx \frac{1}{b_0} \frac{\beta}{(|x|/b_0)^{\beta+1}}, \quad (47)$$

gdzie; $|x| \geq b_0$; powyższa formuła jest, *de facto*, słuszna dla $|x| \gg b_0$ (bo- wiew wtedy zmienną j można traktować jak zmienną ciągłą). Jak wiadomo [38, 28], potęgowy rozkład zdarzeń prowadzi do rozkładu Fréchet’a zdarzeń ekstremalnych. Dla asymptotycznie dużych wartości argumentu rozkład ten zachowuje wspomniane prawo potęgowe o tym samym wykładniku Pareto ale dodatkowo pojawia się czynnik korekcyjny (do tego prawa skalowania) zanikający potęgowo z wykładnikiem o 1 niższym. Zauważmy, że rozkład (47) jest słuszny dla dowolnej wartości wykładnika β

Z wyrażeń (43) i (44) wypływają dwa ważne wnioski. Mianowicie, **jeżeli**

rozmiar błędzenia losowego (tutaj, przykładowo, najbardziej prawdopodobna wartość kwadratu przemieszczenia) **skaluje się z liczbą kroków według jakiegoś prawa potęgowego, tzn. jeżeli mamy do czynienia z jakimś fraktalnym (ułamkowym) błędzeniem losowym, wtedy wspomniany rozmiar jest całkowicie wyznaczony przez wielkość czarnego łąbiedzia.** W przeciwnym razie dominują (standardowe) ruchy Browna i nie obserwuje się jakiegokolwiek wpływu czarnych łąbiedzi. **Właśnie w taki sposób przejawia się progowy charakter wpływu czarnych łąbiedzi na struktury hierarchiczne.**

Dodajmy teraz, że **jeżeli z jakichkolwiek powodów pojawi się zdarzenie o indeksie j_d znacznie większym od j_{MAX} , wtedy możemy powiedzieć, że w układzie pojawił się długotrwały królewski smok.** Do zagadnienia występowania zdarzeń superekstremalnych przechodzimy w kolejnym rozdziale.

7.2 Porównanie przewidywań formalizmu teoretycznego z wynikami symulacji

W niniejszym rozdziale rozważamy, dla przykładu, bazowe błędzenie losowe w postaci fraktalnego ruchu Browna. Oznacza to, że rozważamy wybrany obszar dyfuzyjnego diagramu fazowego zdefiniowany np. za pomocą wykładnika $1/\beta$ jedynie trochę mniejszego od $1/\alpha$. Zauważmy, że nierówność $1/\beta < 1/\alpha$ jest równoważna $v < 1$, co oznacza, że prędkość błędzenia losowego maleje z indeksem j (poziomem czasoprzestrzennej hierarchii). W takim przypadku każdy skończony moment sumarycznego (wielokrokowego) przemieszczenia jest, dla skończonego czasu, ograniczony [33, 34]. Taki wybór jest motywowany tym, że w rzeczywistości każdy tego typu moment zbudowany na skończonym (w czasie) szeregu czasowym jest zawsze ograni-

czony. Inne wybory, dotyczące innych faz dyfuzyjnych są także warte zbadania.

Dodajmy, że zdarzenia superekstremalne zostały przez nas włożone *ręcznie* do wnętrza szeregu czasowego w taki sposób aby spełniona była konieczna nierówność $\Delta t_{MAX} \ll t_L, t_R$. Dlatego jesteśmy zmuszeni traktować te zdarzenia jak endogeniczne.

7.2.1 Wyniki dla długotrwałego zdarzenia superekstremalnego

Rozważamy przypadek, gdy czynnik stojący przed v_d^2 w równaniu (27) jest dodatni. Oznacza to, że mamy do czynienia z nierównością $\frac{\Delta t}{t_{tot}} < \gamma_d \left(1 - \frac{\gamma_d}{1 - \Delta t/t_{tot}}\right)$, tylko trochę mocniejszą od $\frac{\Delta t}{t_d} < 1$, potrzebną przecież do wyprowadzenia naszego wyrażenia na $C_d(\Delta t)$ w obecności długotrwałego królewskiego smoka.

W zbiorczej tabeli 1 przedstawiono nieunormowane statystyki poziomów czasoprzestrzennej hierarchii, $S(j)$, (w postaci odwróconych piramid) indeksowanych za pomocą $j = 0, 1, 2, \dots, 12$. Otrzymano je w ramach procesu WM-CTRW dla czterech trajektorii o jednakowych wartościach parametrów sterujących $\tau_0 = 1$, $\tau = 2,520$, $v_0 = 1$, $v = 0,992$ i $N = 4$ oraz $b_0 = v_0 \tau_0 = 1$, $b = v \tau = 2,50$. Na przykład, na przecięciu wiersza numerowanego indeksem $j = 3$ oraz drugiej kolumny umieszczona jest liczba (tutaj równa 809231) mówiąca ile razy zdarzenie o indeksie $j = 3$ pojawiło się w symulowanej trajektorii.

Zauważmy, że każda trajektoria zawiera tylko jednego długotrwałego królewskiego smoka. Kolejne trajektorie (kolumny od drugiej do piątej) zawierają coraz większego królewskiego smoka zdefiniowanego, odpowiednio, za pomocą rosnącej wartości $j_d = 13, 15, 17, 19$. Liczby te są, oczywiście większe od maksymalnej wartości indeksu $j = 12$, będącego wspólnym wierz-

Tablica 1: Cztery nieunormowane statystyki $S(j)$ (odwrócone piramidy) hierarchii poziomów (indeksów) j dla czterech zdarzeń superekstremalnych o różnej wielkości j_d .

Poziom j	$S(j): j_d = 13$	$S(j): j_d = 15$	$S(j): j_d = 17$	$S(j): j_d = 19$
0	51763445	51439530	49410801	36182538
1	12948042	12866869	12360063	9049915
2	3234819	3214452	3087567	2260332
3	809231	804047	772246	565401
4	202591	201289	193303	141499
5	50583	50521	48326	35374
6	12773	12704	12211	8895
7	3162	3141	3012	2212
8	811	801	765	565
9	192	191	181	128
10	48	47	43	29
11	6	6	6	4
12	5	5	4	3
13	1	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	1	0	0
16	0	0	0	0
17	0	0	1	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	1

chołkiem wszystkich piramid. Za pomocą pogrubionych jedynek, umieszczonych pojedynczo w każdej kolumnie od drugiej do piątej powyżej wiersza o indeksie $j = 12$, oznaczono długotrwałe królewskie smoki. Jak widać, oddalają się one od wspólnego wierzchołka piramid, co wynika z ich wzrastającej wielkości. Dodajmy jeszcze, że czas trwania, t_d , jakiegokolwiek spośród tych zdarzeń superekstremalnych wynosi τ^{j_d} zamiast $-\tau^{j_d} \ln(1 - R)$. W ten sposób pozbywamy się niekontrolowanej liczby losowej R , czyniąc czas trwania określony jedynie za pomocą jednej zmiennej j_d (patrz rozdz. 7.1.1). Odpowiada to, po prostu, przejściu od losowego do średniego czasu

trwania królewskiego smoka.

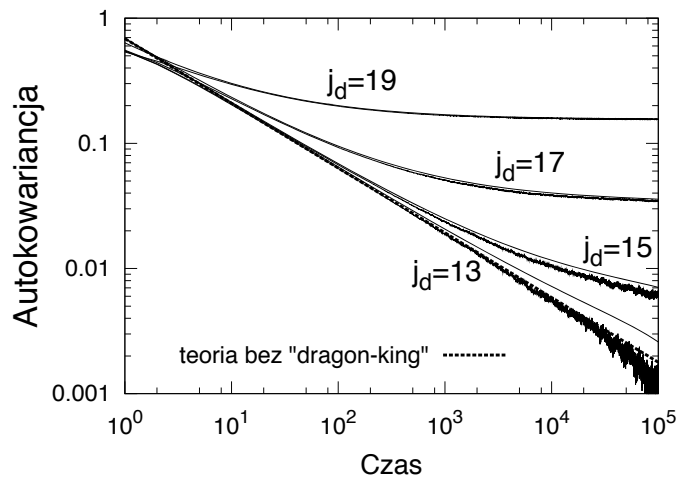
Podkreślmy, że ta część każdej trajektorii, jaka znajduje się na lewo od długotrwałego królewskiego smoka jest taka sama dla wszystkich trajektorii.

Co więcej, całkowita długość każdej z trajektorii, t_{tot} , jest także taka sama.

Zatem, przedział czasu t_R szeregu czasowego znajdującego się za długotrwałym królewskim smokiem maleje odpowiednio ze wzrostem t_d . Przejawia się to w postaci malejącej statystyki poziomów $S(j)$. Na przykład, w wierszu indeksowanym $j = 9$, w kolumnach od drugiej do piątej, znajdują się liczby malejące 192, 191, 181, 128; podobnie rzecz się ma z pozostałymi wierszami tabeli.

Na rysunku 7 porównano przewidywania formuły (27) (cienkie, ciągłe linie) z wynikami symulacji (grube ciągłe linie) dla czterech wartości t_d a mianowicie $t_d/\Delta t_{MAX} = 1,653; 10,496; 66,651; 423,263$, które odnoszą się, odpowiednio, do $j_d = 13, 15, 17, 19$. Zwróćmy uwagę, że chwilowe okno czasowe Δt rozciąga się od $\Delta t = dt$ do $\Delta t = \Delta t_{MAX} = 10^5 dt$ z krokiem dyskretyzacji $dt = 1$, przy czym całkowita długość szeregu czasowego z jaką mamy tutaj do czynienia jest ustalona i wynosi $t_{tot} = 1400 \Delta t_{MAX}$, będąc jednakową dla wszystkich czterech statystyk $S(j)$ przedstawionych w tabeli 1.

Odchylenie krzywych (zarówno teoretycznych jak i pochodzących z symulacji) na rysunku 7 ku górze (pozytywne) jest bezpośrednim skutkiem pojawienia się długotrwałego zdarzenia superekstremalnego. Według naszych oczekiwań, zgodność pomiędzy przewidywaniami teoretycznymi (formuła (27)) a wynikami symulacji (przedstawiona na tym rysunku) jest tym lepsza im bardziej długotrwałe jest to zdarzenie, czyli im wyżej lokuje się t_d w stosunku do wierzchołka hierarchii czasoprzestrzennych przedstawionych w tabeli 1 (patrz lokalizacja pogrubionej jedyinki). Innymi słowy, krzywe

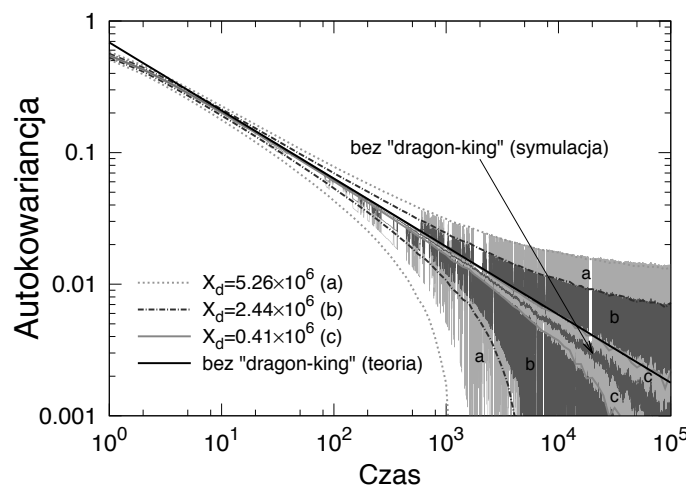


Rysunek 7: Porównanie przewidywań formuły (27) (cienkie, ciągłe linie) z wynikami statystycznych symulacji numerycznych (ciągłe, grube linie) dla czterech różnych wartości stosunku charakterystycznych czasów $t_d/\Delta t_{MAX} = 1,653; 10,496; 66,651; 423,263 [\times 10^5]$, które odnoszą się, odpowiednio, do $j_d = 13, 15, 17, 19$. Linie przerywaną otrzymano na podstawie wzoru (11), czyli pod nieobecność królewskiego smoka. Wszystkie krzywe były wyznaczone dla tych samych wartości parametrów sterujących $\tau = 2.52$, $v = 0.992$ oraz $N = 4$. Zwróćmy uwagę, że przewidywania teoretyczne dla $j_d = 17$ i 19 są prawie nierozróżnialne (w ramach zdolności rozdzielczej wykresu) od odpowiadających im wyników symulacji, w całym dostępnym przedziale czasu $dt \leq \Delta t \leq \Delta t_{MAX}$. Jak widać, obecność długotrwałego królewskiego smoka odchyła krzywe od linii prostej (w skali log – log) tym bardziej im bardziej długotrwałe jest zdarzenie superekstremalne.

teoretyczne zdefiniowane za pomocą j_d mniejszych od 19 stosunkowo nieznacznie różnią się od swoich *empirycznych* odpowiedników. Oczywiście, wielkość $C(\Delta t)$ sterowana jedynie obecnością czarnych łabędzi (czyli pod nieobecność królewskiego smoka), dana wyrażeniem (11), została również przedstawiona na rysunku 7 (w postaci linii przerywanej) jako wynik odniesienia (referencyjny).

7.2.2 Wyniki dla zdarzenia superekstremalnego typu szoku

Na rysunku 8 przedstawiono wyniki symulacji funkcji autokorelacji $C_d(\Delta t)$ dla trzech różnych wartości szoku $X_d/X_{MAX} = 1.90; 11.3; 24.4$, gdzie X_{MAX} jest maksymalną *przestrzenną* wartością przemieszczenia w pojedynczym kroku błędzenia losowego, należąca do symulowanej czasoprzestrzennej hierarchii, niezawierającej zdarzenia superekstremalnego.



Rysunek 8: Porównanie przewidywań formuły (48) (linie: kropkowane, przerywane kropkami oraz szare ciągłe) z wynikami symulacji (odpowiednie obszary o różnym stopniu szarości ulokowane pomiędzy wspomnianymi liniami) oznaczone dodatkowo (odpowiednio) literami a, b, oraz c dla trzech różnych wartości skoku $X_d = 0.41, 2.44, 5.26 [\times 10^6]$. Czarna linia ciągła jest przewidywaniem wynikającym z formuły (11), czyli pod nieobecność zdarzenia superekstremalnego w postaci szoku. Odpowiadający tej linii wynik uzyskany na drodze symulacji jest przedstawiony za pomocą najbardziej wewnętrznego, ciemnego, rozszerzającego się obszaru. Podobnie jak dla długotrwałego zdarzenia superekstremalnego, wszystkie krzywe otrzymano dla wspólnych wartości parametrów $\tau = 2, 52$; $v = 0, 992$ and $N = 4$.

Należy zauważyć, że wszystkie rozważane tutaj szoki mają charakter egzogeniczny, gdyż wzięto je spoza czasoprzestrzennej hierarchii szeregów czasowych. Symulowane szeregi czasowe mają, podobnie jak w poprzed-

nim przypadku, długość $t_{tot} = 1400 \Delta t_{MAX}$ i są identyczne za wyjątkiem samego szoku.

Uderzającą cechą symulowanych funkcji autokorelacji prędkości jest ich rozrzut sugerujący pojawienie się jakiejś niestabilności. Dlatego wygodnym uproszczeniem jest zmodyfikowanie formuły (35) tak aby mieć do czynienia jedynie z obwiednią tego rozrzutu. Tego typu formułę można uzyskać np. poprzez zamianę sumy prędkości chwilowych $v_L + v_R$ występującej w tej formule na jej dyspersję $\sigma = \sqrt{\langle (v_L + v_R)^2 \rangle} = \sqrt{2} \sqrt{\sigma_v^2 + C(2\Delta t)}$, gdzie $\sigma_v^2 = \langle v_L^2 \rangle = \langle v_R^2 \rangle$ ponieważ założyliśmy upraszczająco, że szok nie zmienia charakteru błędzenia losowego ani przed ani za szokiem.

Opracowana przez nas metodologia umożliwia także bardziej realistyczne podejście, gdy np. dyspersja *empiryczna* jest jedynie ułamkiem zdefiniowanej powyżej dyspersji σ . Zatem, w dalszym ciągu proponujemy bardziej elastyczną formułę postaci

$$C_d(\Delta t) = C(\Delta t) \pm \sqrt{2} \sigma_f \frac{X_d}{t_{tot} - \Delta t} - \left(\frac{X_d}{t_{tot} - \Delta t} \right)^2, \quad (48)$$

gdzie $\sigma_f \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{f\sigma_v^2 + C(2\Delta t)}$, przy czym czynnik fenomenologiczny $0 < f \leq 1$, jest wspólny dla wszystkich trajektorii. Właśnie porównanie przewidywań tej formuły z wynikami odpowiadających im symulacji przedstawiono na rysunku 8. Widoczne są jedynie niewielkie różnice dla przyjętej (najlepszej) wartości $f = 0.30$ pomimo, że rozproszenie danych *empirycznych* rośnie ze wzrostem stosunku X_d/t_{tot} . Zasadniczym powodem zauważalnych odstępstw przewidywań teoretycznych od wyników symulacji jest pojawienie się spontanicznego trendu, będącego artefaktem wynikającym z istnienia fluktuacji oraz ze skończonej długości analizowanego szeregu czasowego.

Zauważmy, że jest możliwe dalsze uproszczanie wyrażenia (48) do postaci

$$C_d(\Delta t) = C(\Delta t) \pm \sqrt{2} \sigma_f \frac{X_d}{t_{tot}} - \left(\frac{X_d}{t_{tot}} \right)^2, \quad (49)$$

o ile spełniona byłaby silna ale usprawiedliwiona nierówność $\Delta t_{MAX}/t_{tot} \ll 1$.

8 Wnioski i krótkie podsumowanie

W niniejszym Raporcie przedstawiliśmy oryginalną metodologię oraz wstępne wyniki badań uzyskane na drodze analitycznej oraz symulacji komputerowych zależnej od czasu autokowariancji prędkości procesu stochastycznego, charakteryzującej (jak wiadomo) statystyki drugorzędowe. Statystyki te są szczególnie wrażliwe na obecność różnorodnych fluktuacji, dysypacji i korelacji w układzie. Zbadaliśmy:

- (1) na drodze analitycznej wpływ dwóch charakterystycznych rodzajów zdarzeń superekstremalnych, czyli długotrwałego królewskiego smoka oraz królewskiego smoka w postaci szoku, na zależną od czasu autokowariancję prędkości bazowego procesu stochastycznego; przy czym na tym etapie zakładaliśmy jedynie, że proces bazowy jest stacjonarny w sensie słabym [19] (natomiast o ergodyczności procesu stochastycznego niczego nie zakładaliśmy).
- (2) Zbadaliśmy na drodze statystycznych symulacji numerycznych (czyli metodą Monte Carlo), że wspomniany powyżej wpływ w istotny sposób zmienia swobodne autokowariancje prędkości procesu, tutaj symulowane przykładowo w ramach formalizmu hierarchicznego błędzenia losowego w czasie ciągłym Weierstrassa-Mandelbrota. Wspomniany wpływ, zasadniczo różny dla obu rodzajów królewskich smoków, został przedstawiony na rysunkach 7 i 8. Jak widać, otrzymane zgodności pomiędzy przewidywaniami uzyskanych przez nas formuł teoretycznych (27) i (48) a wynikami empirycznymi są całkiem dobre, przy czym powody niewielkich odstępstw są dobrze rozumiane.
- (3) Co więcej, w ramach naszego podejścia powstało szereg pośrednich formuł (np. (20), (23) i (33)) na funkcję $C_d(\Delta t)$ gotowych do zasto-

sowania w ogólniejszych sytuacjach (niż analizowane tutaj). Na przykład,

- (a) gdy pojawienie się zdarzenia superekstremalnego zmienia charakter błędzenia losowego, np. gdy błędzenie po ustaniu tego zdarzenia jest już scharakteryzowane innymi wartościami parametrów,
- (b) gdy przez cały czas trwania procesu stochastycznego mamy do czynienia z błędzeniem losowym w obecności dryfu,
- (c) gdy w stosunkowo niewielkim przedziale czasu pojawia się więcej niż jeden rodzaj zdarzenia superekstremalnego (efekt możliwego klastrowania się zdarzeń superekstremalnych),

Jak widać na rysunku 7, pojawienie się długotrwałego królewskiego smoka wyprowadza układ ze stanu rządzonego przez czarne łabędzie. Istnienie długotrwałego królewskiego smoka jest sygnalizowane poprzez wyraźne, dodatnie odchylenie czasowego przebiegu autokowariancji od linii prostej (w skali logarytmiczno-logarytmicznej). Wykazaliśmy (patrz wzór (29) oraz rys. 7), że autokowariancja nie zanika w czasie, wprowadzając tym samym jakieś uporządkowanie dalekiego zasięgu wywołane prędkością dryfu królewskiego smoka. W tym sensie możemy mówić o nieliniowym wpływie wspomnianego dryfu na własności układu, porządkującym go. To długotrwałe ale skończone w czasie działanie królewskiego smoka na trwałe zmienia charakter ewolucji układu. Możemy przypuszczać, że mamy tutaj do czynienia z przemianą fazową typu nieporządek-porządek, czyli przejściem układu pomiędzy wspomnianymi powyżej stanami (zanikającej i nieznikającej autokowariancji). To nieznikanie autokowariancji jest zasadniczą cechą odróżniającą autokowariancję w obecności długotrwałego zdarzenia super-

ekstremalnego od tej obliczonej pod jego nieobecność. Zatem, różnica ta dostarcza narzędzia umożliwiającego ilościowe wykrywanie długotrwałego zdarzenia superekstremalnego zarówno w symulowanych jak też empirycznych szeregach czasowych.

Rysunek 8 pokazuje, że również zdarzenia superekstremalne w postaci szoków zasadniczo zmieniają przebieg czasowy autokowariancji prędkości procesu, $C(\Delta t)$, ale zupełnie inaczej niż długotrwałe zdarzenia superekstremalne. Zresztą widać, że obie formuły (27) i (48) są istotnie różne. Wykres na rysunku 8 wyraźnie wskazuje, że nawet najprostszy szok (niezmieniający charakteru błędzeń losowych przed i po szoku) wprowadza do układu niestabilność przejawiająca się w postaci wahań o ogromnej amplitudzie, niezależnie od miejsca usytuowania szoku. Zatem, jeżeli obserwujemy tego typu przebieg autokowariancji prędkości procesu, $C_d(\Delta t)$, w czasie to możemy przypuszczać, że badany szereg czasowy zawiera królewskiego smoka w postaci szoku. Innymi słowy, funkcję $C_d(\Delta t)$ można traktować jak czuły, ilościowy detektor tego typu szoków.

Podsumowując można powiedzieć, że możliwe jest zaobserwowanie na rynku finansowym zjawiska polegającego na tym, że jedno jedyne zdarzenie jest w stanie znacząco zakłócić przebieg procesu stochastycznego, tzn. w istotny sposób zmienić jego długookresowe (długoczasowe) własności np. czasowy przebieg autokowariancji. Tego typu wpływ może zaistnieć (odłożyć się) nawet wtedy, gdy lokalizacja zdarzenia superekstremalnego ma miejsce na wczesnym etapie ewolucji układu. Wspomniane zjawisko może być groźne np. dla stabilności układu wprowadzając go w oscylacje o ogromnej amplitudzie lub tworząc jakieś trwałe struktury, czyli stany istotnie różne od wyjściowych. Tego typu zjawiska nie były dotychczas badane pomimo, że ich rola jest ogromna, wprost trudna do przecenienia.

Na zakończenie niniejszego Raportu pragniemy zaznaczyć, że w drugim etapie Projektu przewidujemy zastosowanie naszej metodologii do analizy danych empirycznych, np. kursu wymiany EUR/USD oraz PLN/EUR, zawierających jak się wydaje zdarzenia superekstremalne; podejrzewamy, że zdarzającymi tymi mogły być skoki wspomnianych kursów zaobserwowane rano w poniedziałek 10 maja 2010 roku (patrz rysunek 2 w rozdz. 2) po przyznaniu przez UE i MFW finansowego pakietu pomocowego wspierającego gospodarkę Grecji.

Przy okazji planujemy zbadać, czy ma miejsce zjawisko tzw. krytycznego spowolnienia (ang. *critical slowing down*), które towarzyszy przemianom fazowym. Jest ono związane z nieograniczonym wydłużaniem się czasu relaksacji układu w miarę zbliżania się do punktu przemiany fazowej, stając się w tym punkcie osobliwym. Odpowiednio do tego wzrasta wartość absolutna funkcji autokorelacji, co czyni ją tym bardziej przydatną. Metodologia analizy tego zjawiska jest już dobrze znana [36] i stosowana także poza fizyką [47]. Dzięki temu moglibyśmy sygnalizować (z akceptowalnym błędem) pojawianie się krachu przed jego wystąpieniem, wprowadzając do naszego podejścia dobrze umotywowany element prognozowalności. Dałoby to czas realnemu układowi przynajmniej na częściową adaptację do prognozowanej sytuacji. Byłoby to alternatywne, bardziej wrażliwe od obecnie proponowanych podejście umożliwiające przynajmniej szacunkowe przewidywanie występowania krachów. Przypomnijmy, że te znane dotychczas proponowane przez ekonofizykę to: technika oscylacji logarytmiczno-periodycznych [50] wynikająca z odkrycia dyskretnego skalowania na rynkach finansowych, technika uogólnionego eksponensa Tsallisa [55] (będącego uogólnieniem rozkładu Gaussa oraz Gosseta (Studenta) [43]) oraz technika uogólnionego eksponensa Mittag-Lefflera zsuperponowanego z oscylacjami, bazująca na

hipotezie plastycznego rynku finansowego [30]. Ponadto, zamierzamy wspomagać analizę danych empirycznych za pomocą techniki dużych rozrzutów (rozproszeń, odstępstw; ang. *large deviations*) oraz gigantycznych fluktuacji (ang. *giant fluctuations*) [51].

Niniejszy Projekt ma szansę otworzyć nadzwyczaj ważną tematykę dotyczącą wpływu zdarzeń superekstremalnych na szeroko rozumiane ryzyko a także rzucić nowe światło na możliwość zastosowania teorii katastrof do analizy kryzysów i krachów na rynkach finansowych.

Literatura

- [1] S. Albeverio, V. Jentsch and H. Kantz (Eds.) *Extreme Events in Nature and Society*, Springer-Verlag, Berlin 2006.
- [2] R. Bahr and S. Hamori, *Hidden Markov Models. Applications to Financial Economics*, Advances Studies in Theoretical and Advance Econometrics, Kluwer Academic Publishers, Boston 2004.
- [3] V. S. Barbu and N. Limnios, *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: Their Use in Reliability and DNA Analysis*, Lecture Notes in Statistics Vol. 191, Springer-Verlag, Berlin 2008.
- [4] G. Bel and E. Barkai, *Weak Ergodicity Breaking in the Continuous-Time Random Walk*, Physical Review Letters **94** (2005) 240602-1 - 4.
- [5] G. Bel and E. Barkai, *Random Walk to a nonergodic equilibrium concept*, Physical Review E **73** (2006), 016125-1 - 14.
- [6] D. ben-Avraham and Sh. Havlin, *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.
- [7] J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications*, Physics Reports **195**(4 & 5) (1990) 127-293.
- [8] J. -P. Bouchaud, M. Potters, *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001.
- [9] P. J. Brockwell, R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, Berlin 1991.

- [10] A. Bunde and Sh. Havlin (Eds.), *Fractals and Disordered in Science. Second Revised and Enlarged Edition*, Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [11] A. Bunde and Sh. Havlin (Eds.), *Fractals in Science*, Springer-Verlag, Berlin 1995.
- [12] J. Y. Campbell, A. W. Lo, A. C. MacKinlay, *The econometrics of Financial Markets*, Princeton Univ. Press, 1997.
- [13] P. Embrechts, C. Klüppelberg, Th. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin 1997.
- [14] *Engineering Statistical Handbook*, National Institute of Standards and Technology (2007).
- [15] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, J. Wiley & Sons, Inc., New York 1966.
- [16] W. A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, J. Wiley & Sons, Inc., USA and Canada 1974.
- [17] S. Galluccio, G. Caldarelli, M. Marsili, Y. -C. Zhang, *Scaling in currency exchange*, Physica A 245 (1997) 423-436.
- [18] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer Science + Business Media, LLC, New York 2004.
- [19] J. W. Goodman, *Optyka statystyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [20] T. Gubiec and R. Kutner, *Backward jump continuous-Time random walk: An application to market trading*, Physical Review E **82** (2010), 046119-1–10.

- [21] T. Gubiec, R. Kutner, T. R. Werner, and D. Sornette, *Super-extreme event's influence on a Weierstrass-Mandelbrot Continuous-Time Random Walk in Power Laws in Natural and Social Systems and Beyond*, The European Physical Journal - Special Topics, (2011), w druku.
- [22] J. Haus and K.W. Kehr, *Diffusion in Regular and Disordered Lattices*, Physics Reports **150**(5 & 6) (1987) 263-406.
- [23] Sh. Havlin and D. ben-Avraham, *Diffusion in disordered media*, Advances in Physics **36**(6) (1987) 695-798.
- [24] P. Jaworski, J. Micał, *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa 2005.
- [25] P. Jäckel, *Monte Carlo Methods in Finance*, J. Wiley & Sons Ltd, New York 2002.
- [26] Ph. Jorion, *Value at Risk. The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 2007.
- [27] P. Kosewski, R. Kutner *Wykrywanie zdarzeń ekstremalnych w finansowych szeregach czasowych w Nowe zjawiska na rynku finansowym*, T. Gruszeński, J. Bednarz (red.), Wydawnictwo KUL, Lublin 2011, w druku.
- [28] M. Kozłowska and R. Kutner, *Anomalous transport and diffusion versus extreme value theory*, Physica A **357** (2005) 282-304.
- [29] M. Kozłowska, T. Gubiec, R. Kutner, and Z. Struzik, *Empirical symptoms of catastrophic slowing down on financial markets*, in preparation.
- [30] M. Kozłowska and R. Kutner, *Singular Dynamics of Various Macroeconomic Sectors*, Acta Phys. Pol. A **117** (4) (2010) 630-636; ci sami

- autorzy, *Modern Rheology on a Stock Market: Fractional Dynamics of Indices*, Acta Physica Polonica A **118** (4) 333-343.
- [31] R. Kutner, A. Pękalski and K. Sznajd-Weron (Eds.), *Anomalous Diffusion. From Basics to Applications*, LNP **519**, Springer-Verlag, Berlin 1999.
- [32] R. Kutner and M. Regulski: *Hierarchical spatio-temporal coupling in fractional wanderings. (II). Diffusion phase diagram for Weierstrass walks*, Physica A **264** (1999), 107-133.
- [33] R. Kutner and F. Świtłała, *Stochastic simulations of time series within Weierstrass-Mandelbrot walks*, Quantitative Finance **3** (2003) 201-211.
- [34] R. Kutner and F. Świtłała, *Study of the non-linear autocorrelations within the Gaussian regime*, The European Physical Journal B **33** (2003) 495-503.
- [35] R. Kutner, M. Kozłowska, T. Gubiec, and Z. Struzik, *Catastrophic Bifurcation on the Warsaw Stock Exchange*, contributed talk on the International Conference on Econophysics, ICE 2011, Shanghai 4-6 June 2011, <http://rce.ecust.edu.cn/index.php/en/ice2011>.
- [36] D. P. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [37] J. Leherrère and D. Sornette, *Stretched exponential distributions in nature and economy: Fat tails with characteristic scales*, The European Physical Journal B **2** (1999) 525-539.
- [38] Y. Malevergne and D. Sornette, *Extreme Financial Risks. From Dependence to Risk Management*, Springer-Verlag, Berlin 2006.

- [39] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.
- [40] G. Margolin and E. Barkai, *Nonergodicity of Blinking Nanocrystals and Other Lévy-Walk Processes*, Physical Review Letters **94** (2005) 080601-1-4.
- [41] A. Mastelarz-Kodzis, *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, 2003.
- [42] R. Metzler and J. Klafter, *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach*, Physics Reports **339** (2000) 1-77.
- [43] R. Nowak, *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo Naukowe PWN SA, Warszawa 2002.
- [44] D. Papla, K. Jajuga, *Chaos theory in financial time series analysis - some theoretical aspects and empirical results*, Dynamic Econometric Models **3** (1998), 5-15.
- [45] J. Perelló, J. Masoliver, A. Kasprzak, and R. Kutner, *Model for interevent times with long tails and multifractality in human communications: An application to financial trading*, Physical Review E **78** (2008), 036108-1-10.
- [46] G. Pfister and H. Scher, *Dispersive (non-Gaussian) transient transport in disordered media*, Advances in Physics **27**(5) (1978) 747-798.
- [47] M. Scheffer, J. Bascompte, W. A. Brock, V. Brovkin, S. R. Carpenter, V. Dakos, H. Held, E. H. van Nes, M. Rietkerk, and G. Sugihara,

- Early-warning signals for critical transitions*, Nature **461**, 3 September (2009) 53-59.
- [48] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives*, J. Wiley & Sons, 2003.
- [49] M. Shlesinger, G.M. Zaslavsky and U. Frisch (Eds.), *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, Springer-Verlag, Berlin 1995.
- [50] D. Sornette, *Why Stock Market Crash. Critical Events in Complex Financial Systems*, Princeton Univ. Press, 2003.
- [51] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Second Edition, *Springer Series in Synergetics*, Springer-Verlag, Heidelberg 2004.
- [52] D. Sornette, *Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises*, *International Journal of Terraspace Science and Engineering* **2**(1) (2009) 1-17.
- [53] M. S. Taqqu, V. Teverowsky and W. Willinger: *Estimators for long-range dependence: an empirical study*, *Fractals* **3** (1995) 785-798.
- [54] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis. An Outline of a General Theory of Models*, Benjamin, London 1975.
- [55] C. Tsallis, *Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics - An overview after 20 years*, *Brazilian Journal of Physics* **39** (2009) 337-356.
- [56] T. R. Werner, T. Gubiec, R. Kutner, and D. Sornette, *Modeling of Dragon-Kings*, contributed talk on the International Con-

ference on Econophysics, ICE 2011, Shanghai 4-6 June 2011,
<http://rce.ecust.edu.cn/index.php/en/ice2011>.

- [57] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictw Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
- [58] D. Witowska, A. Matuszewska, K. Kompa, *Wprowadzenie do ekonometrii dynamicznej i finansowej*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2008.
- [59] Z. Zieliński (red.), *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2007.