MATERIAŁY I STUDIA

Zeszyt nr 269

Zastosowanie metody badania wpływu zdarzeń ekstremalnych i superekstremalnych na stochastyczną dynamikę szeregów czasowych do analizy wybranych kursów walutowych w świetle spodziewanego wejścia Polski do strefy euro

Tomasz Gubiec, Ryszard Kutner, Tomasz Werner

Warszawa, 2012 r.

Tomasz Gubiec, Ryszard Kutner, Tomasz Werner – Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa

Pragniemy złożyć podziękowania dr Marzenie Kozłowskiej za pomoc w przygotowaniu ostatecznej wersji niniejszego Raportu.

Projekt badawczy został zrealizowany w ramach konkursu Komitetu Badań Ekonomicznych NBP na projekty badawcze przeznaczone do realizacji przez pracowników NBP i osoby spoza NBP oraz finansowane ze środków Narodowego Banku Polskiego.

Pierwszy raport z realizacji powyższego projektu – pt. *Opracowanie metody badania wpływu zdarzeń ekstremalnych i superekstremalnych na stochastyczną dynamikę szeregów czasowych* – opublikowano w 2011 r. (Materiały i Studia NBP, zeszyt nr 259).

Projekt graficzny:
Oliwka s.c.

Skład i druk:
Drukarnia NBP

Wydał:
Narodowy Bank Polski
Departament Edukacji i Wydawnictw
00-919 Warszawa, ul. Świętokrzyska 11/21
tel. 22 653 23 35, fax 22 653 13 21

ISSN 2084-6258

Materiały i Studia są rozprowadzane bezpłatnie

Dostępne są również na stronie internetowej NBP: http://www.nbp.pl

Spis treści

Spis rysunków

Streszczenie

Ze względu na swoją ogromną wagę, zagadnienie rozpoznawania sygnałów ostrzegających przed kryzysami i krachami (ang. *early-warning sygnals*) na rynkach finansowych oraz ich właściwa analiza jest jednym z głównych przedmiotów zainteresowania zarówno badaczy tych rynków jak też (co oczywiste) uczestników gry rynkowej oraz szerokiej opinii publicznej. Warto dodać, że tego typu sygnały ostrzegawcze były ostatnio identyfikowane oraz klasyfikowane jako przejaw zjawiska katastroficznej bifurkacji (ang. *catastrophic bifurcation*, CB). Jednakże, dotyczyły one przede wszystkim ewolucji ekosystemów, dynamiki zmian klimatycznych a w medycynie ataków padaczkowych czy też ataków astmy. Wykorzystanie teorii katastrof Réne Thoma (której CB jest jednym z najistotniejszych elementów) do analizy rynków finansowych poprzez identyfikację jej empirycznych symptomów, przede wszystkim dla wciąż trwającego światowego kryzysu finansowego, jest głównym celem niniejczej, II Części Raportu. Tego typu podejście do rynków finansowych ma charakter nowatorski dostarczając atrakcyjnej metodologii badawczej.

JEL: C02, C15, G01

Słowa kluczowe: teoria katastrof, prawo potęgowe, nieciągła przemiana fazowa, zjawiska krytyczne, katastroficzne (krytyczne) spowolnienie, kryzys, krach

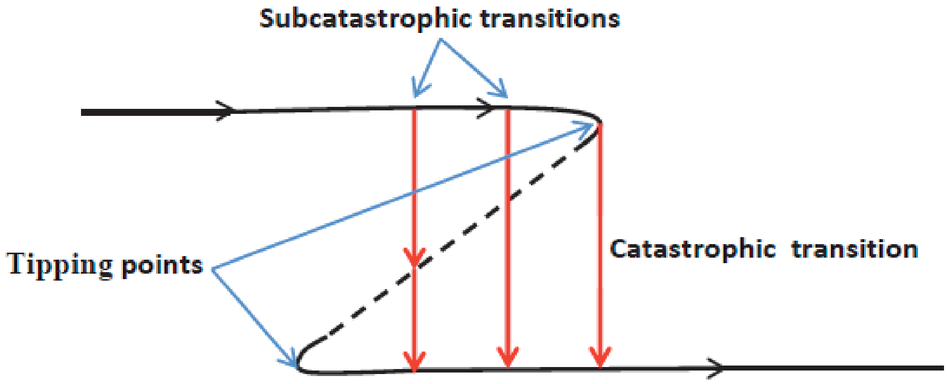
1 Wstęp

Zagadnienie obecności i identyfikacji (wyprzedzających) sygnałów ostrzegających (prekursorów) przed kryzysami i krachami w tak złożonych systemach jak rynki finansowe, fascynuje zarówno badaczy, jak też (z oczywistych powodów) uczestników gry rynkowej, a także szeroką opinię publiczną [34]. W tym kontekście, interdyscyplinarne i wielokierunkowe podejście wydaje się być usprawiedliwione i szczególnie obiecujące. W tego typu podejście wpisuje się, na przykład, badanie złożoności na sposób analogiczny jak to jest czynione w szeroko rozumianej fizyce, co jest szczególnie owocne [31, 32]. Nadzwyczaj ważnym wydaje sie być tutaj badanie przemian fazowych i zjawisk krytycznych [15], [37]. Tworzą one ogólne ramy niniejszej, II Części Raportu.

Dokładniej rzecz biorąc, nasza analiza została zainspirowana badaniami w ramach ekologii, gdzie czasami ma miejsce nagła (w skali czasu charakterystycznej dla ewolucji danego ekosystemu) katastrofalna, w sensie teorii katastrof Réne Thoma [13], (skokowa) zmiana stanu rozważanego ekosystemu (ang. *catastrophic regime shifts*, CRS). To skokowe przejście ekosystemu może mieć charakter bifurkacyjny (patrz schematyczny rysunek 1), którego charakterystycznymi elementami są tzw. punkty zwrotne [38, 17] (ang. *tipping points*) i towarzysząca im nieciągłość ewolucji stanu ekosystemu. Zauważmy, iż także przed osiągnięciem punktu zwrotnego może dojść do CRS - wszystko to może być przejawem zajścia w ekosystemie przemiany fazowej pierwszego rodzaju[1] [37].

Należy podkreślić, że ostatnio pojawiła się pionierska praca [14], która traktuje system bankowy jak ekosystem zawierający ostre singularności (oso-

[1]Przykładem tego typu (przemiany) nagłej zmiany stanu może być skokowa zmiana namagnesowania magnetyka w funkcji zewnętrznego pola magnetycznego; zmiana taka była badana w mojej wcześniej pracy, w której rozważany był wpływ uporządkowania (istnienia struktury) na dyfuzję kolektywną w układzie (gazie sieciowym) [25].



Rysunek 1: Schematyczna ilustracja jednego katastroficznego (długa, pionowa strzałka wychodząca z górnego punktu zwrotnego) i dwóch subkatastroficznych przejść bifurkacyjnych. Jak widać, mogą mieć miejsce dwa rodzaje przejść subkatastroficznych. Bezpośrednie (druga długa pionowa strzałka), zachodzące pomiędzy dwoma różnymi stanami równowagi trwałej układu (stany tego typu oznaczono liniami ciagłymi), gdzie stan wyjściowy nie jest punktem zwrotnym oraz przejście pośrednie, dwustopniowe z krótkotrwałym, chwilowym przebywaniem układu w stanie równowagi nietrwałej (zaznaczone dwiema krótkimi pionowymi strzałkami ulokowanymi jedna nad drugą) - stany tego typu oznaczono linią przerywaną.

bliwości) - właśnie skokową zmianę stanu należy zaliczyć do tego typu osobliwości. Takie oryginalne podejście może dać komplementarne, bardziej pogłębione zrozumienie funkcjonowania sektora bankowego [18, 29].

Zasadniczym celem niniejszej II Części Raportu jest analiza faktów empirycznych sugerujących istnienie subkatastrofalnych (subkatastroficznych) lub katastrofalnych (katastroficznych) przejść bifurkacyjnych na rynkach finansowych. Na tej podstawie sformułowana została hipoteza dotycząca prekursorów krachów na giełdach i ich związku ze zdarzeniami superekstremalnymi zdefiniowanymi i dyskutowanymi w I Części Raportu.

Warto zaznaczyć, że znalezienie prekursorów kryzysu jest trudne [37] (oraz odnośniki literaturowe tamże), o ile w ogóle możliwe, ze względu na paradygmat arbitrażu. Paradygmat ten mówi (przypomijmy), że rynki stopniowo eliminują okazje do arbitrażu, czyli dążą do sytuacji, w której nie ma zysku bez ryzyka. Zatem, o arbitrażu (o ile w ogóle) można mówić co najwyżej jako o zjawisku relaksującym, mającym charakter fluktuacyjny.

W niniejszej II Części Raportu wykazujemy, że zagadnienie istnienia prekursorów typu katastroficznych bifurkacji prowadzi do tzw. krytycznego (katastroficznego) spowolnienia (ang. *critical slowing down*, CSD) zaobserwowanego już wcześniej w wielu układach fizycznych [30, 35]) w obszarze przemiany fazowej pierwszego rodzaju. Zagadnie istnienia CSD na rynkach finansowych to problem jasno sformułowany ale wciąż otwarty [34]. Wiadomo, że zjawisko CSD jest (jak dotychczas) wyrafinowanym indykatorem wchodzenia układu w obszar CRS [36]-[13]. Na przyklad, wyraźny wzrost wariancji zdetrendowanego sygnału a także maksymalizowanie się jednokrokowej funkcji autokorelacji, $ACF(1)$, może sygnalizować istnienie CSD. Rozważania tego typu muszą być jednak wspomagane analizą statystyczną danych empirycznych, np. po to aby wyeliminować te okresy czasu, w których mamy do czynienia z czystym procesem Wienera (ruchem Browna) zdetrendowanego sygnału.

Ogólnie mówiąc, jednym z głównych osiągnięć teorii katastrof w kontekście badań nad ekonomią wydaje się być wprowadzenie do ekonomii pojęcia złożoności. Na przykład, już tzw. katastrofy elementarne wprowadzają konieczność operowania nieliniowymi topologicznymi złożonościami (obiektami złożonymi), które wykorzystywano do nieliniowej analizy różnych sektorów gospodarki [42]-[33].

Warto zdać sobie sprawę, że na "uniwersalny" charakter wspomnianych sygnałów ostrzegawczych (prekursorów) wskazano już np. w pracy [34]. Stworzyło to racjonalne przesłanki pozwalające przypuszczać, że ich obecność (mając charakter krytyczny) nie zależy od rodzaju mikroekonomicznego (mikroskopowego) mechanizmu odpowiedzialnego za konkretny kryzys na danym rynku finansowym. Dlatego w niniejszym opracowaniu nie schodzimy na poziom jakiegoś konkretnego modelu typu mikro (mikroekonomicznego, mikroskopowego).

W niniejszym opracowaniu staramy się zidentyfikować katastrofalne przejście bifurkacyjne testując listę jego własności dla danych empirycznych dotyczących baniek giełdowych, głównie na WIG i DAX ale także i na DJIA, poprzedzających pierwsze załamanie giełdowe trwającego wciąż światowego kryzysu finansowego. Tym samym, nasza analiza obejmuje wybrane giełdy o małej, średniej i dużej kapitalizacji (patrz wykresy 2-4). Dokładniej rzecz biorąc, ograniczamy się przede wszystkim do analizy wielce interesujących obszarów uskoków indeksów (oznaczonych kołami).

Koncentrujemy się tam na analizie wąskiego piku (o szerokości nie przekraczającej jednego kwartału) zależnej od czasu wariancji zdetrendowanych sygnałów, czyli indeksów WIG, DAX i DJIA - w porównaniu z innymi pikami, mają one kształt "igieł"(patrz wykresy na rysunku 13). Analiza ta dotyczy takich charakterystycznych własności zaobserwowanych w obszarze igieł jak np.:

a) nagły silny wzrost wspomnianej powyżej zależnej od czasu (miesięcznej) wariancji oraz bimodalna struktura wariancji skumulowanej (czyli liczonej narastająco),

b) maksymalizowanie się liniowych charakterystyk takich jak jednokrokowa funkcja autokorelacji zdetrendowanego sygnału oraz współczynnik $AR(1)$,

c) rozbieżność czasu relaksacji (czyli zanikanie szybkości powrotu do stanu wyjściowego),

d) "poczerwienienie"(przesunięcie ku czewieni, czyli niskich częstotliwości) widma mocy sygnału,

e) nieznikająca, znacząca wartość skumulowanej skośności, wskazująca na obecność jakiejś nieliniowości w układzie.

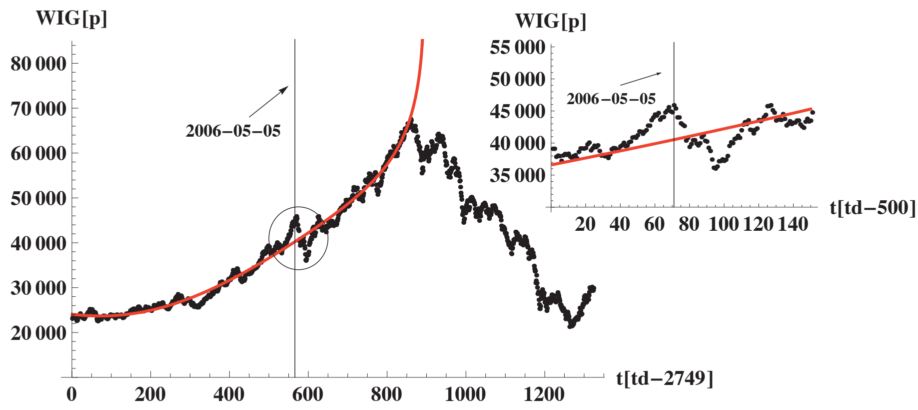
Podkreślmy, że **w niniejszym opracowaniu badamy zarówno sam zdetrendowany sygnał jak też jego szum**.

Trudności na jakie napotykamy w naszych badaniach mają różnoraki charakter. Te ogólne wynikają z faktu, że dysponujemy tylko pojedynczą realizacją procesu stochastycznego (gdyż nie możemy zreplikować rzeczywistości). Oczywiście, taka trudność jest typowa w analizie empirycznych szeregów czasowych. W naszym przypadku jest ona tym bardziej dotkliwa, że badamy zjawiska o charakterze krytycznym używając, ponadto, do tego celu szeregów czasowych o skończonej długości. Aby ruszyć z miejsca musimy przyjąć ogólną wyjściową hipotezę (którą możnaby nazwać zasadą słabej ergodyczności), że empiryczny szereg czasowy jakim dysponujmy (dane dzienne na zamknięciu) zawiera wystarczającą ilość informacji statystycznych.

Inna kluczowa trudność bierze się z faktu, że nie jesteśmy w stanie zbadać bezpośrednio efekty nieliniowe w obszarze katastrofalnego przejścia bifurkacyjnego, gdyż w obszarze tym proces stochastyczny (a dokładniej jego deterministyczna składowa) ulega linearyzacji. Jest to z jednej strony utrudnienie ale zarazem oczywiste ułatwienie, z którego w dalszej części korzystamy (o czym była już mowa powyżej w punktach a) do d)).

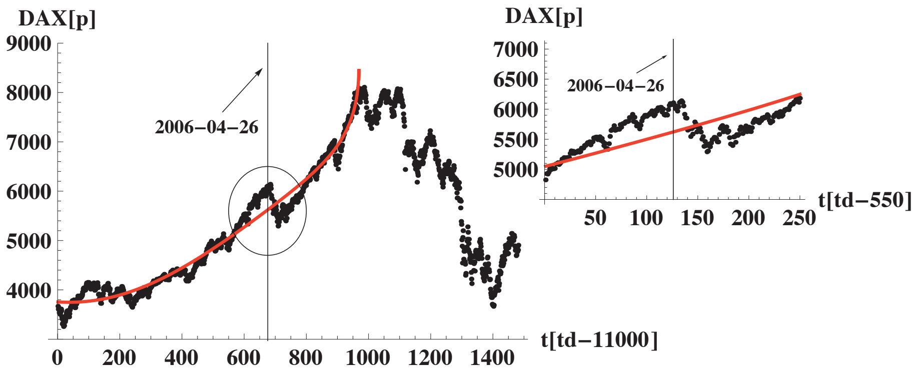
2 Analiza danych empirycznych

Jak już sygnalizowaliśmy powyżej, przykładową analizę danych empirycznych przeprowadzono dla "baniek" ("bąbli") giełdowych widocznych na indeksach WIG, DAX i DJIA dotyczących wciąż trwającego światowego kryzysu finansowego (patrz wykresy na rysunkach 2-4). Obecnie mamy do czynienia z jego kolejną fazą. Innymi słowy, wspomniane bańki giełdowe reprezentują po



Rysunek 2: Ostatni, dobrze uformowany pik WIGu (krzywa erratyczna) o początku w dniu 2004-02-06 (2480 dzień handlowy (td) na warszawskiej GPW) i końcu w dniu 2009-05-18 (4075 td). Maksimum tego piku wystąpiło w dniu 2007-07-06 (3340 td) podczas, gdy teoria przewidywała położenie maksimum w dniu 2007-08-22 (3372 td). Krzywa ciągła jest teoretycznym trendem długookresowym (wieloletnim) [21] dopasowanym do hossy (czyli do danych empirycznych stanowiących lewe zbocze piku). Pionowa linia przerywana określa położenie lokalnego maksimum związanego z największym uskokiem indeksu zaobsewowanym na lewym zboczu w dniu 2006-05-05. Powiększenie fragmentu zawierającego ten uskok zamieszczono w prawym górnym rogu rysunku.

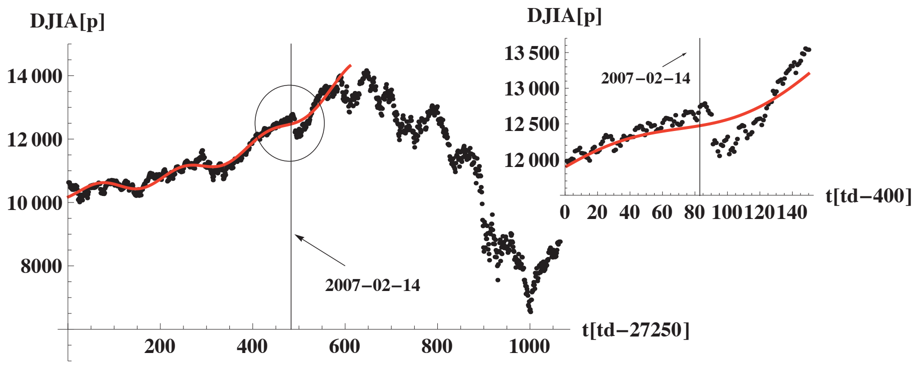
prostu lewe zbocza dobrze uformowanych pików, charakterystyczne dla giełd o małej, średniej a także dużej kapitalizacji. Wydaje sie, że przynajmniej piki



Rysunek 3: Ostatni, dobrze uformowany pik DAXa (krzywa erratyczna) o początku w dniu 2003-09-04 (11001 dzień handlowy (td) frankfurckiej GPW) i końcu w dniu 2009-07-01 (12482 td). Maksimum tego piku pojawiło sie w dniu 2007-07-13 (11985 td) podczas gdy teoria przewidywała pojawienie się maksimum w dniu 2007-07-17 (11989 td). Krzywa ciągła jest teoretycznym trenden długookresowym (wieloletnim) [21] dopasowanym do hossy (czyli do danych tworzących lewe zbocze piku). Pionowa linia przerywana określa położenie lokalnego maksimum związanego z największym uskokiem indeksu zaobserwowanym na lewym zboczu w dniu 2006-04-26. Powiększenie fragmentu zawierającego ten uskok zamieszczono w prawym górnym rogu rysunku.

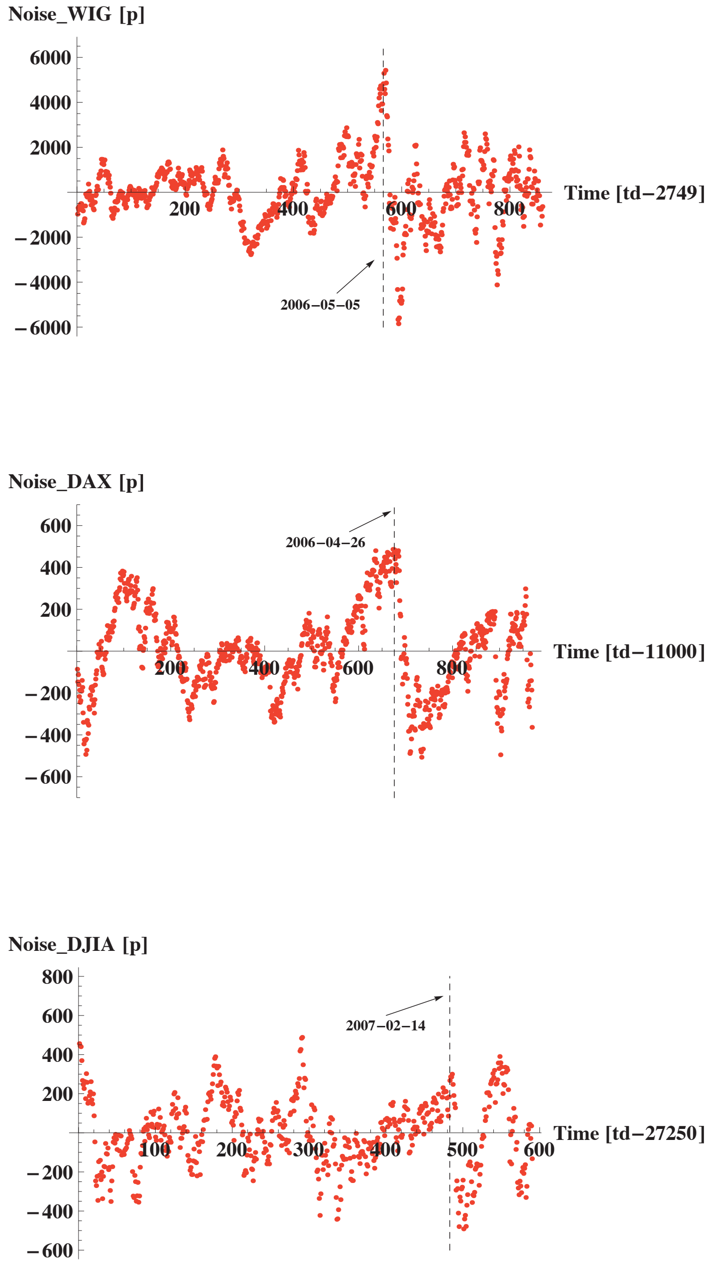
giełd europejskich są (z topologicznego punktu widzenia, czyli co do kształtu krzywej przebiegu indeksów) równoważne.

Zauważmy, że przedstawione bańki giełdowe dają się całkiem dobrze opisać za pomocą naszego teoretycznego wyrażenia (równanie (1.2) w [22]) na trend długookresowy (wieloletni). Odejmując sygnał (szereg czasowy indeksu dla danych dziennych na zamknięciu) od tego trendu uzyskaliśmy (znacznie szybciej zmieniający się) sygnał zdetrendowany jako pozostałość po bańce giełdowej (patrz rysunek 5). W istocie, sygnały te oraz ich szumy są głównym przedmiotem naszych analiz a w nich zwłaszcza największe, strome uskoki zaznaczomne za pomocą pionowych, przerywanych linii. Ulokowane są one ciasno



Rysunek 4: Ostatni, dobrze uformowany pik indexu DJIA (krzywa erratyczna) o początku w dniu 2005-03-16 (27251 dzień handlowy (td) na NYSE) i końcu w dniu 2009-06-09 (28315 td). Maksimum tego piku pojawiło sie w dniu 2007-10-09 (27896 td) podczas gdy teoria przewidywała pojawienie się maksimum w dniu 2007-09-12 (27877 td). Krzywa ciagła jest teoretycznym trendem długookresowym (wieloletnim) [21] dopasowanym do hossy (czyli do danych tworzących lewe zbocze piku). Pionowa linia przerywana określa położenie lokalnego maksimum związanego z największym uskokiem indeksu zaobserwowanym na lewym zboczu w dniu 2007-02-14. Powiększenie fragmentu zawierającego ten uskok zamieszczono w prawym górnym rogu rysunku.

wokół 566, 676 i 483 dnia transakcyjnego, odpowiednio, baniek indeksów WIG, DAX oraz DJIA. Dokładniej rzecz biorąc, te charakterystyczne dni transakcyjne określają położenia centrów "igieł"(patrz rysunek 13). Zauważmy, że igła na indeksie DJIA pojawiła się w dniu 2007-02-14, gdy rynek kredytów typu *subprime* definitywnie załamał się, tzn. najpóźniej spośród omawianych tutaj indeksów. Możnaby to tłumaczyć dużą bezwładnością NYSE związaną z jej ogromną kapitalizacją w porównaniu z giełdami europejskimi.

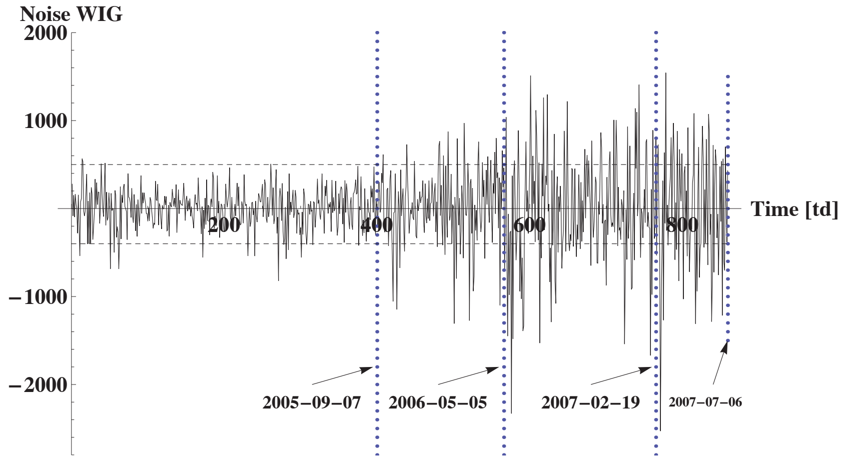


Rysunek 5: Zdetrendowane indeksy (sygnały) WIG, DAX oraz DJIA, które tworzą dane wyjściowe do dalszych rozwazań. Położenie maksimum igły zależnej od czasu wariancji jest dla każdego sygnału z osobna oznaczone pionową, przerywaną linią (patrz rysunek 13).

2

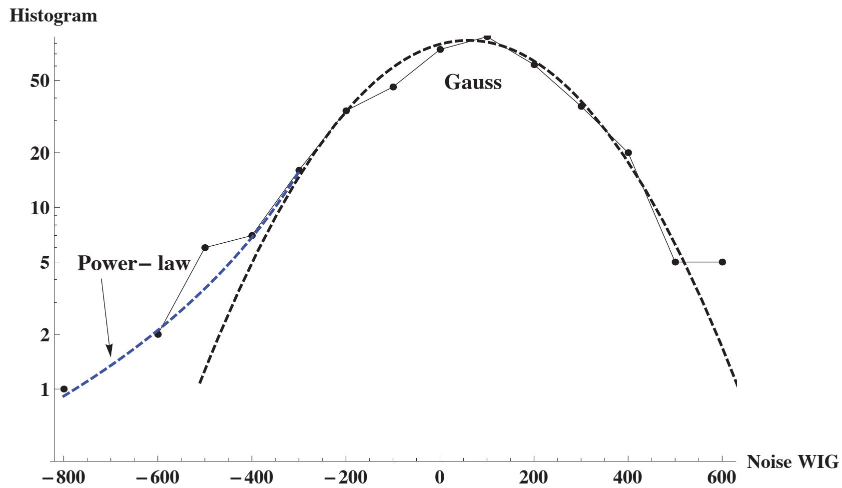
2.1 Analiza przykładowego szumu zdetrendowanego sygnału: dwustanowy charakter hossy

Aby mówić o przejściu typu bifurkacyjnego giełdy jako całości koniecznym jest wyodrębnienie stanów pomiędzy którymi takie przejście może mieć miejsce. Poniżej, na rysunku 6 wskazujemy przykładowo stany warszawskiej GPW, znacznie różniące się amplitudą szumu zdetrendowanego sygnału.



Rysunek 6: Przykładowe zachowanie się szumu zdetrendowanego sygnału WIG. Dobrze widoczny jest wzrost amplitudy szumu w obszarze przejściowym rozciągającym się (mniej więcej) od dnia 2005-09-07 do dnia 2006-05-05 (obie daty zaznaczono pionowymi przerywanymi liniami). Dzień 2005-09-07 znajduje się (mniej więcej) dwa miesiące po załamaniu się w Stanach Zjednoczonych rynku sprzedaży nowych domów jednorodzinnych. Natomiast dzień 2006-05-05 kończy (z grubsza rzecz biorąc) zasadniczy okres sprawozdawczy za poprzedni rok w Stanach Zjednoczonych. Małe i średnie giełdy (czyli np. europejskie) są na informacje, zwłaszcza negatywne, szczególnie podatne ze względu na relatywnie niską kapitalizację. Jak widać, okres pomiędzy 2006-05-05 a 2007-07-06 jest czasem wyraźnego wzrostu zmienności, kończącego się pierwszym załamaniem giełdowym w dniu 2007-07-06.

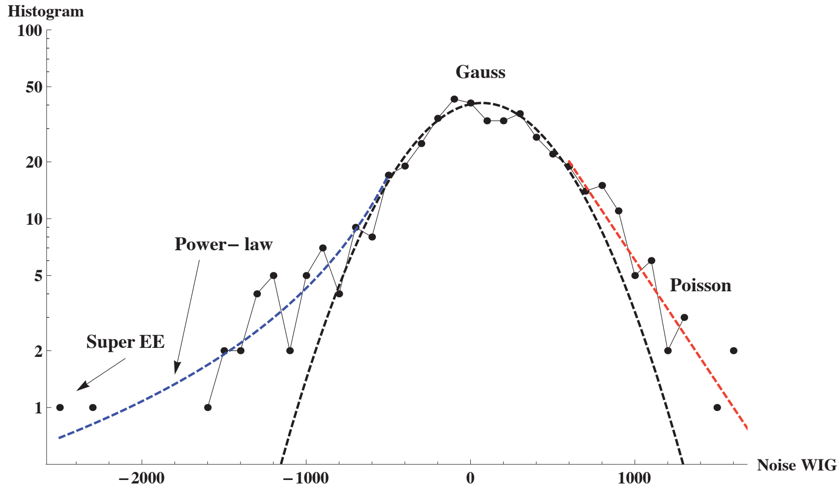
Potwierdzeniem dwustanowego charakteru giełdy jako całości, a zarazem odpowiedź na pytanie o procesy stojące za szumami o tak znacząco różniących się amplitudach, są statystyki (histogramy) zbudowane dla obu rodzajów szumu (patrz rysunki 7 oraz 8).



Rysunek 7: Histogram szumu niskoamplitudowego przedstawiony w skali półlogarytmicznej. Widać, że jest on zdominowany przez rozkład Gaussa.

Na szczególną uwagę zasługuje fakt pojawienia się zdarzeń superekstremalnych (w sensie definicji Didiera Sornetty [39]): jednego towarzyszącego przejściu od szumu nisko- do wysokoamplitudowego a drugiego towarzyszącego drugiemu co do wielkości (ujemnemu) pikowi zdetrendowanego sygnału (jaki pojawił się około dziesięć miesięcy później). Oba były najprawdopodobniej związane z atakami dużych zagranicznych graczy giełdowych na warszawską GPW. Oczywiście, otwartym pozostaje pytanie czy tego typu gwałtownym wzrostom zmienności zawsze towarzyszą zdarzenia superekstremalne. Naszą hipotezą jest, że najczęściej tak właśnie jest, gdyż duże zmienności kuszą dużymi zyskami (w grze na spadkach lub wzrostach) przy dużym ryzyku, do którego są skłonni przede wszystkim liczący się gracze.

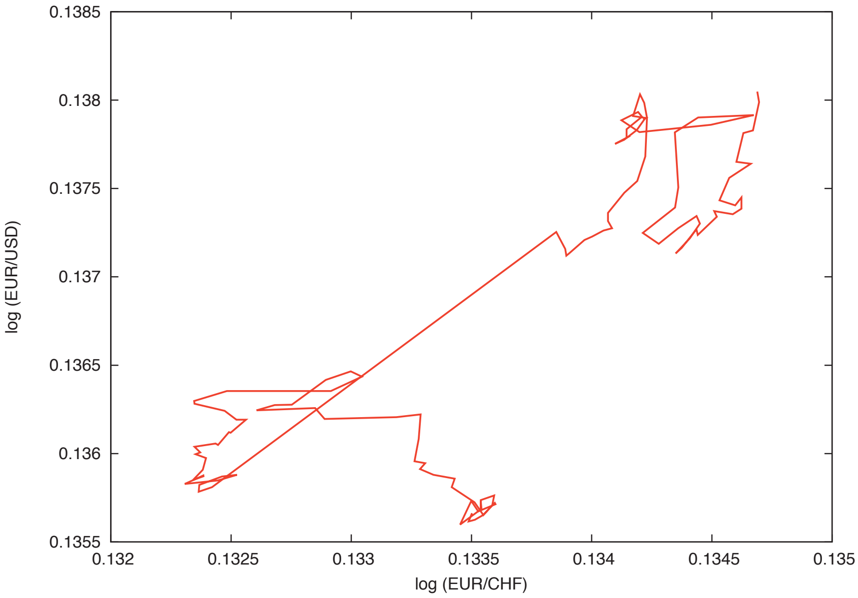
2



Rysunek 8: Histogram szumu wysokoamplitudowego przedstawiony w skali półlogarytmicznej. Widać jak bardzo różni się on od analogicznego opisującego szum niskoamplitudowy (patrz rysunek 7). Histogram szumu wysokoamplitudowego jest asymetryczny: jego część centralna jest gaussowska ale część dotycząca spadków (ujemne wartości szumu) jest potęgowa. Poza nią widać dwa punkty, które (zgodnie z definicją Didiera Sornetty [39]) można by uważać za zdarzenia superekstremalne.

2.2 Symulacja zdarzeń superekstremalnych na rynku walutowym Forex: analiza jakościowa

Na rysunku 9 przedstawiono (przykładowo na płaszczyźnie) 120 kolejnych wartości logarytmów kursów walut log(EUR/CHF) vs. log(EUR/USD) w postaci (geometrycznego) błądzenia losowego. Jak widać, błądzenie to nie ma charakteru brownowskiego (procesu Wienera) ze względu na obecność długiego przelotu wywołanego interwencją Swiss National Bank (SNB). Rodzi sie pytanie, czy potrafilibyśmy, przynajmniej jakościowo, symulować tego typu błądzenia losowe? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Wynik naszej symulacji (też dla 120 kolejnych przemieszczeń) został przedstawiony na rysunku 10 w lewym oknie.



Rysunek 9: Błądzenie logarytmów kursów walut EUR/CHF vs. EUR/USD na płaszczyźnie w dniu 2010-11-19 w godzinach 15:00-10:99. Za długi przelot odpowiedzialna jest interwencja Swiss National Bank.

2

Przedstawiony na tym rysunku wynik symulacji dotyczy hierarchicznego błądzenia losowego Weierstrassa-Mandelbrota (WM) (dla prostoty) dla czasu dyskretnego[2] (mierzonego liczbą kroków). Aby jak najprościej zilustrować to błądzenie przedstawiamy je dla jednego wymiaru za pomocą gęstości prawdopodobieństwa pojedynczego przemieszczenia x:

$$p(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} w(j) \left[\delta(x - b_0\, b^j) + \delta(x + b_0\, b^j) \right], \tag{1}$$

gdzie wagę $w(j)$ jest wygodnie przedstawić w następujący sposób:

$$w(j) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^J} \tag{2}$$

[2]Bardziej rozwinięte błądzenia typu Weierstrassa-Mandelbrota rozważano w pracach [26]-[28].

przy czym b, $N > 1$ natomiast b_0 jest jednostką "długości", którą w dalszym ciągu przyjmujemy równą 1; oczywiście, $\delta(\ldots)$ jest deltą Diraca. Jak widać, indeks j określa rząd probabilistycznej hierarchii pojedynczych przemieszczeń - im j jest większe tym b^j jest większe, rosnąc ze wzrostem j w postępie geometrycznym. Dostosowując się do tego, waga $w(j)$ maleje w postępie geometrycznym. Można wykazać, że procesem tym rządzi, *de facto*, jeden wykładnik (o strukturze wymiaru fraktalnego) a mianowicie $\beta \stackrel{\text{def.}}{=} \ln(N)/\ln(b)$ o czym była już mowa w Części I Raportu w rozdz. 7. Wskazano tam, że sprowadza się to do sterowania tego typu błądzeniem przez zdarzenia ekstremalne i superekstremalne dla wykładnika $\beta < 2$. W naszej symulacji przyjęliśmy przykładowo, że $\beta = 1,585$ (gdzie $N = 3$ a $b = 2$). Podobieństwo jakie (przynajmniej na pierwszy rzut oka) jest widoczne pomiędzy błądzeniem empirycznym (przedstawionym na rysunku 9) jest uderzające stanowiąc dobry punkt wyjścia do przyszłych badań. W tej Części II Raportu zajęliśmy się przede wszystkim obecnością katastroficznych i subkatastroficznych przejść bifurkacyjnych traktując powyższy wynik jako ważny ale tylko wspomagający.

Dodajmy jeszcze, że niegaussowski charakter symulowanego błądzenia ma zasadnicze kosekwencje w postaci załamania się (dla tego typu błądzenia) prawa wielkich liczb Bernoulliego. Łatwo to zobaczyć porównując wykresy w prawych oknach na rysunkach 10 i 11, gdzie przedstawiono wariancje sumarycznego (wielokrokowego) przemieszczenia w funkcji czasu dla, odpowiednio, błądzenia Weierstrassa-Mandelbrota oraz procesu Wienera. Jak widać, w pierwszym przypadku nie udaje sie tej wariancji ustabilizować, gdyż im dłuższy jest czas obserwacji tym większe jest prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzen ekstremalnych i superekstremalnych - ten destrukcyjny efekt jest kluczowy dla zrozumienia roli tych zdarzeń w realnych procesach ekonomicznych a zwłaszcza zachodzących w (szeroko rozumianych) finansach. Tego typu zachowanie wariancji mówi nam o ekstremalnej zmienności rozważanego procesu a więc o ekstremalnym ryzyku jakie niesie za sobą tego typu proces (czyli np. inwestowanie w walory podlegające tego typu procesowi).

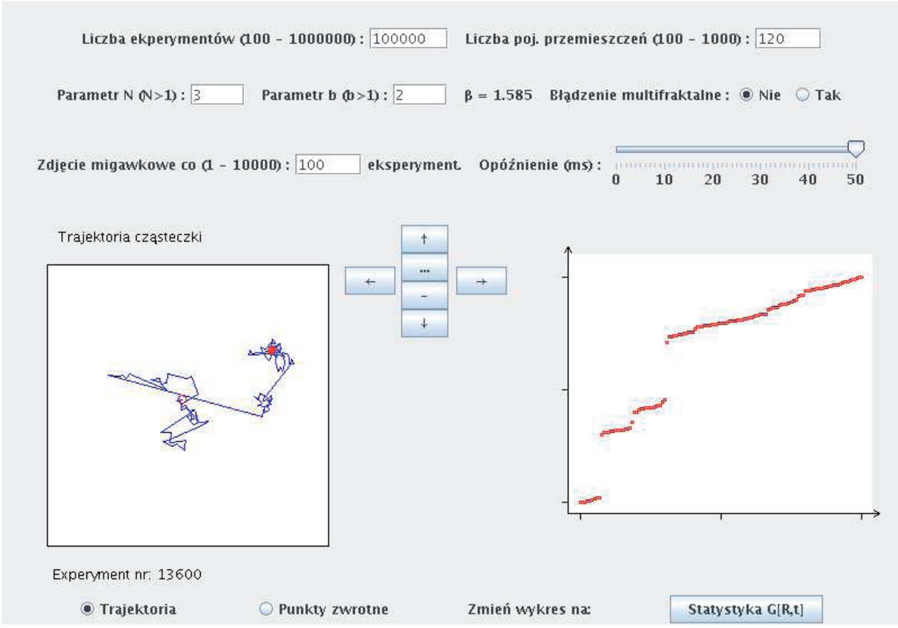
Oczywiście, dla procesu Wienera prawo wielkich liczb Bernoulliego działa, czego wyrazem jest stabilna (bez żadnych nieciągłości) zależność wariancji od czasu (patrz wykres w prawym oknie na rysunku 11). Tym samym, wariancja może być używana (idąc za Markowitzem) jako efektywna miara ryzyka.

Należy podkreślić, że kolejnym przejawem występowania zdarzeń superekstremalnych jest znaczące odstępstwo od prawa potęgowego generowanego przecież przez zdarzenia ekstremalne (o czym była już mowa w I Części Raportu). Jest to dobrze widoczne na wykresie przedstawiajacym empiryczny histogram (absolutnych) zmian kursu sprzedaży EUR/CHF (w skali log-log) jaki zamieszczono na rysunku 12. Przez największe zdarzenie superekstremalne rozumiemy najdalej na prawo wysunięty punkt (wszystkie punkty empiryczne oznaczono iksami). Podkreślmy, że jest ono związane z interwencją SNB; zresztą większość pozostałych tego typu zdarzeń (nieukładających się na linii ptostej w skali log-log) ma taki właśnie charakter. Tylko nieliczne mają charakter spontanicznej aktywności rynku walutowego.

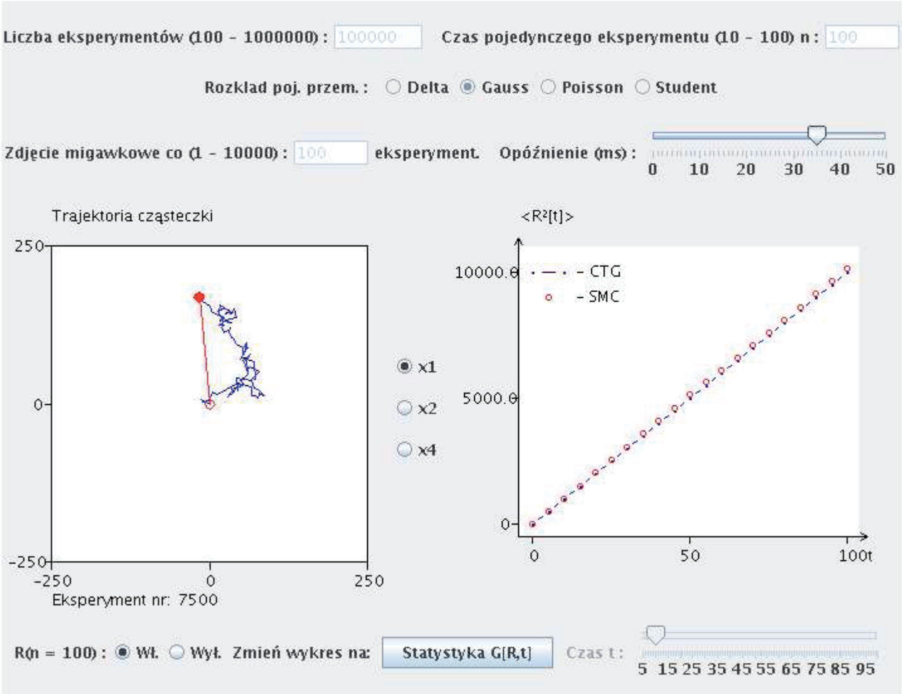
2.3 Błądzenie Weierstrassa-Mandelbrota jako przypadek stochastycznego procesu podporządkowanego

Dokonane przez nas jakościowe porównanie błądzenia empirycznego (patrz rysunek 9) z wynikiem symulacji Monte Carlo (patrz lewe okno na rysunku 10) sugeruje, że proces typu Weierstrassa-Mandelbrota powinien być wzięty pod uwagę przy poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie jaki proces stochastyczny najlepiej odtwarza dynamikę rynku walutowego (a przynajmniej wybranych kursów walutowych). Zwróćmy uwagę, że rozkład (1), czyli gęstość prawdo-

2

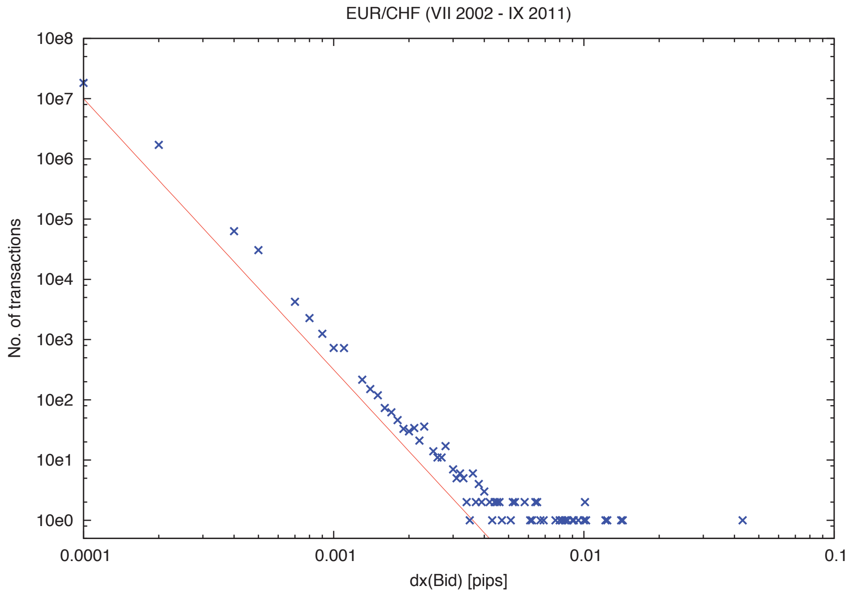


Rysunek 10: Symulacja komputerowa 120 kroków procesu WM (jego pojedyncza realizacja, przykładowo, w eksperymencie nr 13600) przedstawiona w lewym oknie rysunku. Pełnym kółkiem oznaczono końcowe położenie cząstki jaka wystartowała z miejsca oznaczonego okręgiem. Dobrze widoczny jest charakterystyczny długi przelot w pojedynczym kroku. W prawym oknie przedstawiono zależną od czasu wariancję (czyli średnią z kwadratu sumarycznego przemieszczenia cząstki) dla tego procesu, przy czym średnią liczono tutaj po zespole doświadczeń podobnych generowanych (dla identycznych warunków makroskopowych) w trakcie symulacji. Dobrze widoczne są nieciągłości wariancji, które stanowią bezpośredni przejaw istnienia zdarzeń ekstremalnych i superekstremalnych. Prowadzi to w efekcie do rozbiegania się wariancji w miarę jak rośnie liczebność zespołu statystycznego po którym średniujemy, czyli rośnie szansa na wystąpienie tego typu zdarzen.



Rysunek 11: Symulacja komputerowa 100 kroków procesu Wienera (pojedyncza realizacja ruchu Browna, przykładowo, w eksperymencie nr 7500) przedstawiona w lewym oknie rysunku. Odcinek prostej reprezentuje wektor sumarycznego przemieszczenia cząstki brownowskiej (oznaczonej pełnym kółkiem, jaka wystartowała z miejsca oznaczonego okręgiem). Dobrze widoczny jest erratyczny charakter tego procesu. W prawym oknie przedstawiono zależną od czasu wariancję (czyli średnią z kwadratu sumarycznego przemieszczenia cząstki) dla tego procesu, przy czym średnią liczono tutaj po zespole doświadczeń podobnych generowanych (dla identycznych warunków makroskopowych) w trakcie symulacji.

2



Rysunek 12: Empiryczny histogram (absolutnych) zmian kursu sprzedaży EUR/CHF (punkty oznaczone iksami) notowanego na Forex-ie, zbudowany dla danych z szerokiego okresu czasu, poczynając od lipca 2002 roku na wrześniu 2011 kończąc. Referencyjna, ciągła linia prosta ma nachylenie (w skali log-log) wynoszące -5.2, czyli takie jak średnie nachylenie empirycznego histogramu. Zatem, mamy tutaj do czynienia z rozkładem posiadającym algebraiczny, pogrubiony ogon, ale zanikającym szybciej niż jakikolwiek rozkład Lévy'ego.

podobieństwa pojedynczego przemieszczenia (przejścia) definiująca ten proces jest superstatystyką [2, 3] związaną z procesami należącymi do kategorii procesów podporządkowanych[3] (ang. *subordinate*) [8]-[23].

Mianowicie, na rozważane w rozdz. 2.2 błądzenie Weierstrassa-Mandelbrota w czasie dyskretnym można spojrzeć jak na odpowiednie złożenie dwóch następujących procesów:

(1) dwupunktowego (dychotomicznego) szumu

$$\phi_j(x) = \frac{1}{2}\left[\delta(x - b_0 b^j) + \delta(x + b_0 b^j)\right] \tag{3}$$

[3]Spostrzeżenie to zawdzięczamy Mateuszowi Pipieniowi.

gdzie utrzymujemy oznaczenia takie jak w rozdz. 2.2,

(2) oraz podporządkowującego (ang. *subordinator*) rozkładu $w(j)$ zbudowanego w oparciu o rozkład Bernoulliego, mówiącego jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia przeciwnego do danego, które wystąpiło dokładnie j razy. Rozkład ten jest dany wzorem (2) i ma charakter niemalejący w funkcji kolejnego kroku losowania.

2

W takim ujęciu, o rozkładzie (1) można powiedzieć, że jest podporządkowany rozkładowi ϕ_j wyrażonemu wzorem (3).

Wydaje się, że tego typu podejście (tym bardziej, że poparte sugestią empiryczną) otwiera obiecujące możliwości badania układów o znacznym stopniu złożoności, zwłaszcza takich jak rynki finansowe.

Należy dodać, że procesy podporządkowane są znane w literaturze finansów empirycznych [8]. Co prawda w chwili obecnej nie są one tak intensywnie rozwijane jak alternatywne do nich specyfikacje jednak, na początku lat siedemdziesiątych, były jedną z możliwych propozycji modelowania dynamiki instrumentów finansowych. Niniejsze opracowanie projektu częściowo nawiązuje do tego typu fundamentalnych prac z zakresu empirycznych finansów, co czyni je silnie ugruntowanym w literaturze przedmiotu.

2.4 Zależna od czasu wariancja zdetrendowanego sygnału

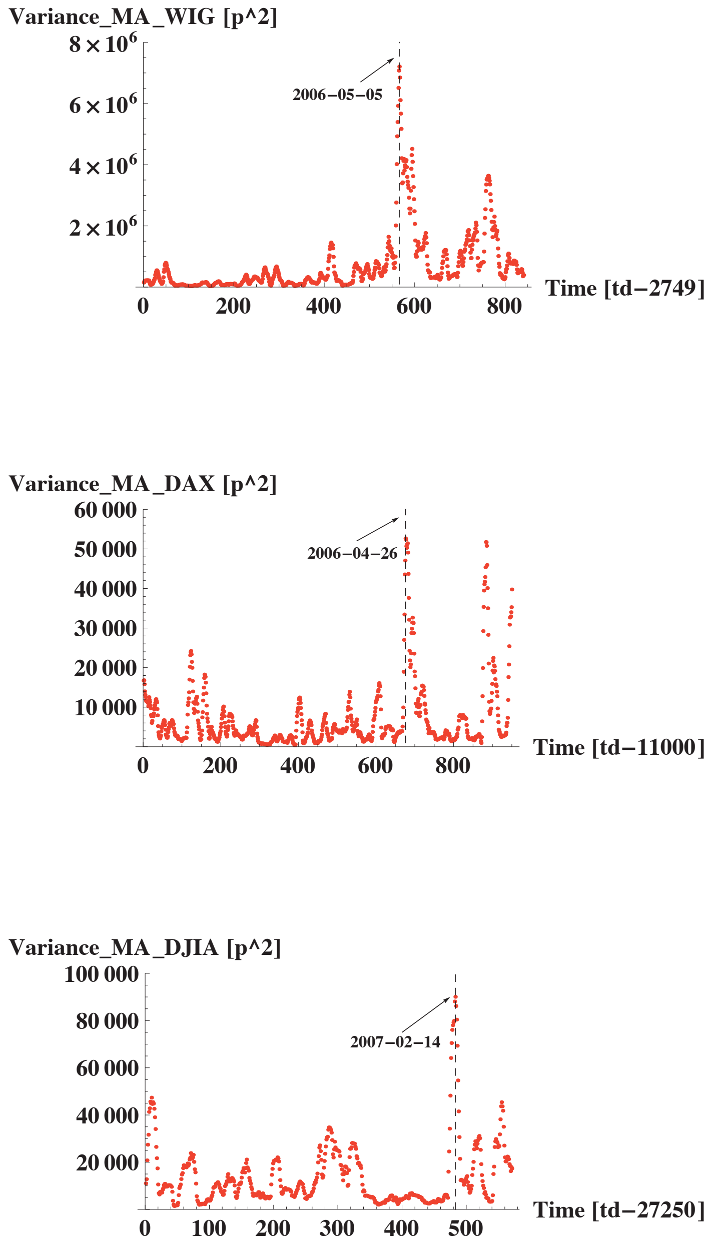
Dla naszych trzech zdetrendowanych sygnałów (tzn. dla WIGu, DAXa oraz DJIA) badamy zależność czasową estymatora zwykłej (tutaj jednomiesięcznej) wariancji (patrz rysunek 13). Estymator ten jest zdefiniowany dla danych dziennych na zamknięciu, w oknie czasowym o szerokości jednego miesiąca handlowego (czyli czterech tygodni, tzn. 20 dni roboczych). Taki wybór związany jest z faktem, że właśnie raz w miesiącu Banki Centralne (a w naszym kraju Narodowy Bank Polski) ustalają wysokości (referencyjnych) stóp procentowych. Innymi słowy, empiryczne szeregi czasowe są skanowane oknem czasowym o szerokości czterech tygodni i w ramach takiego okna obliczana jest każdorazowo odpowiednia średnia po próbce (ang. *sample average*).

Zwróćmy uwagę, że zależna od czasu wariancja sygnału drastycznie wzrasta w obszarach uskoków, tworząc ostre piki w postaci "igieł"(patrz rysunek 13). Istnienie takich igieł może być jednym z symptomów
(sub)katastroficznego przejścia bifurkacyjnego (ang. *(*sub)catastrophic bifurcation transition, (sub)CBT) czy nawet krytycznego (katastroficznego) spowolnienia (ang. *c*ritical (catastrophic) slowing down, CSD). W dalszym ciągu tego typu igły nazywamy katastroficznymi igłami (ang. *catastrophic (critical) spike*).

Jak widać (patrz rysunek 13), katastroficzne igły zależnej od czasu wariancji są poprzedzane przez dobrze uformowane ale o mniejszej amplitudzie, rosnącej w miarę zbliżania się do wspomnianych igieł. W ten sposób manifestuje się tzw. zjawisko migotania (ang. *flickering phenomenon*, FF) [34]. Zjawisko to może pojawić się, na przykład, gdy system " oscyluje"pomiędzy stanami (równowagi trwałej lub nietrwałej) w obszarze CBT. Takie zachowanie może być także prekursorem CBT. Co więcej, towarzyszyć temu może znacznie wcześniej zaczynający sie efekt systematycznego skracania się obszarów o relatywnie niewielkiej amplitudzie wariancji (ang. *shrinking of intermittencies*, patrz pierwszy od góry wykres na rysunku 13).

2.5 Skumulowana wariancja zdetrendowanego sygnału

Na rysunku 14 przedstawiono skumulowaną wariancję (ang. *accumulative variance*, ACV) zdetrendowanego sygnału. Tego typu wariancja jest zawsze ob-



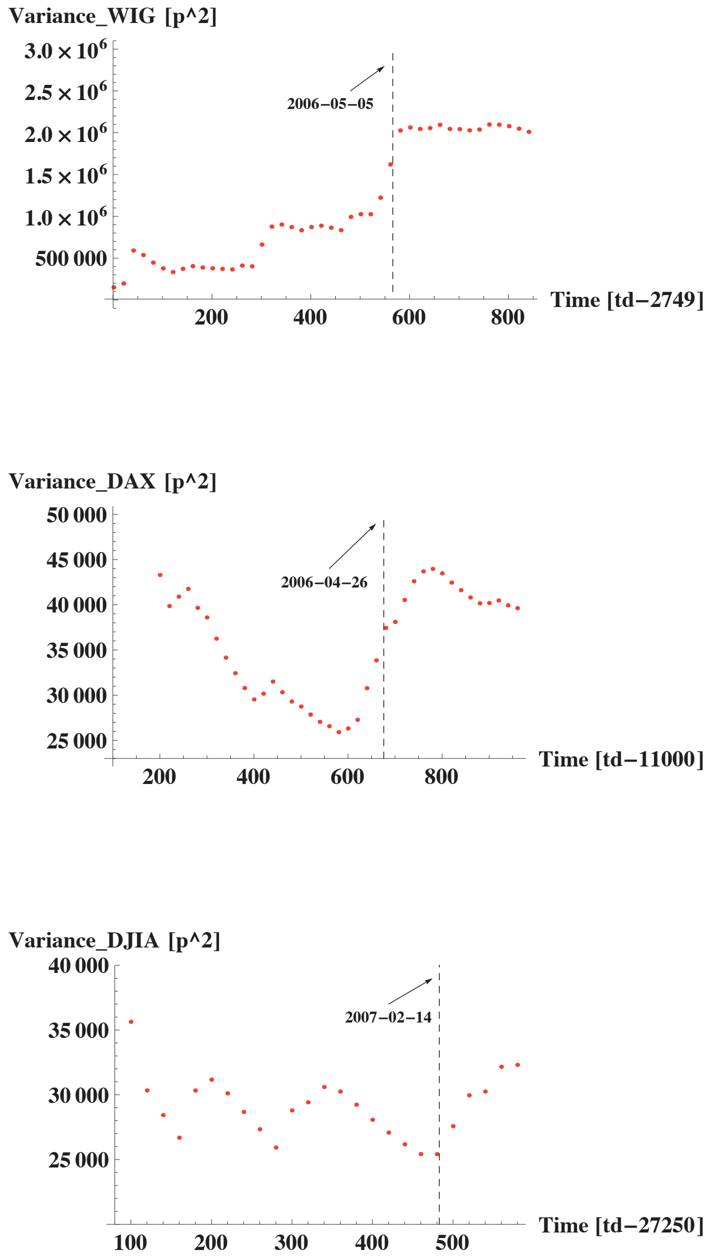
Rysunek 13: Wykresy estymatora zwykłej, zależnej od czasu wariancji zdetrendowanych indeksów WIG, DAX oraz DJIA. Pionowe przerywane linie określają położenia centrów (maksimów) "igieł", odpowiednio, w 566, 676 i 483 dniu transakcyjnym hossy.

liczana narastająco (w czasie), poczynając od jakiegoś ustalonego punktu początowego (przykładowo dla Warszawskiej GPW, od 2750 dnia, licząc od początku jej powstania) do chwili aktualnej - chwilę tą przesuwamy stopniowo tak daleko w czasie jak jest to konieczne do prowadzenia analizy (z odpowiednio dobranym krokiem czasowym). Taka wariancja ma bardziej globalny charakter i w związku z tym jest znacznie stabilniejsza od wcześniej wprowadzonej (zwykłej miesięcznej). Jest ona znacznie mniej wrażliwa na szczegóły a przez to wygodniejsza w użyciu w badaniu zjawisk krytycznych (gdzie szczegóły nie odgrywają pierwszorzędniej roli).

Przebieg ACV wskazuje, że w pobliżu katastroficznej igły (progu CBT) system ma charakter bimodalny (dwustanowy), czyli stan o niższej wariancji skumulowanej jest wyraźnie odróżnialny od stanu o podwyższonej skumulowanej wariancji dzięki schodkowemu kształtowi ACV w czasie. Przed i za progiem ACV jest niemal stałe - skok ma miejsce w relatywnie wąskim przedziale czasu; przykładowo, dla WIGu od $t_{down} = 520$ do $t_{up} = 590$ dnia transakcyjnego. Dla czasu wcześniejszego od t_{down} system znajduje się w stanie słabiej pobudzonym, podczas gdy dla czasów większych niż t_{up} w stanie względnie wysokiego pobudzenia. Tego typu zachowanie ACV sugeruje, że w systemie dokonała się jakaś zasadnicza (strukturalna) reorganizacja. Może to być zwiastunem CBT, potwierdzając wcześniejsze rozważania prowadzone w rozdz. 2.1.

Wskazywano ostatnio [4], że gwałtowny wzrost chwilowej wariancji w obrębie progu był obserwowany w systemach ekologicznych i socjologicznych posiadających różnorakie atraktory. W niniejszej II Części Raportu pokazujemy, że tą własność posiadają także rynki finansowe.

W kolejnych rozdziałach analizujemy przede wszystkim zależny od czasu współczynnik autoregresji $AR(1)$ oraz związaną z nim funkcję autokorelacji $ACF(1)$, głównie w obszarach otaczających największe piki wariancji, tzn. katastroficzne igły.



Rysunek 14: Wielomodowa skumulowana wariancja zdetrendowanych sygnałów WIG, DAX oraz DJIA dotycząca ostatnich baniek giełdowych na tych indeksach. Przerywanymi pionowymi liniami oznaczono położenia maksimów największych pików sygnału (porównaj rysunek 5), czyli położenia przypuszczalnych progów CBT. Widać, że w pobliżu progu układ może być traktowany (z dobrym przybliżeniem) jako dwumodowy (dwustanowy, dwufazowy).

2.6 Współczynnik regresji $AR(1)$

Przykładowo, na rysunku 15 przedstawiono empiryczny, zdetrendowany sygnał WIG w chwili t, czyli x_t, w zależności od wcześniejszego sygnału x_{t-1}. Dokładniej rzecz biorąc, są to dwa zestawy par danych po dziewiętnaście par w każdym zestawie. Pierwszy zestaw (kółka) obejmuje okres od 521 do 540 sesji włącznie a drugi od 541 do 560 (odwrócone trójkąty). Linie proste zostały dopasowane osobno do każdego zestawu. Nachylenia tych prostych dają bezpośrednio dwie różne wartości współczynnika $AR(1)$, czyli współczynnika $1 + \lambda$, gdzie λ jest pochodną nieliniowej składowej dryfowej (deterministycznej) $f(x_t; P)$ po sygnale x_t - patrz zdyskretyzowane równanie dynamiki stochastycznej (6) w Dodatku A oraz jego zlinearyzowaną wersję (12) w Dodatku A.2 (występujący tutaj parametr P ma charakter parametru sterującego, wolnozmiennego w czasie liczonym w miesiącach). Dzięki wspomnianemu powyzej dopasowaniu uzyskujemy także konkretne wartości współczynnika przesunięcia prostych (patrz powiększony fragment wykresu na rysunku 15).

Na rysunkach 16 i 17 przedstawiono wykresy zależności, odpowiednio, współczynnika $AR(1)$ oraz $-\lambda$ od czasu (liczonego w miesiącach). Obserwacją konieczną do prowadzenia dalszych rozważań, jaka wynika z tych wykresów jest to, że $-1 < \lambda \leqslant 0$. Jest to warunek konieczny istnienia katastroficznego przejścia bifurkacyjnego.

Co więcej, jak wynika z fitów, dzięki którym wyznaczany jest współczynnik $AR(1)$ (patrz rysunek 15), większa wartość tego współczynnika, w przybliżeniu równa 1.0, została uzyskana dla drugiego zestawu danych (oznaczonego za pomocą odwróconych trójkątów); dla pierwszego zestawu (kółka) otrzymano $AR(1) \approx 0.60$. Wartość współczynnika $AR(1) \approx 1.0$ jest wyznaczona dla miesiąca położonego w najbliższym sąsiedztwie progu (patrz pionowa linia przerywana na górnym wykresie rysunku 16).

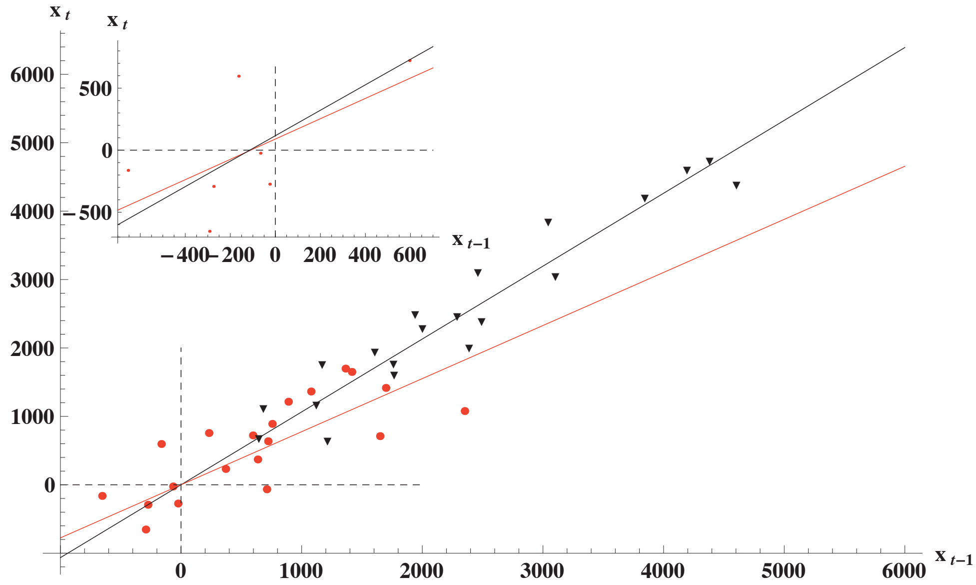
Należy podkreślić, że nasze podejście bazuje na założeniu, że parametr λ jest wolnozmienną funkcją czasu - zmienia się w skali miesięcy a nie dni. To samo można powiedzieć o innych współczynnikach (np. $AR(1), ACF(1)$ jak też współczynniku przesunięcia prostej b wykorzystywanym poniżej).

Ponieważ przesunięcie obu uzyskanych powyżej linii prostych jest proporcjonalne zarówno do $-\lambda$ jak też do wartości stabilnego miejsca zerowego $x^*_{1''}$ poprzez relację $b = -\lambda x^*_{1''}$ (patrz drugie równanie w (13) w Dodatku A.2), dzięki temu możemy wyznaczyć $x^*_{1''}$ w zależności od czasu (liczonego w miesiącach) dzieląc jedną wielkość otrzymaną z danych empirycznych przez drugą - oczywiście, obie one są funkcjami czasu (też liczonego w miesiącach). Tak otrzymaną zależność przedstawiono na rysunkach 18-21. Analogiczne rozważania dotyczą stabilnego pierwiastka x^*_1. Uderzająca zależność obu tych pierwiastków od czasu wskazuje na istnienie katastroficznego przejścia bifurkacyjnego właśnie pomiędzy stanami równowagi cząstkowej zdefiniowanymi przez oba pierwiastki. Przejście to znajduje się (niemal) dokładnie w miejscu ulokowania się katastroficznej igły (o której była mowa wcześniej).

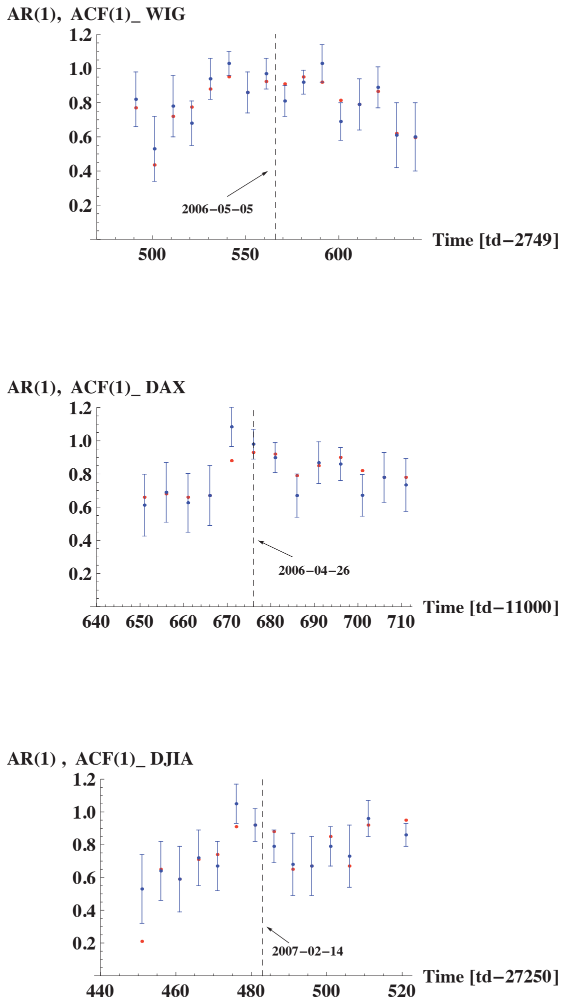
2.7 Jednokrokowa funkcja autokorelacji $ACF(1)$

W dodatku A.3 wykazaliśmy, że zarówno dla nieskończonych jak i skończonych szeregów czasowych (które we wszystkich rozważanych przez nas sytuacjach składały się z dwudziestu elementów), wielokrokowa funkcja autokorelacji $ACF(h)$ wyraża się przez wzór podany w czwartym wierszu (15).

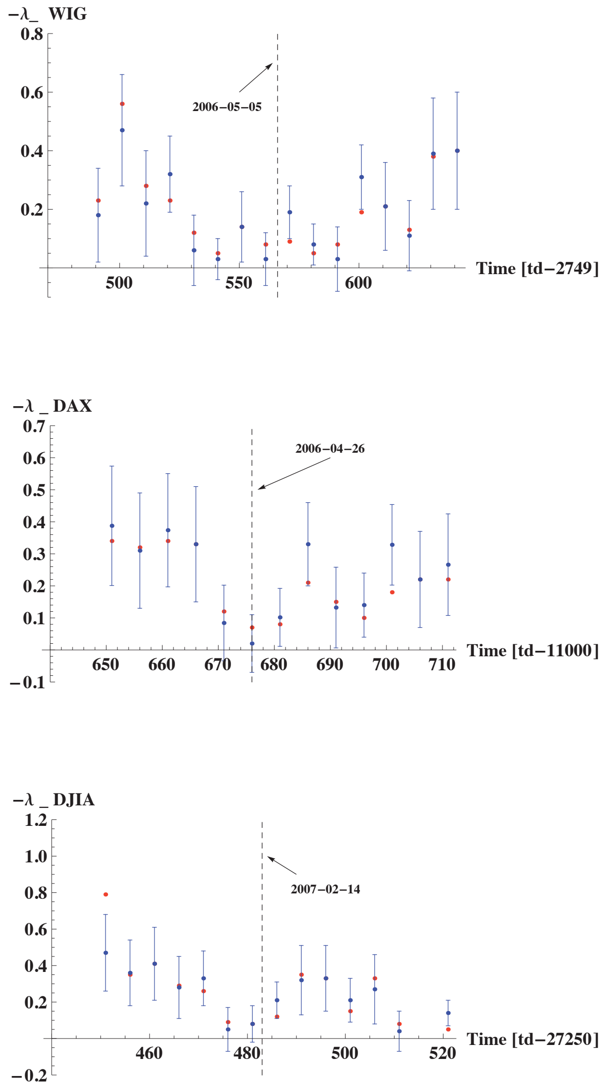
Dokładniej rzecz biorąc, analizujemy współczynnik autoregresji procesu $ACF(1) = 1 + \lambda = AR(1)$ za pomocą techniki alternatywnej do tej użytej w rozdz. 2.6, gdzie też wyznaczaliśmy współczynnik autoregresji $AR(1)$. Miano-



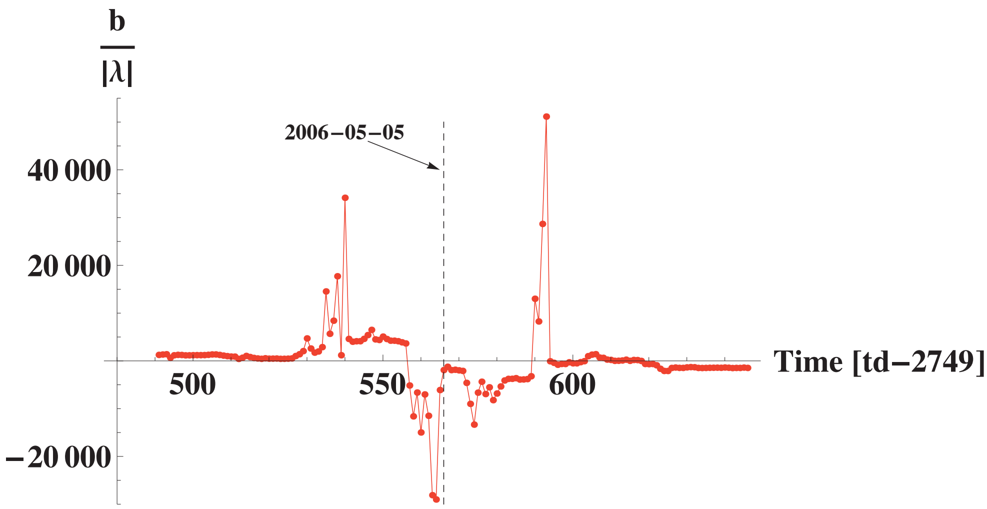
Rysunek 15: Przykładowy wykres x_t vs. x_{t-1} zdetrendowanego sygnału WIG składającego się z dwóch zestawów danych empirycznych po 19 par każdy. Oba zestawy dotyczą dwóch kolejnych miesięcy: pierwszy od 521 do 540 sesji (kółka z dofitowaną ciągłą linią prostą), drugi od 541 do 560 sesji (odwrócone trójkąty także z dofitowaną ciągłą linią prostą). Dopasowane linie proste mają nachylenie, odpowiednio, $AR(1) \approx 0.60$ oraz $AR(1) \approx 1.0$. Prowadzi to natychmiast do, odpowiednio, $-\lambda = 1 - AR(1) \approx 0.40$ oraz $-\lambda = 1 - AR(1) \approx 0.0$ (patrz także rysunek 17). Dopiero na powiększonym fragmencie wykresu okolic zera dobrze widoczna jest wielkość współczynnika przesunięcia b dla obu prostych.



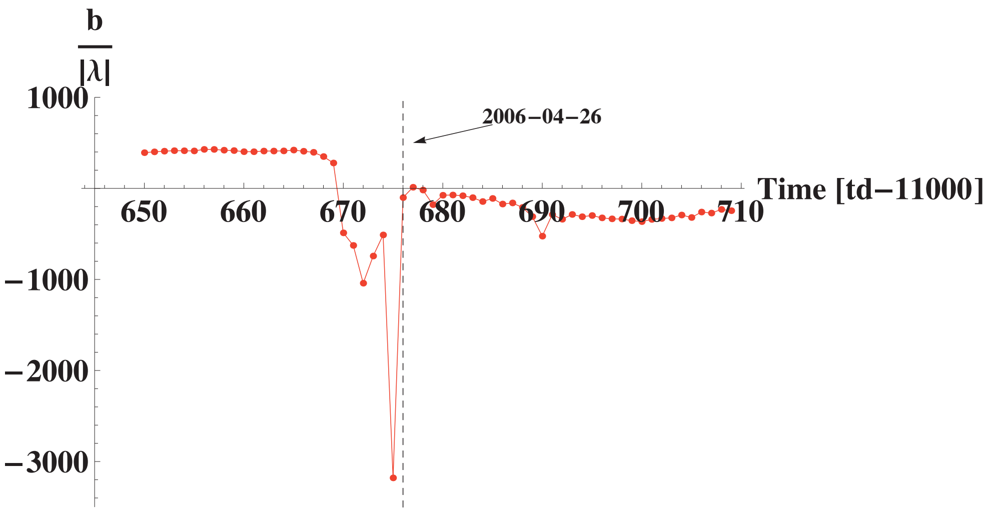
Rysunek 16: Wykres współczynnika regresji liniowej pierwszego rzędu $AR(1)$ (kropki z zaznaczoną dyspersją) oraz jednokrokowej funkcji autokorelacji $ACF(1)$ (kropki nie położone w centrum odcinka oznaczającego dyspersję) w zależności od czasu. Wartości tych współczynników zostały wyznaczone dla 16 kolejnych miesięcy (dwudziestopunktowych przedziałów czasu) poczynając od przedziału $[481, 500]$ na $[641, 660]$ kończąc. Przedziały te rozciągają się tak, że obejmują próg katastroficznego przejścia bifurkacyjnego. Jak widać, obie wielkości posiadają (jak należało oczekiwać) zbliżoną zależność od czasu - są to wklęsłe funkcje czasu, które posiadają maksimum (niemal) na progu (zaznaczonym pionową przerywaną linia prostą), czyli gdzieś wewnątrz przedziału $[541, 600]$, chociaż należy przeznać, że obszar maksimum jest rozciągnięty obejmując (mniej więcej) jeden kwartał.



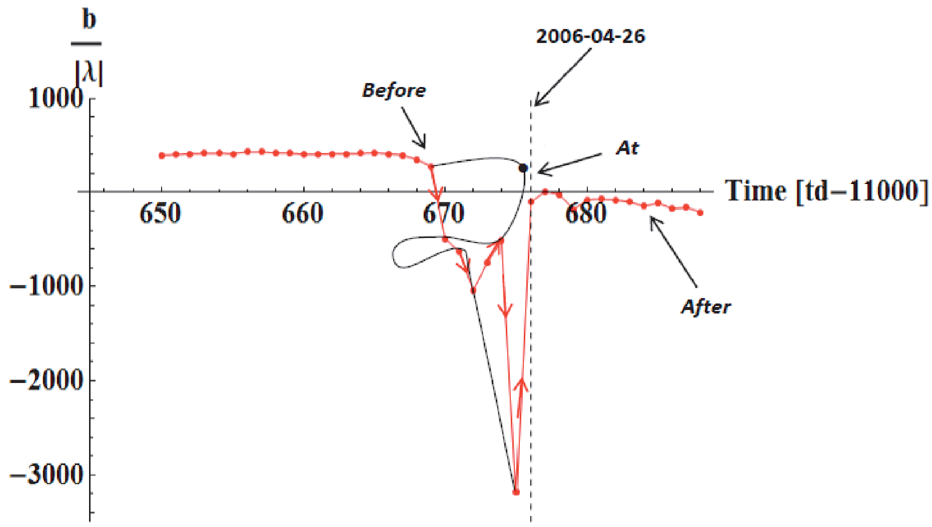
Rysunek 17: Wykres współczynnika szybkości relaksacji $-\lambda$ w funkcji czasu zbudowany w oparciu o dwie niezależne formuły: (1) $-\lambda = 1 - AR(1)$ (kropki z zaznaczonymi dyspersjami) oraz (2) $-\lambda = 1 - ACF(1)$ (kropki, które nie leżą w środku odcinków oznaczających dyspesje), przy czym zależność samych AR(1) i ACF(1) w funkcji czasu była już przedstawiona na rysunku 16. Jak należało oczekiwać, oba współczynniki mają zbliżoną zależność od czasu (są funkcjami wypukłymi) mając poszerzone obszary minimum z centrum w tych samych miejscach co odpowiednie maksima przedstawione na rysunku 16; pionowe przerywane linie (podobnie jak na poprzednim rysunku) wskazują położenie centrów katastroficznych igieł.



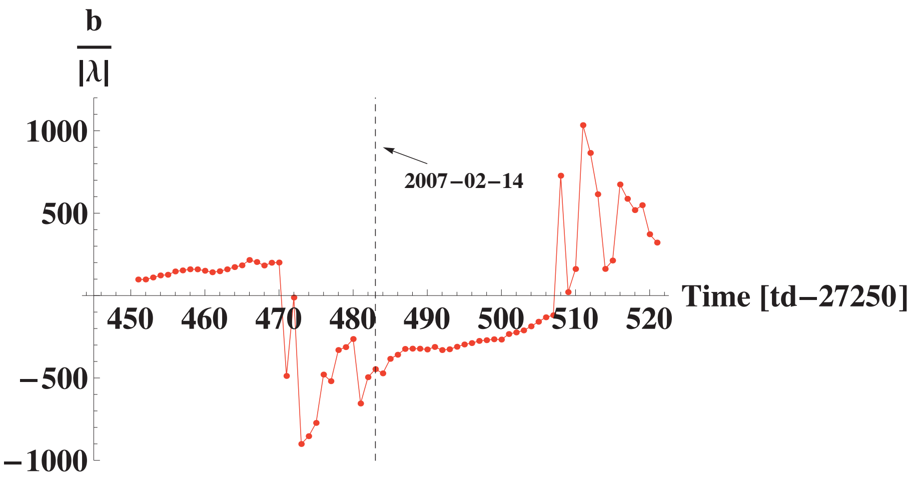
Rysunek 18: (Sub)katastroficzne przejście bifurkacyjne (skok) widoczne w (obrobionych) danych empirycznych z WIGu, indukowane przez ujemną katastroficzną igłę. Te obrobione dane tworzą trajektorię stanów równowagowych $x^*(= -b/\lambda)$ w funkcji czasu. Natomiast położenie wspomnianej igły znajduje się w bezpośredniej (kilkudniowej) bliskości katastroficznej igły zależnej od czasu wariancji (oznaczonej pionową przerywaną linią prostą). Podkreślmy, że punkty leżące przed skokiem mogą być identyfikowane ze stanami równowagowymi oznaczonymi (skrótowo) przez 1”, podczas gdy te po skoku ze stanami oznaczonymi przez 1 (patrz rysunki 27-30 w rozdz. 3).



Rysunek 19: (Sub)katastroficzne przejście bifurkacyjne (skok) widoczne w (obrobionych) danych empirycznych z DAXa (punkty), indukowane przez ujemną katastroficzną igłę (przejście to jest lepiej widoczne na kolejnym rysunku 20). Te obrobione dane tworzą trajektorię stanów równowagowych $x^*(= -b/\lambda)$ w funkcji czasu (punkty połączone krzywą). Natomiast położenie wspomnianej igły znajduje się w bezpośredniej (co najwyżej dwudniowej) bliskości innej, odpowiadającej jej katastroficznej igły zależnej od czasu wariancji, oznaczonej tutaj pionową przerywaną linią prostą. Podkreślmy, że punkty leżące przed skokiem mogą być identyfikowane ze stanami równowagowymi oznaczonymi (skrótowo) przez 1”, podczas gdy te po skoku ze stanami oznaczonymi przez 1 (patrz rysunki 27-30 w rozdz. 3).



Rysunek 20: Przykładowe, pośrednie subkatastroficzne przejście bifurkacyjne dla indeksu DAX ze schematycznie wpisaną (hipotetytczną) wstecznie zaplecioną krzywą umożliwiającą zilustrowanie przejść bifurkacyjnych. Ciąg strzałek pokazuje kolejne, pojedyncze przejścia układu w otoczeniu progu CBT, korespondujące do odpowiednich punktów empirycznych przedstawionych na (poprzednim) rysunku 19. Terminy ”Before”, ” At” i Ąfter” oznaczają, odpowiednio, przejście przed progiem CBT, na progu i za nim. Właśnie oba punkty (dodatni $x^*_{1''}$ i ujemny x^*_1) znajdujące się w obszarze ” At” pozwalają, dzięki równaniom (32), wyznaczyć poszukiwane, względne parametry a_1/a_0, a_2/a_0 oraz a_3/a_0. W dalszym ciągu przyjmujemy dla prostoty, że $P \propto a_3/|a_0|$.



Rysunek 21: (Sub)katastroficzne przejście bifurkacyjne (skok) widoczne w (obrobionych) danych empirycznych z DJIA, indukowane przez ujemny katastroficzny pik. Te obrobione dane tworzą trajektorię stanów równowagowych $x^*(= -b/\lambda)$ w funkcji czasu. Natomiast położenie wspomnianego piku znajduje się w (co najwyżej) dwutygodniowej odległości od katastroficznej igły zależnej od czasu wariancji (oznaczonej jak zwykle, pionową przerywaną linią prostą). Podkreślmy, że punkty leżące przed skokiem mogą być identyfikowane ze stanami równowagowymi oznaczonymi (skrótowo) przez 1", podczas gdy te po skoku ze stanami oznaczonymi przez 1 (patrz rysunki 27-30 w rozdz. 3).

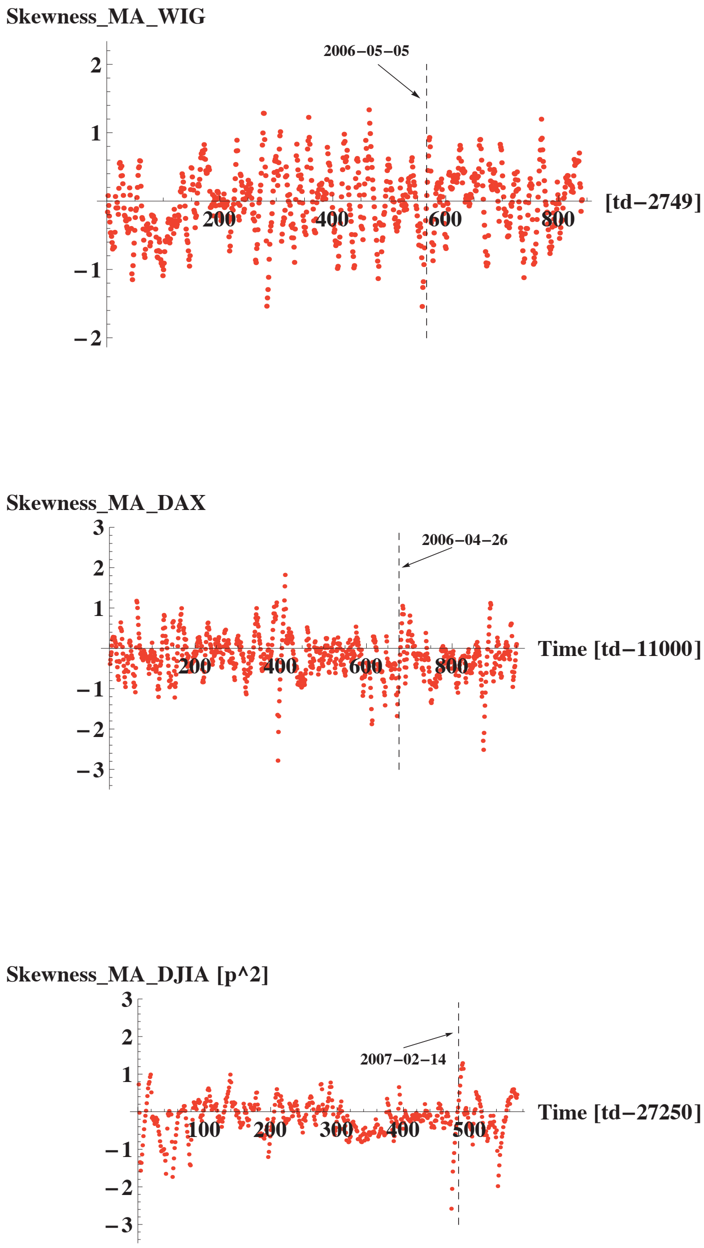
wicie, wykorzystaliśmy tutaj zwykły estymator, $ACF_{EST}(1)$, funkcji autokorelacji $ACF(1)$ dla danego miesiąca (czyli naszego okna czasowego), w ramach którego współczynnik λ jest stały.

$$ACF_{EST}(1) = \frac{1}{Var(x_t)} \frac{1}{19} \left[\left(\sum_{t=0}^{18} x_t \, x_{t+1} \right) - \frac{1}{19} \left(\sum_{t=0}^{18} x_t \right) \left(\sum_{t=0}^{18} x_{t+1} \right) \right]. \qquad (4)$$

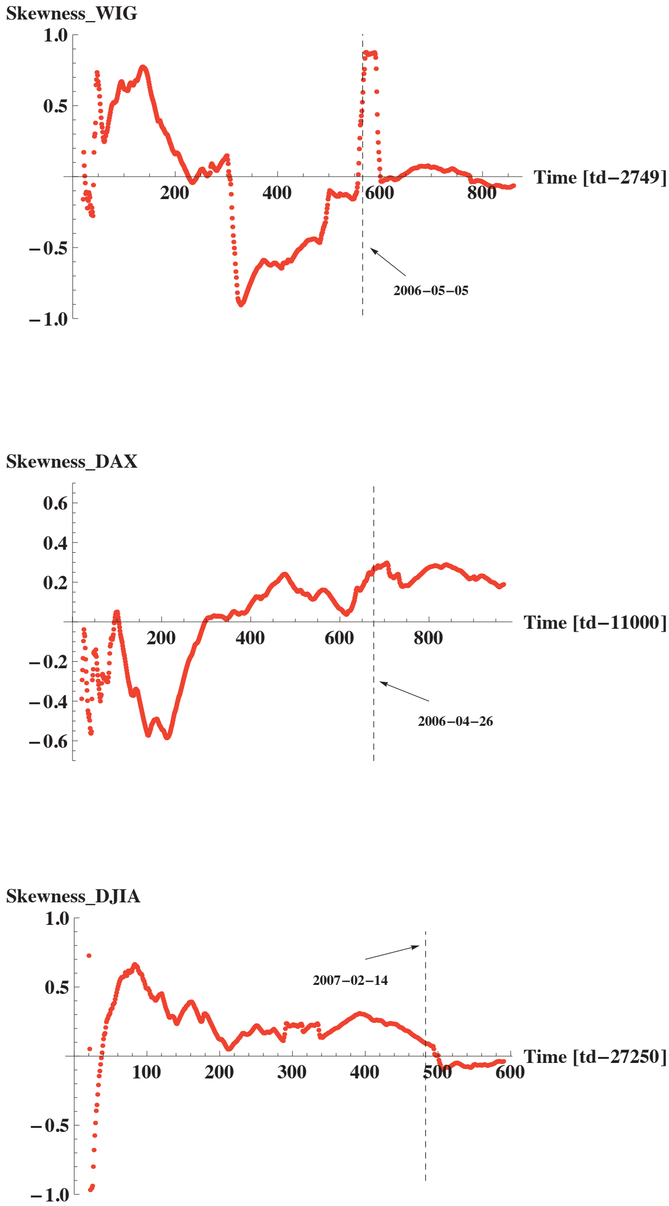
Właśnie ten estymator został wykreślony na rysunku 16, osiągając (z dobrym przybliżeniem) swoją wartość maksymalną równą 1.0 w bliskości progu CBT (oznaczonego pionową, przerywaną linią prostą). Wynik ten, razem z odpowiadającym mu wynikiem dla współczynnika $AR(1)$, stanowią najważniejszą obserwację fenomenologiczną niniejszego opracowania. Wyniki przedstawione na rysunku 17 są bezpośrednią konsekwencją powyższych.

2.8 Wskaźnik nieliniowości: skośność

Na rysunku 22 przedstawiono skośność zdetrendowanych sygnałów WIG, DAX i DJIA w zależności od czasu. Widoczna jest ich duża zmienność. Aby upewnić się co do statystycznej istotności tych skośności obliczono odpowiadające tym sygnałom skośności skumulowane. Te, bardziej stabilne i mniej czułe na nieistoitne zaburzenia wielkości przedstawiono w funkcji czasu na rysunku 23. Jest godnym uwagi, że zwłaszcza dla WIG (a więc dla giełdy o stosunkowo małej kapitalizacji) obserwujemy skok tej skumulowanej skośności na progu (oznaczonym jak zwykle pionową przerywaną linią prostą). Oznacza to, że w tym przypadku opis w ramach modelu zlinearyzowanego (patrz ostatnie równanie w (12)) nie jest wystarczający [13]. Spostrzeżenie to stanowi dla nas kolejną inspirację do badań nad katastroficznymi przejściami bifurkacyjnymi.



Rysunek 22: Wykresy zależnej od czasu skośności dla zdetrendowanych sygnałów WIG, DAX oraz DJIA; na pierwszy rzut oka nie widać tutaj żadnej wyraźnej asymetrii pomiędzy jej dodatnimi a ujemnymi wartościami.



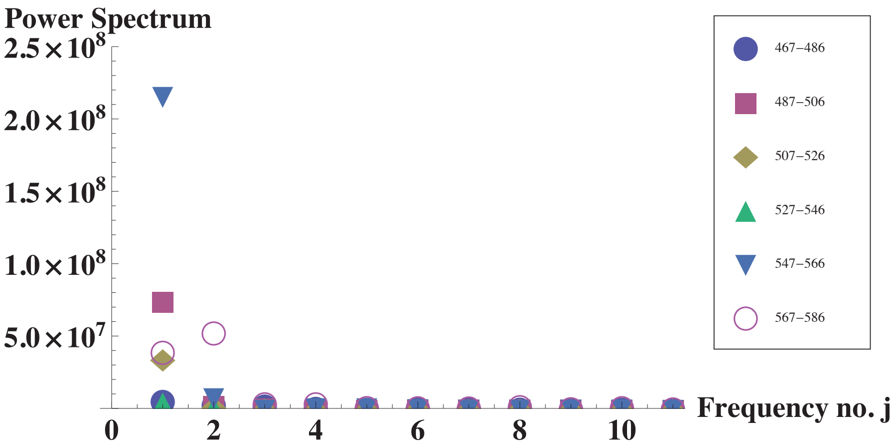
Rysunek 23: Wykresy zależnej od czasu skumulowanej skośności dla zdetrendowanych sygnałów WIG, DAX oraz DJIA. Widać wyraźny skok skośności dla WIGu na progu bifurkacyjnym. Dla DAXa obserwuje się wyraźnie jej niezerową wartość. Natomiast dla DJIA skumulowana skośność niemal znika w obszarze progu, co może oznaczać, że katastrofalne przejście bifurkacyjne ma w tym przypadku czysto liniowy charakter.

2.9 Periodogram

Dobrze wiadomo, że w przypadku szeregów czasowych o skończonej długości, widmo mocy ($PS(\omega)$, zwane też gęstością spektralną, patrz wzory (17) i (18) w Dodatku A.3) należy zamienić przez periodogram [11, 5, 28], czyli przez jego estymatę.

$$I(\omega_j) = T^{-1} \mid \sum_{t=1}^{T} x_t \, exp(-i\, t\omega_j \mid^2, \; j = 1, 2, \ldots, T = 20, \tag{5}$$

gdzie i jest jednostką urojoną a częstotliwość $\omega_j = \frac{2\pi}{T}(j-1)$. Pozwala to, na przykład, zaobserwować wyraźny wzrost $I(\omega_1 = 0) = T^{-1} \mid \sum_{t=1}^{T} x_t \mid^2$, tzn. wzrost tej wielkości w $\omega_1 = 0$ w porównaniu z jej wartościami dla pozostałych wartości częstotliwości (czyli $I(\omega_j)$, $j \geqslant 2$, patrz rysunki 24-26). Tym samym, możemy mówić o przesunięciu widma mocy ku czerwieni w miarę zbliżania się przedziałów czasowych (składających się, jak już mówiliśmy, z odcinków jednomiesięczych) ku progowi bifurkacyjnemu. Jest to kolejna własność dyskutowanego przejścia typu CBT.

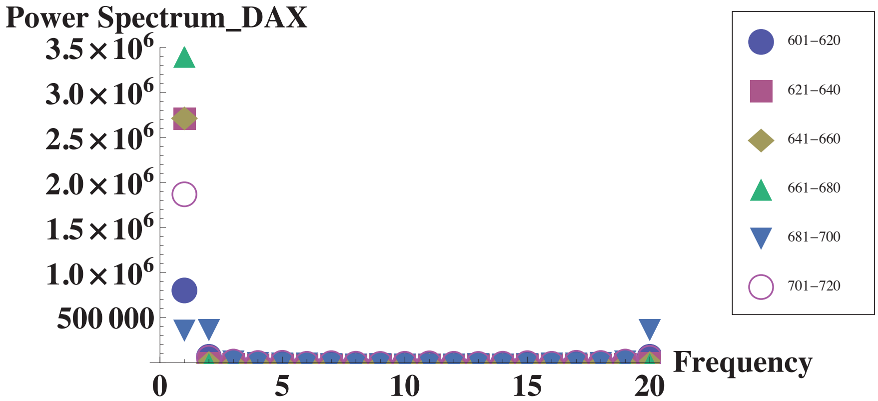


3

Rysunek 24: Empiryczne periodogramy dla WIGu wyznaczone dla sześciu kolejnych rozłączych miesięcznych przedziałów czasu, czyli składających się (dla prostoty) z czterech tygodni handlowych (po pięć dni każdy, tzn. dwudziestu dni). Pierwszy przedział zaczyna się w 467 dniu handlowym (licząc od początku rozważąnej hossy, czyli od daty 2004-02-08) a kończy w 486 dniu handlowym (w tym przypadku wartości periodogramu oznaczono kółkami). Wartości periodogramu dla ostatniego przedziału (oznaczone przez odwrócone trójkąty), rozciągającego się od 547 do 566 dnia transakcyjnego, posiadają wyraźne maksimum dla najniższej częstotliwości $\omega_1 = 0$ (przy czym $\omega_j = j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, 20$). Podkreślmy, że prawy brzeg powyższego przedziału jest zarazem progiem CBT. Pojawienie się wspomnianego maksimum jest zgodne z przewidywaniem jakie dostarcza wyrażenie (18). Jest to jedna z ważniejszych własności CBT.

3 Jakościowe wyjaśnienia

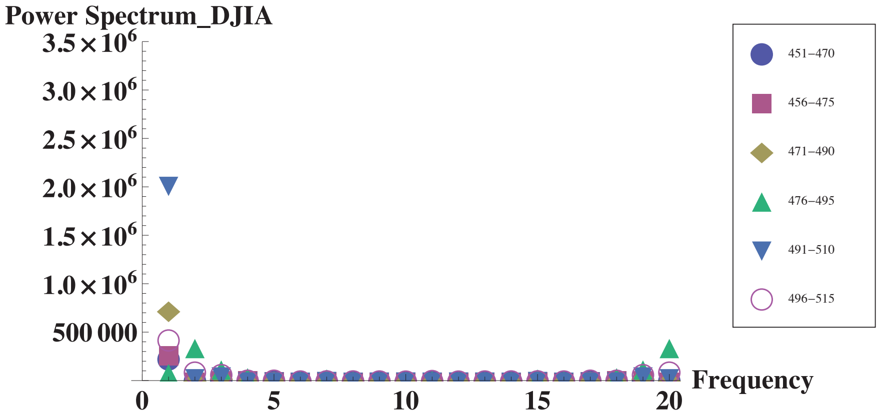
W rozdziale tym omawiamy zachowanie się prekursorów w miarę zbliżania się układu do progu bifurkacyjnego. Prekursory liniowe takie jak wariancja, czas relaksacji, poczerwienione widmo mocy oraz pokrewne wielkości wyprowadza się w ramach zlinearyzowanego szeregu czasowego zdefiniowanego ostatnim równaniem w (12) w Dodatku A.2. Natomiast nieliniowe, takie jak np. skośność, wymagają podejścia bazującego na istnieniu asymetrycznej nielinio-



3

Rysunek 25: Empiryczne periodogramy dla DAXa wyznaczone dla sześciu kolejnych, rozłączych miesięcznych przedziałów czasu, czyli składających się (dla prostoty) z czterech tygodni handlowych (po pięć dni każdy, tzn. dwudziestu dni). Pierwszy przedział zaczyna się w 601 dniu handlowym (licząc od początku rozważanej hossy, czyli od daty 2003-09-04) a kończy w 620 dniu handlowym (w tym przypadku wartości periodogramu oznaczono kółkami). Wartości periodogramu dla przedziału trzeciego od końca (oznaczone przez trójkąty), rozciągającego się od 661 do 680 dnia transakcyjnego, posiadają wyraźne maksimum dla najniższej częstotliwości $\omega_1 = 0$ (przy czym $\omega_j = j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, 20$). Podkreślmy, że powyższy przedział zawiera zarazem próg CBT. Pojawienie się wspomnianego maksimum jest zgodne z przewidywaniem jakie dostarcza wyrażenie (18). Jest to jedna z ważniejszych cech CBT widoczna nie tylko dla WIGu (patrz rysunek 24).

wości w " sile" (mówiąc językiem mechaniki) $f(x; P)$ (patrz równanie (6) w Dodatku A) a stąd w odpowiadającym jej "potencjale" $U(x; P)$ (zdefiniowanym równaniem (11) w Dodatku A.1). Ma to miejsce w najbliższym otoczeniu interesującego nas katastroficznego przejścia bifurkacyjnego (patrz środkowy wykres na rysunku 28). Tego typu mechanicystyczne podejście było rozważane w artykule [13]. Artykuł ten stanowił bezpośrednią inspirację do obrazowego (ale formalnego) traktowania w niniejszym opracowaniu CBT jako wynik ruchu



Rysunek 26: Empiryczne periodogramy dla DJIA wyznaczone dla sześciu kolejnych, rozłączych miesięcznych przedziałów czasu, czyli składających się (dla prostoty) z czterech tygodni handlowych (po pięć dni każdy, tzn. dwudziestu dni). Pierwszy przedział zaczyna się w 451 dniu handlowym (licząc od początku rozważanej hossy, czyli od daty 2005-03-16) a kończy w 470 dniu handlowym (tutaj wartości periodogramu oznaczono kółkami). Wartości periodogramu dla przedziału przedostatniego (oznaczone przez trójkąty), rozciągającego się od 491 do 510 dnia transakcyjnego, posiadają wyraźne maksimum dla najniższej częstotliwości $\omega_1 = 0$ (przy czym $\omega_j = j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, 20$). Podkreślmy, że próg CBT leży we wcześniejszym przedziale w punkcie 483. Pojawienie się wspomnianego maksimum jest zgodne z przewidywaniem jakie dostarcza wyrażenie (18). Jest to jedna z ważniejszych cech CBT widoczna nie tylko dla WIGu i DAXa (patrz rysunki 24 oraz 25).

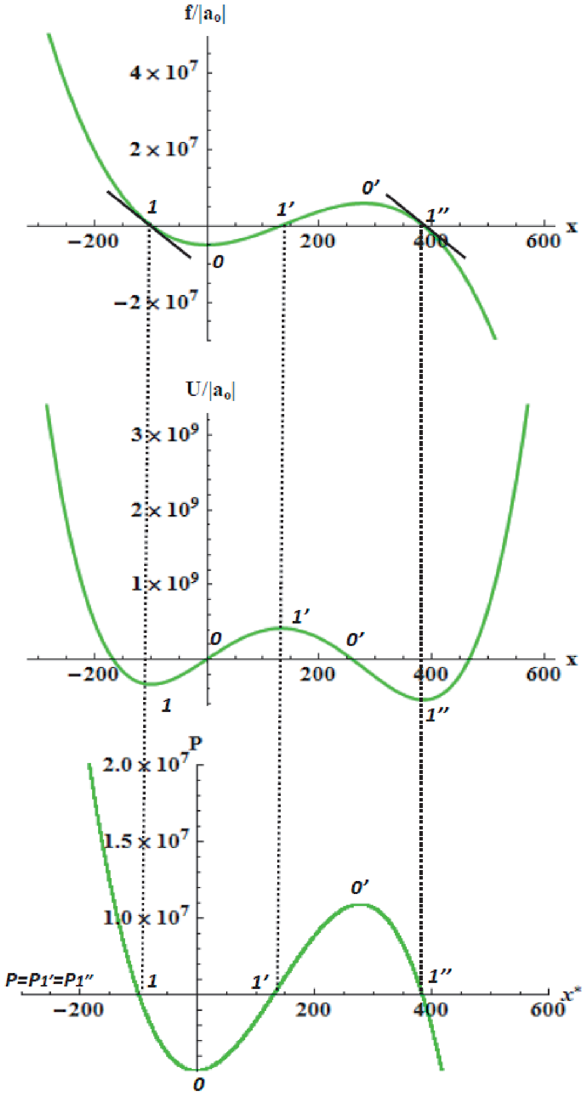
hipotetycznej piłeczki pomiędzy dwoma różnymi minimami potencjału.

Ilustracją powyższego niech będą schematyczne " zdjęcia"migawkowe trzech istotnie różnych sytuacji, jakie powstają w trakcie ewolucji układu poprzez próg CBT (patrz rysunki 27-29 oraz zbiorczy rysunek 30). Ewolucja ta kreśli na płaszczyźnie (x, P) trajektorię równowagową $x = x^*(P)$, składającą się z punktów stałych, będących miejscami zerowymi funkcji $f(x; P)$ (patrz punkty 1, $1'$, $1''$ zaznaczone na wszystkich trzech wykresach na rysunku

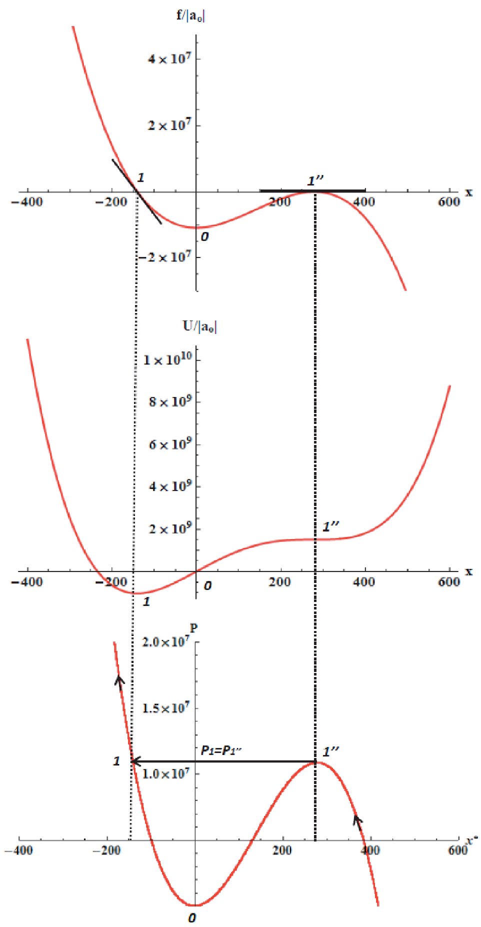
27, punkty 1, $1''$ widoczne także na wszystkich trzech wykresach na rysunku 28 oraz punkt 1 zaznaczony na wszystkich wykresach na rysunku 29 a także punkty 1, $1'$ i $1''$ na zbiorczym rysunku 30). Podkreślmy raz jeszcze, potrafimy precyzyjnie zdefinować stan równowagi (trwałej bądź nietrwałej) układu jako rozwiązanie równania (6).

Zauważmy, że wzrost absolutnej wartości parametru P prowadzi, z grubsza rzecz biorąc, do opuszczenia się krzywej f. Ponadto, ma miejsce asymetria kształtu tej krzywej w otoczeniu punktu $1''$. W wyniku tego, pierwiastki reprezentujące stabilne stany równowagowe układu (czyli punkty 1, $1''$ widoczne na rysunku 27 oraz punkt 1 widoczny na rysunku 29), przemieszczają się na lewo podczas gdy inne punkty reprezentujące stany równowagi niestabilnej (tzn. punkt $1'$ widoczny na rysunku 27), na prawo; punkt $1''$, widoczny na rysunku 28 w końcu znika (patrz rysunek 29). Następnie, w trakcie ewolucji układu, mogą się pojawić inne pierwiastki (związane z kolejnym przejściem bifurkacyjnym) i omówiony powyżej scenariusz powtarza się.

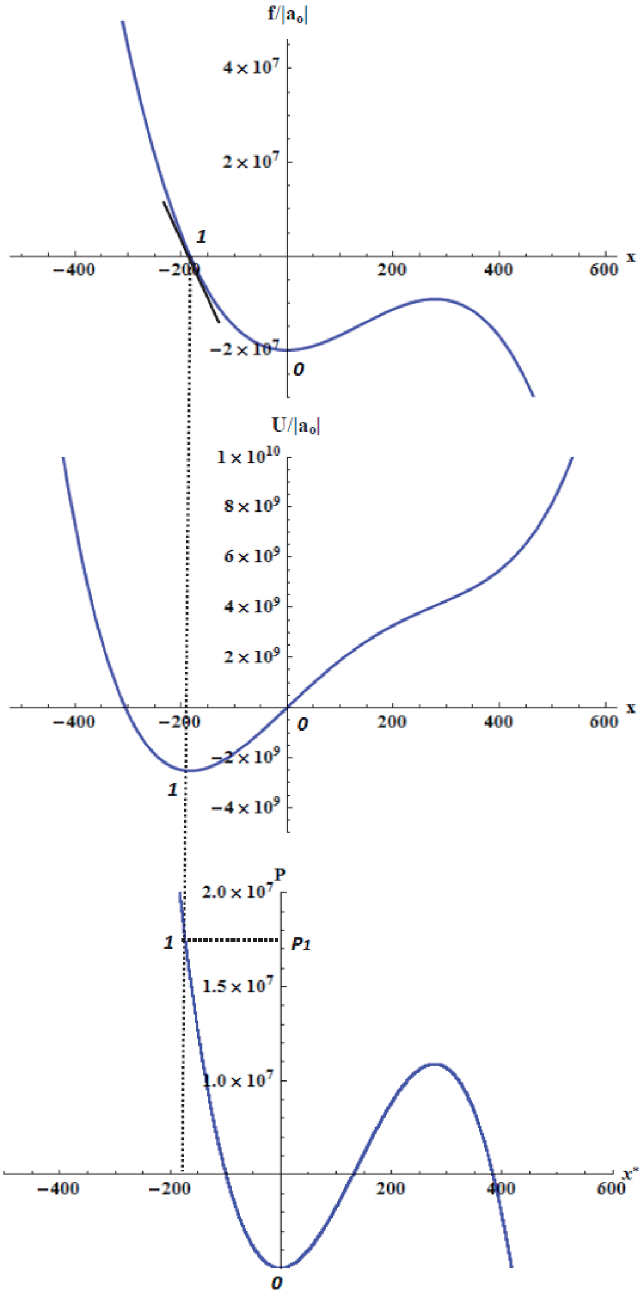
Podkreślmy, że dodatnio nachylone fragmenty bifurkującej krzywej równowagowej $P = P(x^*)$ przedstawione na dolnych wykresach na rysunkach 27-29 oraz (odpowiadający im) wstecznie biegnący fragment krzywej $P = P(x)$ na płaszczyźnie $f/|a_0| = 0$ na rysunku 30), reprezentują nietrwałe (niestabilne) stany równowagowe. Pozostałe części tych krzywych reprezentuja stany równowagi trwałej (stabilne). Jeżeli układ zostanie wytrącony ze stanu równowagi trwałej to (z definicji) powróci do niego, przy czym $\tau(P)$ jest jego czasem relaksacji. Natomiast układ wytrącony ze stanu równowagi nietrwałej nie powróci już do niego, przechodząc do jednego z dwóch stanów równowagi trwałej układu. W istocie rzeczy, wspomniane fragmenty krzywej złożone ze stanów nierównowagowych reprezentują odpychający próg rozddzielający dorzecza atraktorów obu stanów równowagi trwałej położone na lewej i prawej



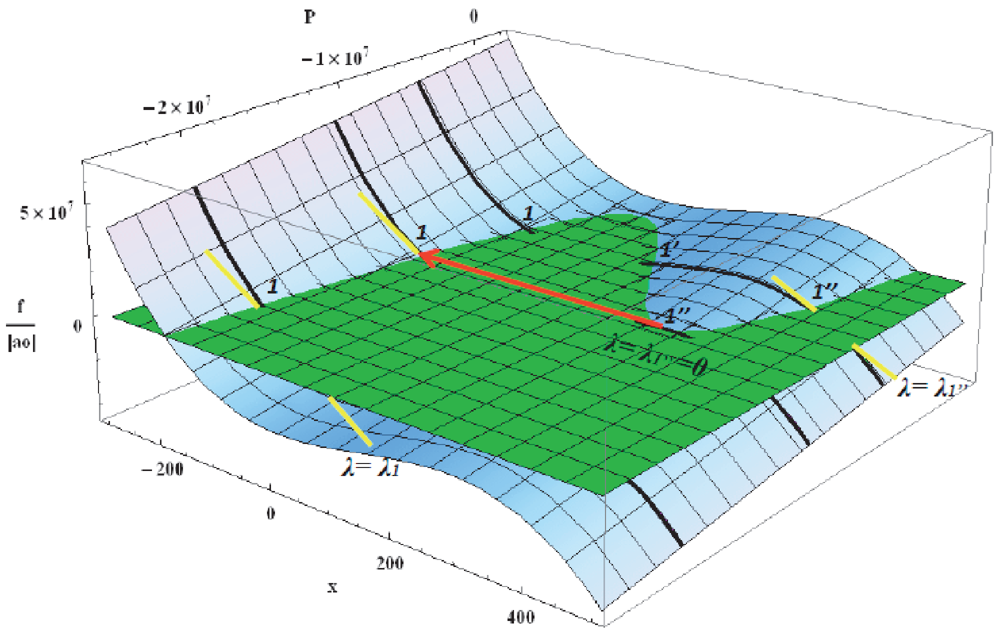
Rysunek 27: Trzy komplementarne ujęcia stanu układu przed katastroficznym przejściem bifurkacyjnym (obszar oznaczony na rysunku 20 terminem ” Before”), jakie stoi za najwyższym pikiem (igłą) zależnej od czasu wariancji przedstawionej na rysunku 13. Górny rysunek pokazuje schematyczną zależność siły $f(x;P)$ od x dla ustalonej wartości parametru P. Punkty równowagi (punkty stałe) $x = x^*_1$, $x^*_{1'}$ oraz $x^*_{1''}$ są rozwiązaniami równania $f(x;P) = 0$. Na rysunku środkowym przedstawiono schematycznie analogiczną, odpowiadającą tej sile zależność potencjału $U(x;P)$ od x, Natomiast, na dolnym rysunku zamieszczono schematyczną trajektorię równowagową badanego układu, czyli x^* w zależności od przykładowego parametru skalarnego P.



Rysunek 28: Trzy komplementarne ujęcia stanu układu na progu CBT (wąski obszar oznaczony na rysunku 20 terminem " At"). Krzywa na górnym wykresie jest przesunięta w dół w stosunku do analogicznej krzywej na wcześniejszym rysunku 27. Tym samym, określona została strzałka czasu definiująca kierunek ewolucji układu (w kierunku progu CBT). Zakres obszaru bifurkacji dla parametru P rozciąga się od $P = P_0 = P(x_0)$ do $P = P_1 = P_{1''}$, obejmując obszar niestabilnych punktów stałych równania $f(x^*; P) = 0$. Jest to dobrze widoczne na dolnym wykresie (dodatnio nachylony fragment krzywej). Na dolnym wykresie widać także katastroficzne przejście bifurkacyjne z punktu zwrotnego $1''$ do (zwykłego) punktu 1 (zaznaczone długą strzałką). W Dodatku A.5 zbadano własności wszystkich trzech punktów stałych a w tym przedstawiono ich parametryzację. Ponadto, na wykresie środkowym jest dobrze widoczna, pozytywnie zorientowana asymetria potencjału $U(x; P)$ w otoczeniu punktu równowagi układu $1''$ (patrz środkowy wykres). Właśnie istnienie tej tak znacznej asymetrii skutkuje skumulowaną, silnie dodatnią skośnością sygnału (patrz rysunek 23).



Rysunek 29: Schematyczne, komplementarne ujęcie stanu układu po minięciu progu katastroficznego przejścia bifurkacyjnego (obszar oznaczony na rysunku 20 terminem ” After”). Na przykład, na środkowym wykresie przedstawiono kształt krzywej potencjału $U(x; P)$, który w otoczeniu punktu stałego x_1 jest (niemal) symetryczny. Skutkuje to znikaniem skośności po przekroczeniu przez układ progu CBT (patrz rysunek 23).



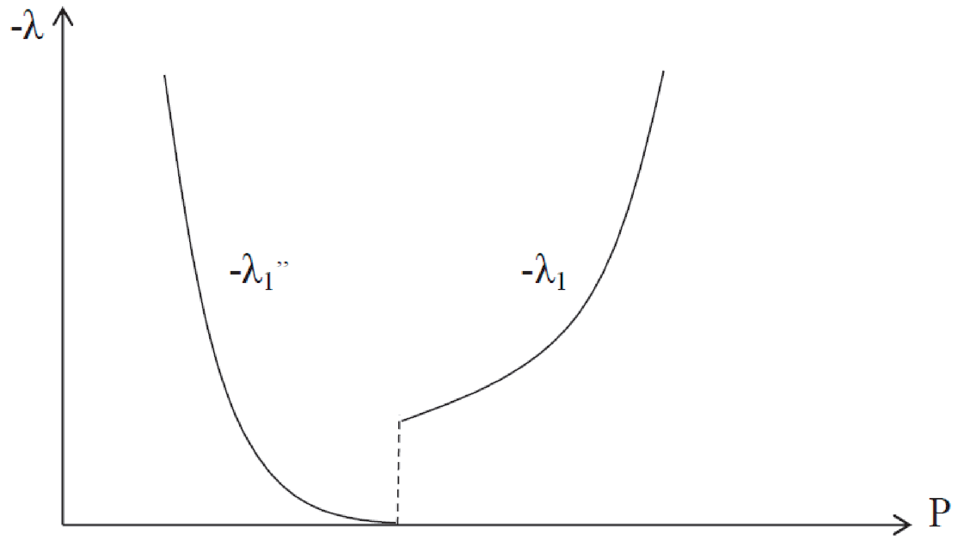
Rysunek 30: Zbiorczy, trójwymiarowy wykres pokazujący anatomię powstania bifurkującej trajektorii stanów równowagowych układu $P = P(x^*)$. Trajektoria ta (czyli krzywa równowagowa), zbudowana z pierwiastków $1''$, $1'$ i 1, powstała z przecięcia płaszczyzny $f/|a_0| = 0$ z powierzchnią $f/|a_0| = f(x;P)/|a_0|$. Należy pamiętać, że punkty równowagi nietrwałej $(x_{1'})$ stanowią jej fragment biegnący wstecznie. Ponadto, katastroficzne przejście bifurkacyjne ze stanu równowagowego $1''$ do stanu równowagowego 1 zaznaczono długą pogrubioną strzałką. Nachylenie stycznych w wybranych, charakterystycznych punktach równowagi układu jest miarą wielkości λ schematycznie przedstawionej na rysunku 31. Na wykresie nie uwzględniono " rozmywającego" wpływu szumu η_t na stany równowagowe układu.

gałęzi bifurkującej krzywej równowagowej $P = P(x^*)$.

W niniejszym opracowaniu koncentrujemy się głównie na analizie stabilnych stanów równowagowych. Niektóre z nich, typu końcowego stanu $1''$ (patrz np. zbiorczy rysunek 30) są punktami zwrotnymi, z których (pod wpływem nawet znikomego zaburzenia spontanicznego lub systematycznego) układ może w sposób nagły przejść nawet do odległego stanu równowagowego (patrz przejścia tego typu oznaczone długą pogrubioną strzałką na dolnym wykresie na rysunku 28 oraz na rysunku 30). Podkreślmy, że tylko w otoczeniu stabilnych stanów równowagowych wariancja zdetrendowanego sygnału jest rozbieżna według prawa potęgowego (patrz wyrażenie (16) w Dodatku A.3). Jest to bezpośrednią konsekwencją katastroficznego (krytycznego) spowolnienia (CSD, czyli zerowania się współczynnika szybkości relaksacji $-\lambda$), które może być widoczne przed progiem CBT (patrz wykresy na rysunku 17).

Związana z powyższym rozbieżność średniego czasu relaksacji $\tau(= 1/|\lambda|)$ może być rozumiana na intuicyjnym poziomie w sposób następujący: skoro czas powrotu do wyjściowego stanu równowagowego rośnie nieograniczenie (patrz Dodatki A.2 i A.4.1) to oznacza, że zanika zdolność układu do wyrelaksowania ewentualnych chwilowych (egzo- lub spontanicznych endogenicznych) szoków, prowadząc do nadmiernego wzrostu zależnej od czasu wariancji. Innymi słowy, CSD niszczy zdolność układu do degradacji fluktuacji [34].

Należy tutaj dodać uwagę dotyczącą możliwego przejścia na samym progu bifurkacyjnym. Wówczas, jak to można dostrzec na rysunku 30, współczynnik $-\lambda$ ma nieciągłość (tak jak to przedstawiono schematycznie na rysunku 31). Ponieważ nieciągłość ta jest niewielka a krok czasowy wynosi w tym przypadku jeden miesiąc, zaobserwowanie jej na wykresach zamieszczonych na rysunku 17 jest wciąż wyzwaniem (także ze względu na znaczny błąd towarzyszący tego typu danym empirycznym).



Rysunek 31: Schematyczny przebieg współczynnika $-\lambda$ w otoczeniu progu CBT. Celem zwiększenia wyrazistości rysunku, nieciągłość tego współczynnika powiększono (co zaznaczono fragmentem pionowej przerywanej linii prostej). Oznaczenie $-\lambda_{1''}$ odnosi się do stanów równowagi układu leżących przed progiem bifurkacyjnym i oznaczonych przez $x^*_{1''}$ natomiast, $-\lambda_1$ dotyczy analogicznych stanów równowagi układu leżących za progiem i oznaczonych przez x^*_1.

Warto podkreślić, że wzrost skośności (w przypadku indeksów WIG i DAX) zaobserwowany w obszarze igły zależnej od czasu wariancji nie daje się wyjaśnić w ramach zlinearyzowanych teorii. Do jej opisu potrzebne jest podejście, które (mówiąc językiem mechaniki) wprowadza potencjał nieliniowy i asymetryczny w otoczeniu punktu $1''$ (w naszym przypadku indeksów WIG i DAX współczynnik skośności jest dodatni) - dopiero wtedy doprowadza to do potrzebnego asymetrycznego równowagowego rozkładu prawdopodobieństwa (patrz równanie (10 w Dodatku A.1, w którym występuje jawnie wspomniany potencjał).

Należy dodać, że szczególnie interesujące podejście traktujące rynek finansowy na sposób wielofazowy, poprzez opis mechanicystyczny (tzn. od strony potencjału), można znaleźć w pracy Tonisa Vagi [40]. Autor przyjął, że potencjał jest nieliniowy (w ogólności dwudolinowy), co pozwoliło mu wziąć pod uwagę (w zasadzie) cztery fazy rynku. Na tej drodze wprowadził hipotezę rynku koherentnego. Pomimo, że jego rozważania zmierzają w w tym samym kierunku co nasze, autor nie rozważał przejść bifurkacyjnych pomimo, że istnieją one dla tego typu potencjału.

4 Krótkie podsumowanie

Idąc za sugestią Thomasa Luxa wskazującą na możliwość istnienia katastroficznych (nieciągłych) przejść bifurkacyjnych na rynkach finansowych (czyli przemian fazowych pierwszego rodzaju) [29], zbadaliśmy standardowe wskaźniki (przede wszystkim liniowe ale także i nieliniowe prekursory) ostrzegające przed subkatastroficznymi i katastroficznymi przejściami bifurkacyjnymi na giełdach o małej, średniej i dużej kapitalizacji a tam, przykładowo, dla ostatnich dobrze uformowanych wieloletnich pików. Wszystkie te prekursory sugerują (konsystentnie), że wyniki przedstawione na rysunkach 2-14, 16-21 oraz 23 powinny być identyfikowane jako sygnatury wspomnianych przejść.

To co jest zaskakujące w naszym przypadku to fakt, że wspomniane powyżej przejścia są widoczne w dziennych danych empirycznych (na zamknięciu) tworzących bąble giełdowe a więc w danych szczególnie wygodnych (naturalnych) do archiwizowania i operowania (w tym np. detrendowania). Interesującym jest fakt, że próg CBT (ściśle związany z nieciągłością sygnałów zaznaczonych na rysunkach 2-4) został zaobserwowany na wiele miesięcy przed światowym kryzysem finansowym. Widać także, że przed tą nieciągłością zmienność sygnału nie miała charakteru gwałtownego.

W podsumowaniu, główne wyniki niniejszej II Części Projektu można ująć następująco.

(1) Zaobserwowano, że w otoczeniu CBT wspólczynnik λ jest ujemny, zanikając w miarę zbliżania się układu do progu CBT (patrz rysunek 17); za progiem λ ponownie maleje (czyli $-\lambda$ rośnie) chociaż trudno jest powiedzieć (ze względu na znaczny rozrzut danych empirycznych), że na progu ma miejsce jego nieciagłość. Pomimo tego, nasze badania upoważniają nas do sformułowania hipotezy o pojawieniu się zjawiska katastroficz-

nego (krytycznego) spowolnienia. Jest to tym bardziej istotne, że λ jest obecne we wszystkich wzorach dotyczących liniowych prekursorów, niejako sterując nimi.

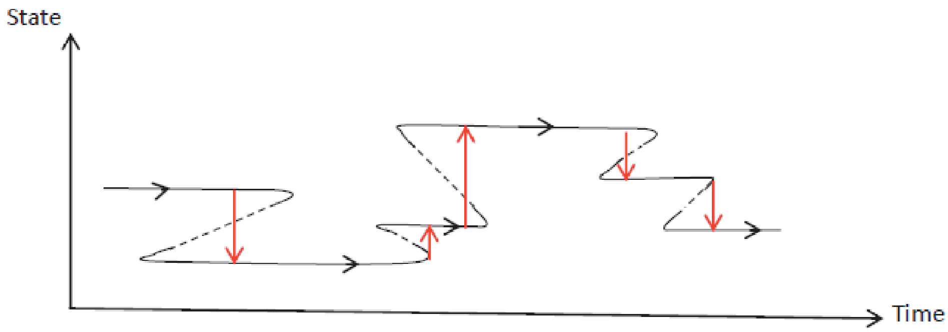
(2) Ponieważ, oprócz wielkości λ byliśmy w stanie wyznaczyć parametr przesunięcia b, pozwoliło nam to na skonstruowanie bifurkującej trajektorii $x^* = x^*(P)$ równowagowej ewolucji układu, przy założeniu monotonicznie rosnącej zależności parametru sterującego P od czasu liczonego w miesiącach handlowych. Umożliwiło to nam bezpośrednie obserwacje subkatastroficznych i katastroficznych przejść bifukracyjnych (a w tym nawet efektu migotania tuż przed progiem CBT; patrz rysunki 18-21).

(3) Ponadto, zauważyliśmy, że subkatastroficznym i katastroficznym przejściom bifurkacyjnym towarzyszy zdarzenie superekstremalne. Postawiło to istotne (wciąż otwarte) pytania o współzależność obu tych zjawisk.

(4) Na podstawie obserwacji danych empirycznych sformułowaliśmy hipotezę mówiącą, że subkatastroficzne i katastroficzne przejścia bifurkacyjne są prekursorami kryzysów i krachów giełdowych.

(5) Uzyskane wyniki pozwalają zasugerować możliwą klasę scenariuszy ewolucji giełd (czy ogólniej rynków finansowych; patrz rysunek 32) składającą się z szeregu nieciągłych (typu bifurkacyjnego) i ciągłych przemian fazowych (niezaznaczonych na tym rysunku) przedzielonych stanami rynku (niemal) efektywnego. Oczywiście, te trzy charakterystyczne rodzaje stamów są rozgraniczone jakimiś stanami przejściowymi. Tego typu punkt widzenia koresponduje z wynikami klasycznej pracy Tonisa Vagi [40] omawiającej różne możliwe fazy istnienia rynku finansowego, w której jednak nie było mowy o przejściach typu nieciągłego rozważanych w niniejszym opracowaniu.

4



Rysunek 32: Schematycznie przedstawiona ewolucja giełdy składająca się m.in. z wielu różnych subkatastroficznych i katastroficznych przejść bifurkacyjnych (nieciągłych, czyli pierwszego rodzaju zaznaczonych strzalkami). Oczywiście, przejścia te mogą być rozdzielone jakimiś innymi (które, dla uproszczenia, nie zostały juz zaznaczone na wykresie) np. ciągłymi (czyli drugiego rodzaju) jak też typu procesu Wienera, czy ogólniej mówiąc procesami gaussowskimi.

4

(6) W pracy, niejako przy okazji, dostarczono na drodze porównania wyniaków odpowiednich symulacji komputerowych Monte Carlo z danymi empirycznymi, jakościowych argumentów (patrz rysunki 9, 10 i 11), że dynamikę stochastyczną na poziomie mikroskopowym należy badać w ramach stochastycznych procesów podporządkowanych [8]-[23]. Nie mniej, ilościowe odtworzenie tak dużego nachylenia (w skali log-log wynoszącego ponad 5), jakie uzyskano dla absolutnych wartości zmian (czyli szumu) kursu EUR/CHF na rynku walutowym (patrz wykres na rysunku 12) pozostaje wciąż wyzwaniem.

Na zakończenie należy jednak podkreślić, że odpowiedź na pytanie czy pojawienie się subkatastroficznych i katastroficznych przejść bifurkacyjnych można traktowac jako zapowiedź krachu giełdowego także dla innych niż ostatni pozostaje wciąż otwarte (należałoby przeprowadzić dla innych krachów analogiczne badania co, na szczęście, wydaje się w pełni realne). Zatem, niniejsze opracowanie należy raczej traktować jako dobrze umotywowaną propozycję metodologiczną niż jako ostateczną odpowiedź na pytanie o generyczny charakter obserwowanych subkatastroficznych i katastroficznych przejść bifurkacyjnych.

A Liniowe indykatory krytycznego spowolnienia z bifurkacyjnego punktu widzenia

W niniejszym Dodatku rozważane są:

(a) liniowe wskaźniki katastroficznego spowolnienia takie jak: zależna od czasu wariancja, średni czas relaksacji oraz współczynnik szybkości relaksacji (dla tych wielkości czas jest liczony w miesiącach handlowych) jak też widmo mocy (a dokładniej periodogram) wykazujący efekt "poczerwienienia" (jest o tym mowa poniżej),

(b) wskaźnik nieliniowy w postaci współczynnika skośności (patrz rozdz. 2.8).

Przypuśćmy zatem, że zdetrendowany, zależny od czasu sygnał (tutaj czas jest liczony w dniach), $x_t \stackrel{\text{def.}}{=} X(t) - \text{Trend}(t)$, spełnia równanie różnicowe dynamiki stochastycznej pierwszego rzędu postaci:

$$x_{t+1} - x_t = f(x_t; P) + \eta_t, \tag{6}$$

gdzie P jest parametrem sterującym (kontrolnym, w ogólności może być wektorem) natomiast $\eta_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$, jest (przykładowo) δ-skorelowaną zmienną losową[4] $(0, \sigma^2)$

Na rysunkach 27-29 zamieszczono m.in. " zdjęcia" migawkowe schematycznych wykresów przedstawiających przebieg funkcji f w zależności od zmiennej niezależnej (objaśniającej) x dla różnych wartości parametru sterującego P. Dalej, na zbiorczym wykresie 30 zdjęcia te zostały zebrane w postaci trójwymiarowego wykresu. Widać, że funkcja f może być wielomianem trzeciego stopnia względem tej zmiennej, mającym współczynniki zależne od parametru P (patrz Dodatek A.5).

[4]Tutaj δ oznacza deltę Kroneckera, podczas gdy t jest czasem liczonym w dniach transakcyjnych w ramach danego miesiąca handlowego (który ma dwadzieścia dni, czyli cztery tygodnie handlowe). Właśnie, miesiąc handlowy jest szerokością okna czasowego, w którym wyznaczane są takie wielkości jak np. λ.

A.1 Formalizm dla czasu ciągłego

Można teraz rozważać alternatywne (mechanicystyczne a także termodynamiczne) sformułowanie równania (6), którego podstawowym elementem jest równanie dynamiki stochastycznej Langevina [37], [19]. Zatem, sformułowanie to prowadzi do następujacego równania różniczkowego

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} = -\frac{\partial U(x_t; P)}{\partial x_t} + \eta_t, \tag{7}$$

gdzie U pełni rolę np. mechanicznego potencjału natomiast η siły stochastycznej Langevina. Równanie to jest równoważne równaniu Fokkera-Plancka [19].

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}, \tag{8}$$

które ma postać równania ciągłości (prawa zachowania) na gęstość prawdopodobieństwa $\mathcal{P}(x,t)$, gdzie gęstość prądu jest dana przez następujące równanie konstytutywne,

$$j(x,t) = f(x;P)\,\mathcal{P}(x,t) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \mathcal{P}(x,t)}{\partial x}. \tag{9}$$

Rozwiązanie równowagowe równania (8) (otrzymane bezpośrednio z żądania aby w układzie nie było żadnych systematycznych prądów, tzn. aby w równaniu (9) $j(x,t) = 0$), jest dane przez wyrażenie

$$\mathcal{P}^{eq}(x) \sim \frac{2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{2}{\sigma^2}\,U(x;P)\right), \tag{10}$$

gdzie potencjał $U(x;P)$ pojawił się już wcześniej w równaniu (7), podczas gdy

$$f(x;P) = -\frac{\partial U(x;P)}{\partial x} \tag{11}$$

jest (w tej terminologii) siłą mechaniczną. Obie formuły (10) i (11) odgrywają ważną rolę w naszych wyjaśnieniach. Innymi słowy, pozytywna asymetria potencjału U w otoczeniu punktu stałego $1''$ leżącego na progu bifurkacyjnym (patrz środkowy wykres na rysunku 28) jest odpowiedzialna za dodatnią wartość skumulowanej skośności (dla zdetrendowanych sygnałów WIG i DAX) w tym otoczeniu.

Biorąc pod uwagę ducha zależnej od czasu (generycznej) teorii Ginzburga-Landaua przemian fazowych [37], możemy przyjąć, że potencjał $U(x;P)$ jest wielomianem czwartego stopnia (stąd f jest wielomianem stopnia trzeciego, patrz Dodatek A.5). Jest to już proste zadanie techniczne ustalić związki pomiędzy parametrami tego wielomianu, gdy układ dąży do progu CBT.

Nasze rozważania przeprowadzone w tym Dodatku można podzielić na cztery etapy: (i) analizę liniowej stabilności, (ii) analizę nierównowagowej katastroficznej dynamiki w pobliżu progu CBT, (iii) analizę wielomianowej postaci siły f oraz dla kompletności (iv) alternatywne wyprowadzenie zasadniczych własności autoregresywnych szeregów czasowych pierwszego rzędu.

A.2 Analiza liniowej stabilności

Na tym etapie badamy liniową stabilność stanu równowagowego, tzn. badamy relaksację układu lekko wytrąconego ze stanu równowagowego [41]. Stany równowagowe układu definiowane są jako pierwiastki (miejsca zerowe, punkty stałe) funkcji $f(x;P)$ dla ustalonej wartości parametru sterującego P. Definicja ta nie wyklucza istnienia addytywnej fluktuacji opisanej zmienną losową

η. Na przykład, na rysunku 27 trzeci pierwiastek lokuje się w $x = x^*_{1''}(P_{1''})$. Właśnie, nasze rozwinięcie dokonuje się w tym punkcie z dokładnością do wyrazów liniowych w zmiennej $x_t - x^*_{1''}(P_{1''})$. Co więcej zakładamy, że pierwiastek ten znajduje się w najbliższym sąsiedztwie progu CBT (patrz rysunki 27 i 28). To liniowe rozwinięcie f w punkcie stałym $1''$, daje

$$\begin{aligned} y_{t+1} - y_t &= f(x^*_{1''}(P_{1''}); P_{1''}) + \lambda\, y_t + \eta_t = \lambda\, y_t + \eta_t \\ &\Leftrightarrow \; y_{t+1} = (1+\lambda)\, y_t + \eta_t \end{aligned} \tag{12}$$

ponieważ, zgodnie z definicją pierwiastka, $f(x^*_{1''}(P_{1''});P_{1''})$ znika. Zastosowaliśmy tutaj następującą notację: (i) dla wychylenia ze stanu równowagowego (zwanego także nieunormowanym parametrem porządku) $y_t = x_t - x^*_{1''}(P_{1''})$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, oraz dla (ii) współczynnika szybkości relaksacji $\lambda(P) = \frac{\partial f(x;P)}{\partial x}\,|_{x=x^*(P)}$.

Ostatnie równanie w (12), przepisane w postaci

$$x_{t+1} = (1+\lambda)\, x_t + b + \eta_t,\ b = -\lambda\, x^*_{1''}, \tag{13}$$

umożliwia otrzymanie λ oraz b z dopasowania do danych empirycznych, tak jak to pokazano przykładowo na rysunku 15 (wartość przesunięcia b jest w skali głównego rysunku niemal niewidoczna). Wynikająca stąd wielkość $x^*_{1''}$ została przedstawiona (dla zdetrendowanych indeksów WIG, DAX oraz DJIA) na rysunkach 18-21.

Rozwiązanie równania (12) jest postaci

$$\begin{aligned} y_t &= (1+\lambda)^t y_0 + (1+\lambda)^{t-1} \sum_{\tau=0}^{t-1} \eta_\tau (1+\lambda)^{-\tau} \\ &\approx \exp(\lambda t) \left[y_0 + \int_0^t \eta_\tau \exp(-\lambda\tau) d\tau \right], \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie pierwsza z równości jest spełniona dla $t \geqslant 1$. Druga równość (14) ma postać wykładniczą ponieważ ograniczyliśmy nasze rozważania do przypadku $|\,\lambda\,| \ll 1$ oraz $t \gg 1$, tzn. do najbliższego otoczenia progu dla długich czasów.

Z równania (14) wynika, że dany stan jest równowagowy jeśli[5] $-2 < \lambda < 0$, w przeciwnym razie nie jest on stanem równowagowym. Stąd na przykład, stany 1 oraz $1''$ przedstawione rysunku 27 definiują stabilne stany równowagowe. W ogólności, stabilne stany (punkty) równowagowe (czyli przyciągające punkty stałe) są położone na fragmentach krzywej bifurkacyjnej oznaczonych linią ciagłą, podczas gdy odpychające punkty stałe (reprezentujące niestabilne stany równowagowe) są położone na fragmencie oznaczonym linią przerywano-

[5]Zaobserwowaliśmy, że dla naszych danych empirycznych zawsze była spełniona mocniejsza nierówność $-1 < \lambda < 0$.

kropkowaną (patrz wszystkie dolne wykresy na rysunkach 27-29 oraz wykres na rysunku 30).

Dodajmy, że dla stabilnych stanów równowagowych średni czas relaksacji $\tau(P) = 1/ \mid \lambda(P) \mid$ jest dobrze określoną dodatnią wielkością. W szczególności, wielce interesujące są punkty równowagowe x_1^* oraz $x_{1''}^*$ widoczne na rysunku 28 ponieważ, są one punktami granicznymi obszary bifurkacyjnego zwane katastroficznymi punktami bifurkacyjnymi, przy czym punkt $x_{1''}^*$ jest zarazem punktem zwrotnym. Punkty te reprezentują dwa najbardziej istotne stany spośród rozważanych w niniejszym opracowaniu.

A.3 Ogólne własności pierwszorzędowego autoregresywnego szeregu czasowego

Dobrze wiadomo [11, 5], że szczególnie użyteczne wielkości, tzn. wariancja, kowariancja, funkcja autokorelacji jak też widmo mocy są ze sobą powiązane. Oblicza się je wykorzystując ścisłe rozwiązanie w (12).

Zatem, obliczamy kowariancję a stąd $ACF(h)$

$$\begin{aligned} Cov(y_t\, y_{t+h}) &= \langle y_t\, y_{t+h}\rangle - \langle y_t\rangle \langle y_{t+h}\rangle = (1+\lambda)^h\, Var(y_t) = \\ Cov(x_t\, x_{t+h}) &= (1+\lambda)^h\, Var(x_t) \\ &\Leftrightarrow\; ACF(h) = \frac{Cov(y_t\, y_{t+h})}{Var(y_t)} = \frac{Cov(x_t\, x_{t+h})}{Var(x_t)} \\ &= (1+\lambda)^{|h|} \\ &\Rightarrow\; ACF(h) \approx \exp(\lambda \mid h \mid),\; h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (15) \end{aligned}$$

gdzie λ jest (jak zobaczymy w Dodatku A.4.1) wyrażone równaniem (21) a wariancja $Var(y_t)$ jest dana (po prostych algebraicznych przekształceniach) przez nadzwyczaj ważną formułę

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= \left\langle y_t^2 \right\rangle - \langle y_t\rangle^2 = Var(x_t) \\ &= Var(y_0)(1+\lambda)^{2t} - \frac{1}{\lambda(2+\lambda)}\left[1-(1+\lambda)^{2t}\right]\sigma^2, \qquad (16) \end{aligned}$$

tutaj $Var(y_t) = Var(x_t)$ a notacja $\langle \ldots \rangle$ oznacza średnią po szumie i warunkach tutaj $Var(y_t) = Var(x_t)$ a notacja $\langle \ldots \rangle$ oznacza średnią po szumie i warunkach początkowych (zespole statystycznym rozwiązań y_t). Ostatnia z równości w (15) jest spełniona dla $\mid \lambda \mid \ll 1$. Współczynnik $1 + \lambda$ (obecny w (15)) jest po prostu jednokrokową funkcją autokorelacji, która może być wyznaczona bezpośrednio z danych empirycznych (patrz rysunek 16). Można powiedzieć, że jest to zasadnicze osiągnięcie niniejszej pracy.

Co więcej, można łatwo wykazać na drodze analitycznej, wykorzystując (21) (patrz Dodatek A.4.1), że wariancja a stąd kowariancja zanikają według prawa potęgowego w miarę jak system zbliża się do progu CBT podczas, gdy funkcja autokorelacji staje sie wtedy rozciągniętym eksponensem (patrz równanie (22) w Dodatku A.4.1).

Teraz, ponieważ dysponujemy już prostą ścisłą formułą na stacjonarną, h-krokową funkcję autokorelacji, $ACF(h)$, możemy uzyskać widmo mocy $PS(\omega)$ w ścisły analityczny sposób. Mianowicie, z twierdzenia Wienera-Khinchina [24] otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} PS(\omega) &= \sum_{h=-H}^{H} ACF(h)\, \exp(-i\, h\, \omega) \\ &= \sum_{h=-H}^{H} (1+\lambda)^{|h|}\, \exp(-i\, h\, \omega) \\ &= -\frac{\lambda(2+\lambda) - 2(1+\lambda)^H(1+\lambda-\cos(\omega))}{2+\lambda(2+\lambda) - 2(1+\lambda)\cos(\omega)}, \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie $0 < H \leqslant \infty$. Oczywiście, dla $H \to \infty$ składnik zwierający czynnik $(1+\lambda)^H$ w liczniku znika. Ponadto, dla $\mid \omega \mid \ll 1$ otrzymujemy z wyrażenia (17), że

$$\begin{aligned} PS(\omega) &\approx -\frac{\lambda(2+\lambda) - 2(1+\lambda)^H(\lambda - \omega^2/2)}{\lambda^2 - (1+\lambda)\omega^2} \\ &\approx -\frac{\lambda - (1+\lambda)^H(2\lambda - \omega^2)}{\lambda^2 - \omega^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie ostatnie wyrażenie w (18) zostało otrzymane przy dodatkowym warunku $\mid \lambda \mid \ll 1$. Wyrażenie (18) mówi, że w miarę jak układ osiąga próg bifurkacyjny singularność (czyli maksimum igły tworzonej tym razem przez widmo mocy) przesuwa się systematycznie do coraz niższych częstotliwości aż do znikania λ. To właśnie jest efekt poczerwienienie widma mocy.

Dla znikającej wartości λ wariancja oraz kowariancja rozbiegają się zgodnie z prawem potęgowym, podczas gdy funkcja autokorelacji dąży do swojej wartości maksymalnej równej 1. Oprócz tego, wszystkie momenty nieparzyste zmiennej y_t znikają. Stąd oraz z równania (16) otrzymujemy, że (w ramach teorii liniowej) skośność również znika.

Co więcej, można łatwo pokazać (znowu wykorzystując rozwiązanie (14)), że nadmiarowa kurtoza znika jeżeli zmienne y_0 i η_t są losowane z jakiś rozkładów symetrycznych.

Oznacza to, że w ramach teorii liniowej (tzn. w otoczeniu progu CBT) rozkład zmiennej y_t jest gaussowski o wariancji danej wyrażeniem (16) i scentrowany w $\langle y_t \rangle = \langle y_0 \rangle (1+\lambda)^t = 0$.

Powyższe rozważania wskazują, że faktycznie $ACF(1)$ oraz $AR(1)$ są podstawowymi wielkościami w badaniu katastroficznych bifurkacji możliwymi do bezpośredniego odczytania z danych empirycznych.

A.4 Uwaga dotycząca analizy nieliniowych szeregów czasowych

Ponieważ liniowy składnik w liniowych szeregach czasowych może być stosunkowo łatwo zamaskowany przez szum, rozwijamy f w wyrażeniu (6) do kwadratowego składnika (patrz również równanie (12)). Stąd, możemy powiedzieć, że mamy teraz do czynienia z nieliniowym szeregiem czasowym. Dla tego typu szeregów czasowych rozwinięto wiele metod określających w nich poziom szumu a także redukujących go [28].

A.4.1 Katastroficzna dynamika w pobliżu progu katastroficznego przejścia bifurkacyjnego

W niniejszym etapie, przeprowadzamy bardziej subtelną analizę nierównowagowej dynamiki w otoczeniu wybranego punktu stałego [41]. Innymi słowy, rozważamy tutaj dynamikę w pobliżu progu CBT.

W tym celu dokonajmy rozwinięcia Taylora w punkcie $x_j^*(P_j)$ do rzędy drugiego w y_j:

$$f(x;P) = f(x_j^*(P_j) + y_j; P_j + p_j) = \beta\, p_j + \alpha\, y_j^2 + \ldots, \tag{19}$$

tutaj $j = 1''$ oznacza wybrany przyciągający punkt stały leżący na krzywej bifurkacyjnej (patrz rysunek 30). Dla wystarczająco małych $\mid p_j \mid$ i $\mid y_j \mid$ jedynie pierwsze dwa składniki w (19) odgrywają istotną rolę. Ponadto, użyliśmy następujących oznaczeń: dla wychylenia z położenia równowagowego $y_j = x - x_j^*(P_j)$, (ujemnego) odchylenia parametru $p_j = P - P_j$, dla (ujemnego) współczynnika $\beta = \frac{\partial f(x;P)}{\partial P} \mid_{x=x_j^*(P_j),\, P=P_j}$ oraz dla (ujemnego) wspólczynnika $\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x;P)}{\partial x^2} \mid_{x=x_j^*(P_j),\, P=P_j}$. Zauważmy, że znak każdej z tych wielkości może być stosunkowo łatwo określony dzięki charakterystycznemu przebiegowi krzywych $f(x)$ w funkcji x przedstawionych na rysunku 30. Wykorzystaliśmy także tutaj pomocne własności $f(x_j^*(P_j); P_j) = 0$ i $\lambda(P_j) = 0$ (patrz rysunek 28 oraz katastroficzna krzywa na rysunku 30), gdzie pierwsza definiuje pierwiastek funkcji f a druga lokalne minimum na progu CBT. Dzięki obu tym własnościom uzyskujemy poniżej poszukiwane relacje skalowania.

Podstawiając w równaniu (19) zmienną $x = x^*(P)$, otrzymujemy poszukiwaną relację skalowania (wynikającą ze znikania prawej strony tego równania)

$$y_j^* = \pm\left[-\left(\frac{\beta \cdot p_j}{\alpha}\right)\right]^{\mu}, \tag{20}$$

gdzie wychylenie $y_j^* = x^*(P) - x_j^*(P_j)$ jest, w tym przypadku, dodatnie (dlatego w dalszym ciągu powinien być wzięty znak "+" stojący na zewnątrz nawiasu kwadratowego), przy czym wykładnik $\mu = 1/2$ odgrywa rolę indeksu krytycznego (wykładnika krytycznego). Jeżeli p_j jest wektorem wtedy także β jest wektorem a stąd iloczyn skalarny $\beta \cdot p_j$ jest, oczywiście, skalarem.

Zależność (20) pokazuje, że wychylenie y_j^* zanika zgodnie z prawem potęgowym w miarę jak układ zbliża się do progu CBT. Tego typu zanikanie jest sygnaturą przemiany fazowej; w naszym przypadku przemiany nieciągłej, czyli pierwszego rodzaju (według klasyfikacji Ehrenfestów [16]).

Co więcej, z równań (19), (20) oraz definicji λ otrzymujemy kolejną ważną relację skalowania[6]

$$\lambda = 2\alpha\, y_j^* = \pm 2\alpha \left[- \left(\frac{\beta \cdot p_j}{\alpha} \right) \right]^{\mu}. \tag{21}$$

Znak "+" w drugiej równości w (21) definiuje stabilny stan równowagowy układu (gdyż wtedy współczynnik λ jest ujemny), co właśnie odpowiada rozważanej sytuacji zbliżania się układu do stanu $j = 1''$. Zależność (21) pokazuje, że oczywiście współczynnik szybkości relaksacji $|\lambda|$ zanika w tym przypadku potęgowo. Stanowi to kolejną sygnaturę przemiany fazowej. Jednakże, odpowiedź na pytanie jak $|\lambda|$ skaluje się z czasem (liczonym, oczywiście, w miesiącach a nie w dniach) pozostaje nadal wyzwaniem wymagającym znacznie subtelniejszej analizy danych empirycznych.

Na zakończenie tego Dodatku zauważmy, że podstawiając równanie (21) do ostatniego równania w (15) otrzymujemy $ACF(h)$ w postaci

$$ACF(h) = (1+\lambda)^{|h|} \approx \exp(\lambda |h|) = \exp\left(2\alpha \left(- \left(\frac{\beta p_j}{\alpha} \right) \right)^{\mu} \right), \tag{22}$$

czyli rozciągniętego eksponensa w zmiennej p_j.

[6]Formuła (21) została uzyskana z równania (19) poprzez jego zróżniczkowanie stronami po zmiennej x w punkcie $x = x^*(P)$.

A.5 Ważny przykład: przybliżenie składowej deterministycznej w równaniu dynamiki stoczastycznej za pomocą wielomianu trzeciego stopnia

Przypuśćmy, że potencjał U jest określony poprzez wielomian czwartego stopnia

$$U(x;P) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4, \tag{23}$$

gdzie A_j, $j = 0, 1, \ldots, 4$, są jego (rzeczywistymi) współczynnikami zależnymi od parametru sterującego P. Zgodnie z zależnością (11), siła f jest wielomianem o stopień niższym

$$f(x;P) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \tag{24}$$

gdzie współczynniki $a_{4-j} = -j\,A_{4-j}$, $j = 1, \ldots, 4$ oraz (zgodnie z sugestią biorącą się z danych empirycznych) $a_0 < 0$. Skoncentrujemy się teraz na ich analizie dla otoczenia progu CBT (przyjmując, że oczywiście są sparametryzowane przez P - jest o tym jeszcze mowa w dalszej części).

Zatem, określmy cel jak stawiamy przed rozważanym przykładem:

(i) zamierzamy wyznaczyć pierwiastki x_1^* i $x_{1''}^*$ wielomianu (24) a stąd obliczyć wielkość katastroficznego skoku $\Delta x_{1'',1}^* = x_1^* - x_{1''}^*$ w zależności od wartości współczynników wielomianu,

(ii) rozwiązać także problem odwrotny, czyli wyznaczyć stosunki parametrów a_1/a_0, a_2/a_0 i a_3/a_0 za pomocą pierwiastków x_1^* i $x_{1''}^*$, które mogą już być (w zasadzie) uzyskane z danych empirycznych (patrz rysunki 18-21 w rozdz. 2.7).

Zauważmy, że katastroficzne przejście bifurkacyjne $1'' \Rightarrow 1$ (patrz dolny wykres na rysunku 28) zaczyna się w takim punkcie $1''$, który jest nie tylko największym pierwiastkiem (tutaj podwójnym) wielomianu f ale także stanowi jego lokalne maksimum. Innymi słowy, punkt $1''$ jest punktem przegięcia krzywej potencjału $U(x)$ (patrz środkowy wykres na rysunku 28). Stąd,

$$\frac{\partial f(x;P)}{\partial x}\,|_{x=x_0,\,x^*_{1''}} = 3a_0\, x^*_{0,1''}\,{}^2 + 2a_1\, x^*_{0,1''} + a_2 = 0, \tag{25}$$

przy czym 0 jest pierwszym punktem przegięcia krzywej potencjału (patrz ponownie środkowy wykres na rysunku 28), stanowiąc zarazem minimum krzywej $f(x)$.

Z równania (25) otrzymujemy

$$x^*_{0,1''} = x_{ip} \mp \frac{1}{3a_0}\sqrt{D},\;\; D \stackrel{\text{def.}}{=} a_1^2 - 3a_0\, a_2 \tag{26}$$

gdzie znak "+" dotyczy minmum x^*_0, natomiast "$-$" maximum $x^*_{1''}$,

$$x_{ip} = -\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}, \tag{27}$$

przy czym przyjmujemy, że wyróżnik $D > 0$, gdyż tylko wtedy istnieją dwa rzeczywiste pierwiastki równania (25).

Można łatwo wyprowadzić (ze znikania drugiej pochodnej f po x), że x_{ip} dane równaniem (27) jest punktem przegięcia (patrz górny wykres na rysunku 28),

$$\frac{\partial^2 f(x;P)}{\partial x^2}\,|_{x=x_{ip}} = 0 \Rightarrow x_{ip} = -\frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}. \tag{28}$$

Jak to wynika z równania (26), oba ekstrema funkcji f, tzn. x^*_0 oraz $x^*_{1''}$, są ulokowane symetrycznie po obu stronach punktu przegięcia x_{ip} (minimum x^*_0 po lewej stronie a maksimum $x^*_{1''}$ po prawej).

Rozważmy teraz przypadek przedstawiony na rysunku 28. Postulujemy następujące własności sugerowane przez dane empiryczne,

(i) przyjmujemy, iż spełnione są następujące nierówności: $x^*_1 < 0$ and $x^*_{1''} > 0$,

(ii) maksimum $x^*_{1''}$ jest dwukrotnym pierwiastkiem funkcji f danej przez (24).

Z własności (ii) oraz przyjęciu takiej wartości zmiennej x i parametru P, dla których $f(x; P)$ w równaniu (24) znika, łatwo otrzymuje się trzeci pierwiastek

$$x^*_1 = x_{ip} - \frac{2}{3a_0}\sqrt{D}. \tag{29}$$

Co więcej, postulujemy (pod wpływem danych empirycznych, patrz rysunki 18-21), że $x^*_1 < 0$.

Z równań (26) i (29) otrzymujemy katastroficzny bifurkacyjny skok

$$\Delta x^*_{1'',1} = -\frac{1}{a_0}\sqrt{D}, \tag{30}$$

jako funkcję tylko dwóch parametrów a_1/a_0 i a_2/a_0.

Z równań (26), (28) i (29) łatwo otrzymuje się rozwiązanie problemu odwrotnego w postaci

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(2x^*_{1''} + x^*_1) \leqslant 0, \\ \frac{a_2}{a_0} &= x^*_{1''}\,(x^*_{1''} + 2x^*_1) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{31}$$

razem z warunkiem

$$\frac{a_3}{a_0} = -x^*_1\,(x^*_{1''})^2 \geqslant 0; \tag{32}$$

ta ostatnia zależność gwarantuje samozgodność uzyskanych wyników. Powyższe nierówności zostały zasugerowane przez dane empiryczne. Stąd, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 < 0$.

Jak widać, dysponując (w oparciu o dane empiryczne) punktem zwrotnym $x^*_{1''}$ oraz punktem x^*_1 (patrz rysunki 18-21) możemy otrzymać poszukiwane, stosunki parametrów a_1/a_0, a_2/a_0 oraz a_3/a_0.

Literatura

[1] S. Albeverio, V. Jentsch and H. Kantz (Eds.) *Extreme Events in Nature and Society*, Springer-Verlag, Berlin 2006.

[2] C. Beck, E. G. D. Cohen, S. Rizzo, *Atmospheric turbulence and superstatistics*, Europhysics News **36**(6), 189-191 (2005).

[3] C. Beck, G. Benedek, A. Rapisarda, and C. Tsallis (eds.), *Complexity, Metastability and Nonextensivity*, World Scientific, Singapore 2005.

[4] W. A. Brock, S. R. Carpenter, M. Scheffer, *Regime shifts, environmental signals, uncertainty and policy choice* in: *A Theoretical Framework for Analyzing Social-Ecological Systems* (eds. J. Norberg & G. Cumming), Columbia Univ. Press, New York 2006.

[5] P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, Berlin 1991.

[6] S. R. Carpenter and W. A. Brock, *Rising variance: a leading indicator of ecological transitions*, Ecology Lett. **9**, 308-315 (2006).

[7] S. R. Carpenter, W. A. Brock, J.J. Cole, J.F. Kitchell and M. L. Pace, *Leading indicators of trophic cascaders*, Ecology Lett. **11**, 128-138 (2008).

[8] P. K. Clark, *A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices*, Econometrica **41**(1), 135-155 (1973).

[9] I. Eliazar, J. Klafter, *On the extreme flights of one-sided Lévy processes*, Physica A **330**, 8-17 (2003).

[10] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1981.

[11] W.A. Fuller, *Introduction to statistical time series*, J. Wiley & Sons, Inc., Canada 1976.

[12] H. W. Gottinger, in: *On the Stability of Contemporary Economic Systems*, Eds. O. Kýn, W. Schrettl, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 422 (1979).

[13] V. Guttal and C. Jayaprakash, *Changing skewness: an early warning signal of regime shifts in ecosystems*, Ecology Lett., **11**, 450-460 (2008).

[14] A. G. Haldane & R. M. May: *Systemic risk in banking ecosystems*, Nature Vol. 469, 351-355 (2011).

[15] P. Hohenberg and B. Halperin: *Theory of Dynamic Critical Phenomena*, Rev. Mod. Phys. 59, 435-479 (1977).

[16] K. Huang, *Machanika statystyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.

[17] A. Jakimowicz: *Catastrophes and Chaos in Business Cycle Theory*, Acta Phys. Pol. 117(4), 640-646 (2010).

[18] N. Johnson: *Proposing policy by analogy is risky*, Nature Vol. 469, 302-302 (2011).

[19] N. G. van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, North-Holland, Amsterdam 1987.

[20] H. Kantz, Th. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge, Univ. Press, Cambridge 2000.

[21] M. Kozłowska, A. Kasprzak, and R. Kutner: *Fractional Market Model and Its Verification on the Warsaw Stock Exchange*, Int. J. Modern Phys. C 19(3), 453-469 (2008).

[22] K. Kozłowska and R. Kutner, *Singular dynamics of various macroeconomic sectors*, Acta Phys. Pol. **117**, 630-636 (2010).

[23] D. P. Kroese, Th. Taimre, Z. I. Botev, *Handbook of Monte Carlo Methods* in *Wiley Series in Probability and Statistics*, J. Wiley Inc., Public., New Jersey 2011.

[24] R. Kubo, M. Toda, N. Hascitsume, *Statistical Physics II. Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[25] R. Kutner, K. Binder, K.W. Kehr: *Diffusion in concentrated lattice gases. V. Particles with repulsive nearest-neighbor interaction on the face-centered-cubic lattice*, Phys. Rev. B 28, 1846-1858.

[26] R. Kutner, M. Regulski, *Hierarchical spatio-temporal coupling in fractional wanderings. I. Continuous-Time Random Flights*, Physica A **264** 84-106 (1999).

[27] R. Kutner, M. Regulski, *Hierarchical spatio-temporal coupling in fractional wanderings. (II). Diffusion phase diagram for Weierstrass walks*, Physica A **264** 107-133 (1999).

[28] R. Kutner, F. Świtała, *Stochastic simulations of time series within Weierstrass-Mandelbrot walks*, Qunatitative Finance **3**, 201-211 (2003).

[29] Th. Lux: *Network theory is sorely required*, Nature Vol. 469, 303-303 (2011)

[30] D. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.

[31] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.

[32] B. M. Roehner: *Patterns of Speculation. A Study Observational Econophysics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002.

[33] J. B. Rosser, Jr.: *Implications for Teaching Macroeconomics of Complex Dynamics*, Dept. Economics, James Madison Univ., Harrisonburg, 2004.

[34] M. Scheffer, J. Bascompte, W. A. Brock, V. Brovkin, S. R. Carpenter, V. Dakos, H. Held, E. H. van Nes, M. Rietkerk, and G. Sugihara: *Early-warning signals for critical transitions*, Nature **461**, 53-59 (2009).

[35] A. Schadschneider, D. Chowdhury, and K. Nishinari, *Stochastic transport in complex systems. From molecules to vehicles*, Elsevier, The Netherlands 2011.

[36] P. E. McSharry, L. A. Smith, L. Tarassenko, J. Martinerie, M. Le Van Quyen, M. Baulc & B. Ranault, *Prediction of epileptic seizures: are non-linear methods relevant?*, Nature Medicine, Lett. Editor **9** (3), 241-242 (2003).

[37] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences. Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*, Second Eddition, *Springer Series in Synergetics*, Springer-Verlag, Heidelberg 2004.

[38] D. Sornette: *Dragon-Kings, Black Swans and the Prediction of Crises*, Int. J. Terraspace and Engineering 2(1), 1-17 (2009).

[39] D. Sornette, *Dragon-kings, Black Swansand the prediction of Crisis*, Int. J. Terraspace and Engin. bf 2(1), 1-17 (2009).

[40] T. Vaga, *The Coherent Market Hypothesis*, Financial Analysts Journal **46**(6), 36-49 (1990).

[41] C. Wissel, *A universal law of the characteristic return time near thresholds*, Oecologia (Berlin) **65**, 101-107 (1984).

[42] E. C. Zeeman: *Catastrophe Theory: Selected papers, 1972-77*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), Volume 84, Number 6, 1360-1368 (1978) & Errata: Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), Volume 1, Number 4, 681-681 (1979)

[43] E. C. Zeeman: *Evolution of Catastrophe Theory. Understanding Catastrophe*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.