

NBP

Narodowy Bank Polski

Materiały i Studia nr 296

Weryfikacja modeli krzywej dochodowości na potrzeby polityki pieniężnej NBP

Ewa Dziwok



Materiały i Studia nr 296

Weryfikacja modeli krzywej dochodowości na potrzeby polityki pieniężnej NBP

Ewa Dziwok

**Instytut Ekonomiczny
Warszawa, 2013 r.**

dr Ewa Dziwok – Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Finansów i Ubezpieczeń,
Katedra Matematyki Stosowanej

Autorka dziękuje prof. UW dr. hab. Ryszardowi Kokoszczyńskiemu oraz prof. dr. hab. Andrzejowi Sławińskiemu za cenne uwagi, które przyczyniły się do wzbogacenia pracy. Wszelkie błędy i niedociągnięcia obciążają wyłącznie autorkę.

Projekt badawczy został zrealizowany w ramach konkursu Komitetu Badań Ekonomicznych NBP na projekty badawcze przeznaczone do realizacji przez pracowników NBP i osoby spoza NBP oraz sfinansowany ze środków Narodowego Banku Polskiego.

Druk:
NBP Printshop

Wydał:
Narodowy Bank Polski
Departament Edukacji i Wydawnictw
ul. Świętokrzyska 11/21
00-919 Warszawa
tel. +48 22 653 23 35
www.nbp.pl

ISSN 2084-6258

© Copyright Narodowy Bank Polski, 2013

WSTĘP	5
1 MODELOWANIE KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI	16
1.1 TERMINOWA STRUKTURA STÓP PROCENTOWYCH	16
1.2 ETAPY BUDOWY KRZYWEJ	20
1.3 MODELOWANIE KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI W WARUNKACH POLSKICH	25
1.3.1 <i>Dobór i weryfikacja dostępnych danych</i>	27
1.3.2 <i>Wybór modelu – modele parametryczne</i>	28
1.3.3 <i>Wybór kryterium dopasowania</i>	31
2 KRYTERIA OCENY MODELI KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI	35
2.1 KLASYCZNE MIARY WERYFIKACJI MODELU	35
2.2 ANALIZA STRUKTURY TERMINOWEJ ZMIENNOŚCI IMPLIKOWANYCH STÓP FORWARD	39
2.3 POWIERZCHNIA KORELACJI IMPLIKOWANYCH STÓP FORWARD	46
2.4 PREMIA ZA RYZYKO	57
3 SYNTETYCZNA OCENA KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI	64
3.1 METODA NORMALIZACJI MIN-MAX	65
3.2 METODA RANGOWANIA	67
3.3 WERYFIKACJA MODELI KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI	69
LITERATURA	71
INDEKSY I SPISY	76

Streszczenie

Tempo, w jakim dokonują się zmiany na współczesnych rynkach finansowych skłania banki centralne do ciągłej modyfikacji prowadzonej przez siebie polityki pieniężnej. Stosowane klasyczne metody analizy wpływu impulsów monetarnych, ze względu na długi czas reakcji, są uznawane za niewystarczające, stąd też stałe poszukiwanie alternatywnych narzędzi, umożliwiające bieżące monitorowanie i oddziaływanie na rynek. Jednym z istotnych elementów współczesnej polityki pieniężnej jest wykorzystanie krzywej dochodowości która stanowi istotne źródło zachowań rynkowych odzwierciedlających oczekiwania dotyczące prowadzonej polityki pieniężnej.

Projekt podejmuje temat modelowania krzywej dochodowości pod kątem wykorzystania jej potencjału informacyjnego w procesie prowadzenia polityki pieniężnej. Za podstawowy cel przyjęto weryfikację modeli terminowej struktury stóp procentowych pod kątem specyfiki polskiego rynku i możliwości ich stosowania w polityce pieniężnej banku centralnego.

W projekcie zastosowano modele parametryczne krzywej dochodowości: Nelsona-Siegela i Svenssona. Krzywe oszacowano z uwzględnieniem dwóch tradycyjnych kryteriów dopasowania krzywej do danych rzeczywistych oraz jednego zmodyfikowanego. Następnie dokonano weryfikacji tych modeli zarówno z wykorzystaniem klasycznych miar błędu, jak również skonstruowano alternatywne oceny modeli oparte na dynamice implikowanych stóp forward. Wypracowana w toku prowadzonych badań metodologia pozwoliła na pozycjonowanie krzywych dochodowości według zakładanych kryteriów.

Słowa kluczowe:

krzywa dochodowości, modele parametryczne, oczekiwania rynkowe

Sygnatury JEL: C53, C92, E43, E58

Wstęp

Polityka pieniężna realizując swoje cele prowadzona jest w warunkach permanentnej niepewności¹, co sprawia, że konsekwencje decyzji podejmowanych na bazie danych z przeszłości są widoczne z dużym opóźnieniem.

Właściwe poznanie mechanizmu transmisji monetarnej pozwala efektywniej wykorzystać kanały transmisji do przenoszenia impulsów monetarnych do gospodarki. W oczywisty sposób celem każdego banku centralnego jest znalezienie takiego kanału transmisji, którego wykorzystanie pozwala najpełniej i najefektywniej realizować przyjęte założenia polityki pieniężnej². Stąd też ważną cechą mechanizmu transmisji jest nacisk, z jakim podkreśla się, że to realne, a nie nominalne stopy kształtują decyzje konsumentów i przedsiębiorców³. Im przejrzystsze jest prowadzenie polityki pieniężnej (mniejsza niepewność wyrażana poprzez zmienność stóp), tym lepszy efekt oddziaływania na sferę realną.

Pojawienie się nowych teorii na temat prowadzenia polityki pieniężnej zmieniło priorytety banku centralnego, a poznanie wzajemnych zależności pozwoliło wykorzystać wybrane instrumenty polityki pieniężnej w procesie realizacji celów banku centralnego⁴. Ostatnie badania wykazują, iż obok tradycyjnych kanałów transmisji impulsów pieniężnych do gospodarki (kredytowego, kursu walutowego oraz stopy procentowej), istotną rolę zaczyna odgrywać kanał oczekiwań, który

¹ Chodzi tu o niepewność zgodną z definicją Knighta (1921), wiążącą się ze zdarzeniem o nieznanym rozkładzie (w przeciwieństwie do mierzalnego ryzyka). Por. A. H. Meltzer, *Monetary reform in an uncertain environment*. W: *Money, credit and policy*. Edward Elgar Publishing Ltd, 1995, s. 304, 299-318.

² Szerzej: I. Angeloni, A. Kashyap, B. Mojon (ed.), *Monetary Policy Transmission in the Euro Area*. Cambridge University Press, 2003.

³ M. Lavoie, M. Seccareccia (ed.), *Central Banking in the Modern World*. Edward Elgar, Cheltenham, Northampton, 2004, s. 94.

⁴ W Polsce badaniem mechanizmu transmisji zajmowali się m.in.: Z. Polański, T.P. Opiela: *Rynki finansowe a transmisja impulsów polityki pieniężnej banku centralnego*. „Bank i Kredyt” 1995 nr 6, s. 86, T.P. Opiela, *Survey of the channels of the monetary transmission mechanism*. Materiały i Studia, Paper no 13, NBP, Warszawa 1996, R. Kokoszcyński (red), *Mechanizm transmisji impulsów polityki pieniężnej: przegląd głównych teorii oraz specyfika transmisji w Polsce*. Materiały i Studia, Zeszyt nr 91, NBP, Warszawa 1999, s. 10-20, M. Brzoza-Brzezina, *Neutralność pieniądza a badanie mechanizmów transmisji monetarnej w Polsce*. „Bank i Kredyt” 2000 Nr 3, s. 39, T. Łyziak, *Monetary transmission mechanism in Poland. The strengths and delays*. Materiały i Studia, Paper no 26, NBP, Warszawa 2002.

poprzez stopy krótkoterminowe oddziałuje na stopy długoterminowe, a w efekcie na zagregowany popyt i inflację⁵.

Banki centralne badając wpływ impulsu monetarnego analizowały siłę i stopień oddziaływania podjętej decyzji (przykładowo dotyczącej wysokości stopy referencyjnej) na rynek stóp procentowych. W każdym z przypadków konieczna była oficjalna decyzja banku centralnego, która wywoływała określone reakcje rynkowe. Przeważająca większość analiz dotyczących transmisji impulsów monetarnych do sfery realnej wykorzystuje modele autoregresyjne VAR z różnymi jej odmianami⁶ oraz model korekty błędem⁷. Analiza skali oddziaływania impulsów polityki pieniężnej pozwoliła stwierdzić, iż zmiany stopy bonu pieniężnego NBP w istotny sposób wpływają na krótki odcinek krzywej dochodowości, skąd - poprzez stopy jednotygodniowe - impulsy przenoszone są na krótsze terminy (do 1 miesiąca), a poprzez stopy miesięczne - na dłuższe (powyżej 1-go miesiąca).

Ostatnie lata pokazują, że banki centralne starają się unikać zbyt częstych zmian oficjalnych stóp procentowych, przez co wytrącają sobie z rąk istotną oręż w kształtowaniu stóp rynkowych, a w konsekwencji i inflacji. Cele, jakie stawia sobie współczesna polityka pieniężna, to kwestia wpływu banku centralnego na stopy rynkowe poprzez kanał oczekiwań, bez zmiany oficjalnych stóp procentowych, a także opracowanie takich metod współdziałania z rynkiem, by w przypadku konieczności zmiany stóp – decyzja była możliwie czytelna i łatwa do przewidywania. Osiągnięcie wysokiej przejrzystości dokonuje się dzięki poprawie czytelności (transparentności⁸) prowadzonych działań: jako efekt publikowania raportów i prognoz dotyczących inflacji, wyboru reguły bezpośredniego celu inflacyjnego, czy też powołania niezależnego gremium, którego zadaniem jest ustalanie poziomu

⁵ Szerzej: J. B. Taylor, *Monetary Policy Rules*. NBER Business Cycles Series, Volume 31, The University of Chicago Press, Chicago 1999, s. 182-185.

⁶ E. Wróbel, M. Pawłowska, *Monetary transmission in Poland: some evidence on interest rate and credit channels*. Materiały i Studia, Paper no 24, Warszawa 2002. Dostępne są także porównawcze prace dotyczące polskiego rynku na tle innych krajów przechodzących transformację, np. R. Golinelli, R. Rovelli, *Monetary Policy transmission, interest rate rules and inflation targeting in three transition countries*. "Journal of Banking and Finance" 2005, nr 29, s. 183-201.

⁷ P.T. Konstantinou, *The Expectations Hypothesis of the Term Structure*. "Emerging Markets Finance and Trade" 2005, vol.41, no.3, s. 70-91.

⁸ Posługując się definicją podawaną przez Europejski Bank Centralny, krótkoterminowa transparentność polityki pieniężnej rozumiana jest jako zdolność uczestników rynku do prawidłowego – w krótkim horyzoncie czasu - przewidywania zmian stóp procentowych. Por: ECB, *Monthly Bulletin*, January 2006, s. 51.

podstawowych stóp banku centralnego (w Polsce rolę tę pełni Rada Polityki Pieniężnej, RPP)⁹.

W efekcie współczesne podejście do polityki pieniężnej kładzie nacisk na zmniejszanie dystansu pomiędzy momentem gromadzenia danych będących podstawą podejmowania decyzji, a analizą efektów tych decyzji poprzez zmianę podejścia do procesu decyzyjnego. W ostatnich latach można dostrzec stopniowe odejście od badania wpływu prowadzonej polityki na określone zmienne (jako podstawy podejmowania decyzji), na rzecz oczekiwań co do poziomu tych zmiennych w przyszłości. Ponieważ w warunkach niepewności każda nowa, dostępna informacja uruchamia proces formowania oczekiwań, podejście to pozwala na ograniczenie ryzyka związanego ze zbyt późną reakcją banku centralnego na dynamicznie zmieniającą się sytuację na rynku.

Jedną z podstawowych form interpretacji oczekiwań rynkowych jest analiza struktury terminowej instrumentów rynku międzybankowego, której obraz stanowi - obok danych ankietowych - podstawowe źródło zachowań rynkowych. Od kilku lat banki centralne wykorzystują krzywą dochodowości jako miernik czasu i stopnia reakcji rynku na zmiany krótkoterminowych stóp procentowych. Poznanie metod konstrukcji krzywej oraz jakie ona tworzy, pozwala na zwiększenie skuteczności prowadzonej polityki pieniężnej¹⁰.

W literaturze przedmiotu krzywa dochodowości funkcjonuje od początku XX stulecia, kiedy to wraz z badaniami I. Fishera rozpoczął się proces analizy poziomu stóp procentowych. Względna stabilizacja stóp procentowych do lat 70-tych

⁹ Szerzej na temat komunikacji wypowiadają się: M. Andersson, H. Diolen, P. Sellin, *Monetary Policy Signaling and Movements In the Swedish Term Structure of Interest Rates*. Sveriges Riksbank Working Paper Series 2001, No 132; P. Sotomska-Krzysztofik, *Jak Bank Szwecji wspiera stabilność finansową za pomocą polityki informacyjnej*. „Bank i Kredyt” 2005, nr 1, s. 15-24; U. Ziarko-Siwek, *Ocena efektywności informacyjnej wybranych segmentów rynku finansowego w Polsce*. NBP, Materiały i Studia nr 178, Warszawa 2004.

¹⁰ Za: R.J. Shiller, J.Y. Campbell, K.L. Schoenholtz, *Forward Rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates*. „Brooking Papers on Economic Activity” 1983, s. 173-217.

ubiegłego wieku nie sprzyjała badaniom dotyczącym krzywych dochodowości¹¹. Jednocześnie rozwój instrumentów pochodnych, dla których stopa procentowa jest instrumentem bazowym, przyniósł wiele nowych podejść do modelowania stóp rynkowych, z których tylko nieliczne znalazły zastosowanie w polityce pieniężnej. Banki centralne są zainteresowane konstruowaniem zerokuponowej krzywej dochodowości głównie ze względu na zawarte tam informacje na temat przyszłych stóp procentowych. Dotychczasowe badania polskiego rynku, obejmujące zastosowanie modeli statycznych (parametrycznych oraz łączonych wielomianów), nie uwzględniały szerszego aspektu dotyczącego prowadzonej przez bank centralny polityki pieniężnej.

Jedną z podstawowych trudności modelowania struktury terminowej jest specyfika rynku danego kraju, która nie pozwala na stworzenie ogólnej metody. Ostatnie lata zaowocowały powstaniem szeregu modeli terminowej struktury stóp procentowych, których wykorzystanie wymaga jednak uprzedniej modyfikacji, w celu dostosowania do warunków funkcjonujących na rynku polskim. Wynika to stąd, iż warunkiem stosowania większości proponowanych modeli jest wykorzystanie znaczącego zbioru danych, który pozwala zarówno na budowę krzywej, jak i jej weryfikację. Dla rynków wschodzących, takich jak polski, istotnym mankamentem jest brak danych lub ich bardzo nieliczny zbiór, który nie pozwala na wykorzystanie wszystkich dostępnych metod. W efekcie częstą metodą uzupełniania danych stało się łączenie instrumentów o różnym ryzyku, co – ze względu na ich cechy – każe patrzeć na otrzymane wyniki z dużą ostrożnością.

Za podstawowy cel niniejszego opracowania przyjęto weryfikację oraz modyfikację modeli terminowej struktury stóp procentowych pod kątem specyfiki

¹¹ Pierwsze ilościowe podejście do problemu, stanowiące podstawę współczesnego modelowania struktury terminowej, znaleźć można u: L. Fisher, R. L. Weil, *Coping with the risk of interest-rate fluctuations: returns to bondholder from naive and optimal strategies*. "Journal of Business" 1971, 4, s. 408-431; J. H. McCulloch, *Measuring the term structure of interest rates*. "Journal of Business" 1971, 44, s. 19-31; S. M. Schaefer, *Measuring a tax-specific term structure of interest rates in the market for British government securities*. "The Economic Journal", 1981, 91, s. 415-438; O. A. Vasicek, H. G. Fong, *Term structure modeling using exponential splines*. "Journal of Finance" 1982, 37, s. 339-348; G. S. Shea, *Pitfalls In smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximation*. "Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1984, 19, s. 253-269.

polskiego rynku i możliwości ich stosowania w polityce pieniężnej banku centralnego.

Sformułowanemu celowi głównemu zostały podporządkowane cele cząstkowe, obejmujące:

- weryfikację modeli szacowania krzywej dochodowości ze względu na zadane kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych,
- opracowanie alternatywnych miar weryfikacji szacowanych krzywych ze szczególnym uwzględnieniem ich wykorzystania w polityce pieniężnej,
- pomiar i analizę związku pomiędzy implikowaną stopą forward wyznaczoną w oparciu o oszacowaną krzywą dochodowości i polityką ustalania stopy referencyjnej,
- weryfikację konstruowanych krzywych w oparciu o premię stanowiącą jeden ze wskaźników przejrzystości polityki pieniężnej banku centralnego.

Osiągnięciu powyższego celu sprzyja sformułowanie następujących hipotez badawczych:

- Wybór kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych ma istotny wpływ na jakość otrzymanych wyników, rozumianą w głównej mierze jako zdolność do generowania implikowanych stóp forward, które trafnie odzwierciedlają oczekiwania rynkowe.
- Weryfikacja statycznych parametrycznych modeli estymacji krzywej dochodowości może zostać dokonana zarówno poprzez wykorzystanie klasycznych metod oceny, jak i zastosowanie metod alternatywnych, służących do opisu modeli dynamicznych.
- W polskich warunkach, dla poszczególnych segmentów rynku pieniężnego, możliwe jest wskazanie modelu parametrycznego optymalnego pod względem typu oraz kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych czyli takiego, który pozwalałby na zadawalające dopasowanie w dowolnych warunkach rynkowych.

-
- Oszacowany poziom premii za ryzyko może stać się barometrem zachowań rynkowych, pozwalającym na monitorowanie poziomu niepewności na rynku przez bank centralny.

Ramy teoretyczne rozważań stanowi ogólna teoria racjonalnych oczekiwań sformułowana przez J. Mutha, a rozwinięta przez R. Lucasa, która powiązana została na gruncie polityki pieniężnej z teoriami dotyczącymi struktury terminowej. Samo modelowanie krzywej rozumiane jest w tej rozprawie jako proces konstrukcji funkcji ciągłej w oparciu o istniejące dyskretne dane historyczne, z wykorzystaniem funkcyjnego związku pomiędzy czynnikiem dyskontowym, stopą natychmiastową (spotową), a stopą forwardową. W analizie krzywej dla celów polityki pieniężnej skupiono się na dwóch grupach modeli: parametrycznych oraz funkcji sklepanych. Dla modeli parametrycznych, Nelsona-Siegela oraz Svenssona, funkcją bezpośrednio wyznaczaną jest krzywa spotowa oraz chwilowa krzywa forwardowa.

Dane statystyczne wykorzystywane do obliczeń pochodzą z rynku międzybankowego. Na podstawie kwotowań z rynku międzybankowego w latach 2009-2012 (depozyty, transakcje FRA oraz swap) stworzono podstawy informacyjne dla analizy instrumentów na polskim rynku. Wszelkie przeliczenia dokonane zostały z wykorzystaniem modelowania VBA .

W opracowaniu przyjęto ciągły proces narastania odsetek, przy czym starano się podkreślić różnicę pomiędzy zmiennymi odzwierciedlającymi wartość w punkcie, takimi jak cena kapitału, od stóp wyznaczanych na określonym przedziale czasu. W efekcie w przypadku stóp procentowych oznaczenie wskazuje moment początkowy i końcowy inwestycji, której dana stopa dotyczy oraz moment wyznaczenia tej stopy. Dla cen instrumentów, oprócz chwili ich wyznaczenia, wskazany jest moment zakupu (na który wyznaczona jest wartość bieżąca przyszłych przepływów) oraz zapadalności (bądź sprzedaży).

Pragnąc zachować równowagę pomiędzy utrzymaniem przejrzystości a możliwą ogólnością toczonych wywodów, zdecydowano się na precyzyjne oznaczenia

w pierwszej części pracy, by w niektórych przypadkach, na dalszym etapie badań, dokonać ich uproszczenia.

Dla formalnego zdefiniowania stopy zwrotu przyjęte zostały następujące oznaczenia:

- Czas inwestycji $t - \tau$ jest pojmowany jako wyrażony w latach okres pomiędzy momentem kupna instrumentu τ , a jego sprzedażą (bądź zapadalnością) w chwili $t \geq \tau$.
- W przypadku, gdy moment zawarcia transakcji różni się od momentu jej rozliczenia (jest tak dla inwestycji terminowych), wprowadzony zostaje trzeci indeks oznaczający moment zawarcia transakcji. Dla inwestycji natychmiastowych (kiedy zawarcie transakcji jest równoznaczne z jej rozliczeniem), wskaźnik użyty dla oznaczenia momentu zawarcia transakcji zostaje pominięty.
- Cena instrumentu jest istotnie związana z chwilą jej wyznaczenia - dla umów nieodwołalnych już w momencie zawarcia transakcji znana jest zarówno cena początkowa, jak i końcowa, natomiast ceny instrumentów zbywalnych znane są dopiero w momencie zakończenia transakcji. W tych ostatnich przypadkach konieczne jest ceny oczekiwanej w formie spectrum potencjalnych cen sprzedaży, przez co cena w momencie zakupu instrumentu wymaga przedstawienia (przy określonych założeniach) w postaci zmiennej losowej¹².

Cena instrumentu o zapadalności w chwili $t > 0$, wyznaczona w momencie τ , $\tau \leq t$ jest oznaczona symbolem $P_\tau(\tau, t) \equiv P(\tau, t)$. W przypadku, gdy będzie mowa o operacjach na jednym instrumencie, oznaczenie momentu zapadalności zostanie – bez straty dla prowadzonych rozważań – pominięte.

Stopa zwrotu zdefiniowana zostaje jako iloraz dochodu oraz ceny nabycia instrumentu finansowego, przy czym przez dochód z inwestycji w instrument finansowy rozumie się różnicę pomiędzy ceną instrumentu w momencie zakończenia

¹² Szerzej: S. Roman, *Introduction to the mathematics of finance: from risk management to options pricing*. Springer-Verlag 2003, New York, s. 42.

inwestycji (sprzedaży instrumentu), a jego ceną w chwili rozpoczęcia tejże inwestycji (zakupu tego instrumentu)¹³:

$$i(\tau, s) = \frac{P(s) - P(\tau)}{P(\tau)} = \frac{P(s)}{P(\tau)} - 1, \quad (1)$$

gdzie: $i(\tau, s)$ - stopa zwrotu dla przedziału czasu $[\tau; s]$

$P(\tau)$ – cena instrumentu w momencie zakupu $\tau \geq 0$,

$P(s)$ – cena instrumentu w momencie sprzedaży $s \in [\tau; t]$,

τ - moment rozpoczęcia inwestycji,

s - moment zakończenia inwestycji, $s \in [\tau; t]$.

Z tej definicji wynikają następujące przypadki szczególne:

- Jeśli inwestycja w instrument finansowy trwa do momentu jego zapadalności w chwili t , to wyznaczona stopa zwrotu $i(\tau, t)$ będzie określana jako stopa zwrotu w terminie do wykupu.

- Dla: $s = \tau$:
$$i(\tau, \tau) = 0. \quad (2)$$

- Jeśli moment rozpoczęcia inwestycji jest równoczesny z momentem zawarcia transakcji, to stopa taka będzie nazywana stopą natychmiastową (kasową, spot) i oznaczana jako $i(\tau, s)$:

$$i(\tau, s) \equiv i_{\tau}(\tau, s). \quad (3)$$

- W szczególnym przypadku, gdy $s \rightarrow \tau$, stopa zwrotu spot $i(\tau, s)$ nazywana będzie chwilową stopą spot (ang. instantaneous spot) i oznaczana jako $i(\tau)$:

$$i(\tau) \equiv \lim_{s \rightarrow \tau} i(\tau, s). \quad (4)$$

- Jeśli moment rozpoczęcia inwestycji s jest różny od momentu τ zawarcia transakcji, $s > \tau$, to stopa taka będzie nazywana stopą terminową (forward) i oznaczana jako: $f_{\tau}(s, t)$.

¹³ Przytoczona definicja jest najbliższa formalnemu zapisowi zawartemu w: P. Chrzan, *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*. Oikonomos sp. z o.o., Katowice 2001, s. 12; M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods In Financial Modelling*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 2005, s. 316.

- W przypadku, gdy $t \rightarrow s$, to stopa zwrotu forward $f_\tau(s, t)$ nazywana jest chwilową forward (ang. instantaneous forward) i oznaczana jako $f_\tau(s)$:

$$f_\tau(s) \equiv \lim_{s \rightarrow t} f_\tau(s, t). \quad (5)$$

- Dowolną stopę zwrotu dla przedziału $[\tau; t]$ można przedstawić w postaci średniej (całki) chwilowych stóp forward¹⁴.

$$i(\tau, t) = \frac{1}{t - \tau} \int_\tau^t f_\tau(s) ds \quad (6)$$

Ponieważ dla $s = \tau$, $f_\tau(\tau) \equiv i(\tau)$, to każdą stopę spot można wyrazić za pomocą chwilowej stopy natychmiastowej $i(\tau)$ oraz szeregu stóp $f_\tau(s)$ dla $s \in (\tau; t]$.

W opracowaniu przyjęto ciągłą formę narastania kapitału co pozwala otrzymać następujące związki pomiędzy ceną instrumentu finansowego, czynnikiem dyskontowym oraz stopą procentową:

- Jeżeli $P(\tau) \equiv P(\tau, t)$ jest ceną instrumentu o zapadalności t ustaloną w momencie τ , to cenę tego instrumentu w dowolnym momencie $s \in [\tau; t]$ można wyrazić wzorem:

$$P(s) = e^{i(\tau, s) \cdot (s - \tau)} \cdot P(\tau). \quad (7)$$

- Jeżeli dana jest cena instrumentu $P(t)$ w momencie zapadalności t , to jego cena w momencie τ jest równa:

$$P(\tau) = \delta(\tau, t) \cdot P(t) = e^{-i(\tau, t) \cdot (t - \tau)} \cdot P(t). \quad (8)$$

- Jeżeli $P(s)$ jest ceną instrumentu o zapadalności t ustaloną w momencie $s \in (\tau; t]$, to stopę procentową w okresie $[\tau; s]$ można wyrazić wzorem:

$$i(\tau, s) = -\frac{1}{s - \tau} \ln \frac{P(\tau)}{P(s)} = -\frac{1}{s - \tau} \ln \delta(\tau, s). \quad (9)$$

¹⁴ S. L. Pliska, *Wprowadzenie do matematyki finansowej*. Op. cit., s. 2.

- Jeżeli moment $s \in (\tau; t)$ różni się od momentu ustalenia stóp $\tau : s \neq \tau$, to stopa terminowa forward $f_\tau(s, t) \equiv i_\tau(s, t)$ odzwierciedla oczekiwany przez inwestorów w chwili τ dochód w okresie $t - s$:

$$i(\tau, t) \cdot (t - \tau) = i(\tau, s) \cdot (s - \tau) + f_\tau(s, t) \cdot (t - s), \quad (10)$$

gdzie: $f_\tau(s, t)$ - stopa forward wyznaczona w momencie τ dla okresu $[s; t]$.

Dla $s \neq t$ stopa forward daje się przedstawić wzorem:

$$f_\tau(s, t) = \frac{1}{t - s} [i(\tau, t) \cdot (t - \tau) - i(\tau, s) \cdot (s - \tau)]. \quad (11)$$

$$f_\tau(s, t) = \frac{1}{t - s} \cdot \ln \frac{\delta(\tau, s)}{\delta(\tau, t)}. \quad (12)$$

W przypadku gdy τ będzie ustalonym momentem, w którym wyznaczane są stopy, wzór (11) pozwala przedstawić implikowaną¹⁵ terminową stopę forward za pomocą dwóch stóp natychmiastowych (spotowych) o różnych zapadalnościach. Przedstawienie to wskazuje poziom stopy forward przy założeniu o braku arbitrażu. Oczekiwania dotyczące poziomu stóp w przyszłości mogą się znacząco różnić od matematycznie wyznaczonej teoretycznej stopy $f_\tau(s, t)$ ¹⁶.

¹⁵ Stopy terminowe obliczane na podstawie stóp spot są niekiedy nazywane implikowanymi stopami terminowymi (ang. implied forward rates) – dla odróżnienia ich od rynkowych stóp forward (ang. market forward rates). Za: M. Choudhry, *Analyzing and Interpreting the Yield Curve*. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, Singapore 2004, s. 78.

¹⁶ Szerzej: M. S. Joshi, *The concept and practice of mathematical finance*. Cambridge University Press, Cambridge 2003, s. 283.

Streszczenie

W rozdziale pierwszym zdefiniowane zostało samo pojęcie struktury terminowej, scharakteryzowano etapy budowy krzywej dochodowości oraz przedstawiono konstrukcję modeli parametrycznych. Następnie zastosowano modele parametryczne Nelsona-Siegela i Svenssona do oszacowania krzywych z uwzględnieniem dwóch tradycyjnych kryteriów dopasowania krzywej do danych rzeczywistych oraz jednego zmodyfikowanego. W efekcie dla każdego instrumentu oraz dnia, dla którego dysponowano danymi, oszacowano sześć krzywych dochodowości.

1 Modelowanie krzywej dochodowości

1.1 Terminowa struktura stóp procentowych

Według A. Sławińskiego krzywa dochodowości jest graficznym obrazem stóp zwrotu, jakie można osiągnąć lokując kapitał w instrumenty o różnych terminach zapadalności, lecz o zbliżonym ryzyku kredytowym oraz płynności¹⁷.

O ile w literaturze polskiej pojęcia: krzywa dochodowości, krzywa rentowności, struktura terminowa są uznawane jako substytucyjne, S. M. Focardi, F. J. Fabozzi (2004) wyraźnie je różnicują. Struktura terminowa (ang. term structure of interest rates), wyraża relację pomiędzy rentownością instrumentów o tym samym ryzyku kredytowym ale różnych zapadalnościach, natomiast jej graficzne przedstawienie nosi nazwę krzywej dochodowości (krzywej rentowności)¹⁸. S. Sundaresan (1997) precyzuje, iż struktura terminowa to relacja pomiędzy stopą wolnych od ryzyka (ang. default-free) instrumentów bezkuponowych¹⁹ a ich zapadalnością, ograniczając pojęcie krzywej jedynie do instrumentów emitowanych przez Skarb Państwa²⁰, natomiast M. Choudhry (2004) rezerwuje pojęcie struktury terminowej jedynie dla stóp instrumentów bezkuponowych²¹. Dla potrzeb niniejszej rozprawy przyjęta zostanie terminologia angielska zakładająca, iż terminowa struktura stóp procentowych przedstawia zależność pomiędzy stopami zwrotu z instrumentów o tej samej jakości kredytowej, lecz o różnych zapadalnościach, natomiast jej graficzne przedstawienie w postaci funkcyjnej określane będzie mianem krzywej dochodowości (krzywej rentowności).

Struktura terminowa stanowiąca relację pomiędzy czasem i rentownością, odzwierciedla wpływ szerokiej gamy czynników determinujących poziom stóp

¹⁷ Por. A. Sławiński, *Krzywa dochodowości*. „Bank i Kredyt” 1996 nr 11, s. 25.

¹⁸ S. M. Focardi, F. J. Fabozzi, *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management*. Op. cit., s. 599.

¹⁹ Instrumenty bezkuponowe (zerokuponowe) charakteryzują się jedynie dwoma przepływami – płatnymi w momencie rozpoczęcia i zakończenia inwestycji. Do najbardziej charakterystycznych instrumentów zaliczyć można lokaty międzybankowe, bony skarbowe oraz obligacje bezkuponowe. Szerzej: W. Jurek, *Konstrukcja i analiza portfela papierów wartościowych o zmiennym dochodzie*. Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2001, s. 17.

²⁰ S. Sundaresan, *Fixed Income Markets and Their Derivatives*. South-Western Thomson Learning 1997, s. 176.

²¹ M. Choudhry, *Analyzing and Interpreting the Yield Curve*. Op. cit., s. 55.

procentowych. W krótkim horyzoncie, w przypadku krótkoterminowych stóp procentowych, jest to przede wszystkim polityka pieniężna banku centralnego (polityka stopy procentowej) oraz popyt i podaż na środki płynne odzwierciedlające bieżącą sytuację na rynku pieniężnym²². Czynnikiem determinującym poziom stóp długoterminowych są przede wszystkim oczekiwania rynkowe dotyczące poziomu ryzyka, szacowanej inflacji, a także decyzji monetarnych²³.

Znajomość wpływu, jaki wywierają poszczególne czynniki na strukturę stóp procentowych, umożliwia dobór metody estymacji, która pozwala wiernie odzwierciedlać jej zachowania. W praktyce strukturę terminową konstruuje się na podstawie aktywów reprezentujących dany segment rynku. W Polsce możliwe jest zbudowanie struktury terminowej na bazie stóp natychmiastowych (stopy lokat międzybankowych, bonów i obligacji skarbowych) oraz stóp forward (instrumenty pochodne oparte na stopie procentowej). Zarówno struktury stóp spot, jak i forward pozwalają wyznaczyć teoretyczną strukturę implikowanych stóp forward wykorzystywaną w polityce pieniężnej banku centralnego.

Ponieważ empirycznie wyznaczona struktura terminowa zawiera jedynie skończoną liczbę kwotowań, podstawowym celem budowy krzywej jest takie „uzupełnienie brakujących fragmentów” krzywej, aby wiarygodnie odzwierciedlała ona obowiązujące w danym momencie warunki rynkowe.

Zastosowanie oszacowanej krzywej dochodowości jest wielorakie. Krzywe te są wykorzystywane przez praktycznie wszystkich uczestników rynku finansowego: banki oraz inne instytucje finansowe wyznaczają dziennie szereg krzywych dochodowości, aby wycenić swoje portfele w stosunku do rynku (ang. mark to market). Inwestorzy szacują krzywe dochodowości, aby znaleźć w oparciu o nie aktywa w danym momencie niedowartościowane (w celu ich zakupu) i przewartościowane do sprzedaży²⁴. Krzywa dochodowości – ze względu na swą budowę i

²² Y. P. Mehra, *Some Key Empirical Determinants of Short-Term Nominal Interest Rates*. Federal Reserve Bank of Richmond, *Economic Quarterly* Volume 81/3 Summer 1995, s. 33-51.

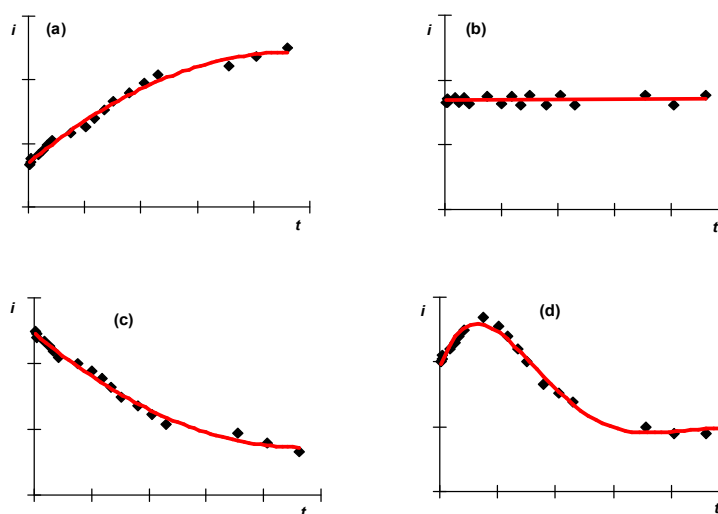
²³ Szerzej: M. Fisher, *Forces That Shape the Yield Curve: Parts 1 and 2*. Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 2001-3, March 2001.

²⁴ Metoda poszukiwania papierów niedowartościowanych bądź przewartościowanych (tzw. metoda cheap-dear) została opracowana przez JP Morgan. Szerzej: J. N. Loble, *J.P. Morgan Yield Curve Model*, mimeo, Bond Index Group, J.P. Morgan 1989.

zależność pomiędzy stopami spot i forward - zawiera także informacje o tym, co rynek (inwestorzy) w danej chwili sądzi o przyszłości. Jako swoisty wskaźnik nastrojów rynkowych służy bankom centralnym do szacowania oczekiwań dotyczących aktualnie prowadzonej polityki pieniężnej.

Teorie dotyczące krzywej dochodowości, będącej graficznym obrazem struktury terminowej stóp procentowych, można generalnie podzielić na dwie grupy²⁵. Pierwsza z nich obejmuje teorie o charakterze jakościowym, których celem jest opis i wyjaśnienie przebiegu, jaki wykazuje obserwowana funkcja na skutek określonych zachowań inwestorów. Druga grupa, obejmuje modele matematyczne struktury terminowej, których postać zależy w głównej mierze od celu, w jakim mają być stosowane (wycena instrumentów bądź analiza oczekiwań).

Rys. 1 Charakterystyczne typy krzywej dochodowości



Źródło: opracowanie własne

Przebieg, jaki przyjmuje krzywa dochodowości zależy od czynników determinujących stopy procentowe, takich jak polityka pieniężna banku centralnego, oczekiwania co do przyszłego poziomu inflacji czy też związana z danym instrumentem premia za ryzyko. Wieloletnie obserwacje rynków finansowych prowadzą

²⁵ D. Audley, R. Chin, S. Ramamurthy, *Term structure modeling*. w F.J. Fabozzi (ed): *Interest Rate, Term Structure and Valuation Modeling*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken 2002, s. 96.

do wniosku, iż najczęściej spotyka się cztery podstawowe typy krzywej: normalna (rosnąca), która też uważana jest za najbardziej naturalną, świadcząca o dobrym stanie gospodarki (Rys. 1a), płaska (zwana także quasi-płaską: Rys. 1b), odwrócona (malejąca) – (Rys. 1c) oraz w kształcie garbu (Rys. 1d)²⁶.

Próby wyjaśnienia przyczyn popularności określonych typów krzywych dochodowości sięgają końca XIX wieku, kiedy to po raz pierwszy przedstawione zostały założenia teorii oczekiwań. Wówczas też wskazano, iż aktualny przebieg krzywej dochodowości może być jednym z istotnych czynników determinujących poziomy stóp rynkowych w przyszłości. Powstanie nowych teorii, jak i modyfikacja już istniejących, pozwoliło na wyjaśnienie zmian przebiegu krzywej dochodowości zarówno w oparciu o przyjęte czynniki ekonomiczne jak i zachowania samych inwestorów (czynniki behawioralne).

W opracowaniu przyjęto definicje stopy forward jako wyznacznika stóp w przyszłości, po uwzględnieniu premii (dodatniej bądź ujemnej)²⁷:

$$\begin{cases} f_{\tau}(s, t) = E_{\tau}[i(s, t)] + \Phi(s, t) \\ \Phi(s, t) \in \mathfrak{R} \end{cases}, \text{ dla dowolnego } s \in (\tau; t]. \quad (13)$$

Krzywa jest tu odzwierciedleniem oczekiwań rynku z uwzględnieniem poziomu ryzyka, jakim obarczone są instrumenty w danym segmencie. W teorii tej, odrzuca się warunek rosnącej premii za ryzyko, a inwestorzy w sposób naturalny zmieniają swe preferencje w zależności od sytuacji, dzięki czemu możliwe są wszystkie typy (przebiegi) krzywej dochodowości, na ogół gładkie.

²⁶ Nazewnictwo krzywych dochodowości jest bardzo zróżnicowane i niejednoznaczne. W niniejszej rozprawie przyjęto terminologię przedstawioną przez F.J. Fabozzi, *Rynki obligacji. Analiza i Strategie*. WIG Press, Warszawa 2000, s. 120. Patrz także: F. J. Fabozzi, *Fixed Income Mathematics. Analytical and Statistical Techniques*. Fourth Edition, McGraw-Hill, New York, 2006, s. 116; L. Martellini, P. Priaulet, S. Priaulet, *Fixed-income securities: valuation, risk management, and portfolio strategies*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2003, s.65; M. Choudhry, *An Introductory Guide to Analyzing and Interpreting the Yield Curve*. w F.J. Fabozzi (ed): *Interest Rate, Term Structure and Valuation Modeling*. Wiley 2002, s. 73-91.

²⁷ F. Modigliani, R. Sutch, *Innovation In Interest Rate Policy*. „American Economic Review”, May 1966, s. 178-197.

1.2 Etapy budowy krzywej

Modelowanie krzywej dochodowości rozumiane jest jako proces konstrukcji funkcji ciągłej w oparciu o istniejące dyskretne dane rynkowe, wykorzystujący funkcyjny związek pomiędzy czynnikiem dyskontowym, stopą natychmiastową (stopą spot), a chwilową stopą forward (wzór (6)).

Na potrzeby dalszych rozważań przyjmuje się, że τ jest momentem konstrukcji krzywej, wartość instrumentu bezkuponowego w momencie zapadalności t jest równa jednostce, $P_\tau(\tau, t) = 1$ oraz że kapitał narasta w sposób ciągły. Wówczas można uprościć dotychczasową notację i przyjąć następujące oznaczenia:

- $$P_\tau(\tau, t) = \delta(\tau, t) = e^{-i(\tau, t)(t-\tau)}. \quad (14)$$

- $$i(\tau, t) = -\frac{\ln P_\tau(\tau, t)}{t-\tau} = -\frac{\ln \delta(\tau, t)}{t-\tau}. \quad (15)$$

- Dla $s < t$

$$f_\tau(s, t) = \frac{1}{t-s} \cdot \ln \frac{\delta(\tau, s)}{\delta(\tau, t)}. \quad (16)$$

W efekcie powstaje zależność pomiędzy ceną instrumentu bezkuponowego (czynnikiem dyskontowym) oraz chwilowymi stopami forward dana wzorem:

$$P_\tau(\tau, t) = \delta(\tau, t) = e^{-i(\tau, t)(t-\tau)} = e^{-\int_\tau^t f_\tau(s) ds}. \quad (17)$$

W szczególnym przypadku, jeśli moment wyznaczenia stopy $\tau = 0$, to przyjmując, że: $P_\tau(\tau, t) = P_0(0, t) \equiv P(t)$, $\delta(\tau, t) = \delta(0, t) \equiv \delta(t)$, $f_\tau(s) = f_0(s) \equiv f(s)$, wzór (17) upraszcza się do postaci:

$$P(t) = \delta(t) = e^{-i(0, t)t} = e^{-\int_0^t f(s) ds}. \quad (18)$$

Istniejąca współzależność czynnika dyskontowego, stopy spot oraz implikowanej forward powoduje, że znalezienie jednej ze stóp, automatycznie implikuje

poziom pozostałych²⁸. Z drugiej strony, zadanie znalezienia wszystkich trzech stóp sprowadza się do wyznaczenia jednej z nich.

Proces szacowania krzywej dochodowości można podzielić na kilka etapów obejmujących: dobór danych, budowę macierzy przepływów, wyznaczenie wektora cen teoretycznych, dobór kryterium szacowania krzywej do danych rzeczywistych.

Etap 1. Dobór danych

W trakcie doboru danych zakłada się, że wszystkie instrumenty, których stopy są wykorzystywane w procesie szacowania krzywej dochodowości, powinny się charakteryzować: jednakowym bądź zbliżonym ryzykiem, podobnymi warunkami obciążeń podatkowych oraz wysoką płynnością. Chodzi o to, by jedyną cechą różnicującą dane był termin do wykupu. W przypadku dwóch papierów o tym samym terminie zapadalności, instrumenty mniej płynne powinny zostać odrzucone²⁹.

Dla rozważenia przypadku ogólnego jako zbiór danych przyjęty zostanie zbiór wyznaczonych w momencie $\tau = 0$ cen P_j instrumentów zerokuponowych.

Etap 2. Budowa macierzy przepływów pieniężnych

Dla danych k instrumentów zerokuponowych tworzy się rosnący ciąg $\{t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_k\}$, wszystkich terminów $t_j = t_j - \tau$ odzwierciedlających czas pozostały do płatności nominalów. Ciąg ten stanowi podstawę do utworzenia wektora teoretycznych czynników dyskontowych $[\bar{\delta}(t_1) \ \bar{\delta}(t_2) \ \dots \ \bar{\delta}(t_k)]$, odpowiadających poszczególnym przepływom.

Następnie utworzona zostaje macierz diagonalna $\mathbf{C} = \{c_{j,j}\}_{j=1, \dots, k, j=1, \dots, k}$, której element $c_{j,j}$ odpowiada wartości przepływu j -tego instrumentu w terminie t_j .

²⁸ J. James, N. Weber, *Interest Rate Modeling*. Op. cit. , s. 423, a także: O. de La Grandville, *Bond Pricing and Portfolio Analysis*. MIT Press 2001, s. 240-243.

²⁹ K. Nawalkha, G. M. Soto, N. A. Beliaeva, *Interest rate risk modeling*. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey 2005, s. 72.

Etap 3. Przedstawienie wektora cen teoretycznych

Wektor cen teoretycznych $\bar{\mathbf{P}}_j = \{\bar{P}_j\}_{j=1,\dots,k}$ można zapisać jako iloczyn macierzy przepływów oraz czynników dyskontowych wyznaczonych na moment, w którym te przepływy następują:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \dots \\ \bar{P}_k \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot [\bar{\delta}(t_1) \quad \bar{\delta}(t_2) \quad \dots \quad \bar{\delta}(t_k)]^T, \quad (19)$$

gdzie: \bar{P}_l - cena teoretyczna l -tego instrumentu, $l = 1, 2, \dots, k$,

$\bar{\delta}(t_j)$ - teoretyczny czynnik dyskontowy dla j -tego przepływu,

$j = 1, 2, \dots, k$,

\mathbf{C} – macierz o k wierszach i k kolumnach obejmująca wartości przepływów dla poszczególnych instrumentów P_j , dla $j = 1, 2, \dots, k$.

Etap 4. Wybór modelu – funkcji szacującej

Spośród szeregu statycznych modeli krzywej dochodowości można wskazać dwa typy, które są często stosowane w polityce pieniężnej³⁰. Pierwszy polega na zastosowaniu funkcji, która przybliży bezpośrednio całą strukturę terminową spot lub forward (tzw. modele parametryczne, oszczędne). Drugi zakłada szacowanie struktury czynników dyskontowych za pomocą funkcji sklepanych, tworzących funkcję ciągłą. Postać funkcyjna modelu związana jest zwykle z parametrami, których wyznaczenie pozwala na uzyskanie teoretycznej krzywej dochodowości.

Nie jest możliwe jednoznaczne wskazanie najlepszego modelu szacowania krzywej dochodowości. W krajach rozwijających się (w tym także i w Polsce) niedostatek danych wymusza stosowanie modeli parametrycznych, jednakże wraz z

³⁰ Pierwsze próby szacowania brakujących fragmentów krzywej polegały na interpolacji liniowej przedziałów. Podstawową wadą tego postępowania jest jednak możliwość wystąpienia niemalejącej funkcji dyskontowej, która w efekcie prowadzi do całkowicie błędnych wniosków. W. Waluś, *Nota o interpolacji czynników dyskontowych*, „Rynek Terminowy” 2001, nr 1(7), s. 117.

rozwojem rynków finansowych popularność funkcji sklejanych (które wymagają przynajmniej dwunastu płynnych kwotowań) zapewne wzrośnie³¹.

Porównując metody szacowania struktury terminowej, M. Choudhry wskazuje na cztery podstawowe elementy determinujące wybór modelu: jakość dopasowania do danych rynkowych, zgodność z jednym z klasycznych typów krzywej dochodowości, prostota oraz cel, w jakim model ma być wykorzystywany³².

Choć dla potrzeb zarządzania ryzykiem konieczna jest przede wszystkim dokładność dopasowania, polityka monetarna nie wymusza wielkiej precyzji szacunków - liczy się przede wszystkim prostota konstrukcji. Warunkiem akceptacji w praktyce jest jednak uzyskanie jednego z czterech podstawowych przebiegów krzywej: rosnącego, malejącego, płaskiego oraz z garbem.

Dodatkowo estymowaną krzywą powinien charakteryzować wysoki stopień wygładzenia, elastyczności oraz stabilności. Cechy te są rozumiane specyficznie, a ich definicja odbiega od klasycznie rozumianych pojęć³³.

Cechy te są szczególnie istotne, gdy dodatkowym elementem brany pod uwagę jest specyfika potrzeb polityki pieniężnej. W przypadku analizy długoterminowej, dotyczącej wyodrębniania oczekiwań inflacyjnych, istotnym elementem determinującym wybór modelu będzie stabilność tego fragmentu szacowanej krzywej, który odzwierciedla poziom stóp długoterminowych.

Konieczność dokonania analizy krótkoterminowej, najczęściej w celu wyodrębnienia oczekiwań krótkoterminowych, wymaga aby stosowany model cechował się elastycznością niezbędną do odzwierciedlenia częstych zmian, jakie mają miejsce w przypadku stóp o krótkim terminie zapadalności. Okazuje się, że w takim przypadku, przy niewielkiej liczbie dostępnych danych, korzystanie z modeli pa-

³¹ Raport BIS (2005) wskazuje, że we współczesnej polityce pieniężnej najczęstsze zastosowanie znajduje model funkcji sklejanych oraz dwa modele parametryczne: Nelsona-Siegela oraz jego rozszerzona wersja, model Svenssona.. BIS, Monetary and Economic Department, *Zero-coupon yield curves: technical documentation*, BIS Papers No 25, October 2005.

³² M. Choudhry, *The Market Yield Curve and Fitting the Term Structure of Interest Rates*. w: F. J. Fabozzi [ed.] *The handbook of fixed income securities*. McGraw-Hill, New York 2005, s. 965.

³³ Wygładzenie jest tu rozumiane jako niewielka liczba ekstremów, elastyczność jako wrażliwość krzywej w przypadku stóp krótkoterminowych (gdzie zmienność stóp jest znaczna), a mniejszej dla długoterminowych, a stabilność wyraża się poprzez odporność na jednostkowe zmiany rentowności, czasem będące efektem przypadkowych bądź błędnych kwotowań. Za: N. Anderson, J. Sleah, *New estimates of the UK real and nominal yield curves*. "Bank of England Quarterly Bulletin", November 1999, s. 384-392.

rametrycznych, pozwalających na bezpośrednie szacowanie krzywej forward, jest korzystniejsze niż uzyskiwanie jej z krzywej dyskontowej (jak ma to miejsce w modelu funkcji sklepanych)³⁴.

Etap 5. Kryterium dopasowania modelu do danych rzeczywistych

W przypadku instrumentów o stałym dochodzie estymacja parametrów odbywa się poprzez minimalizację średniej sumy kwadratów różnic wartości teoretycznych i rynkowych, a stosowana procedura oparta na nieliniowej metodzie najmniejszych kwadratów. Miarą niedopasowania modelu może być zarówno suma kwadratów różnic cen, jak i suma kwadratów różnic rentowności.

W oparciu o przyjęte kryterium, wyznaczenie bezkuponowej krzywej dochodowości (krzywej dyskontowej) sprowadza się do takiego doboru parametrów związanych z modelem, aby zminimalizować funkcję $\Psi(\cdot)$ o postaci:

$$\Psi(P) = \sum_{l=1}^k (P_l - \bar{P}_l)^2 \rightarrow \min, \quad (20)$$

lub

$$\Psi(Y) = \sum_{l=1}^k (i_l - \bar{i}_l)^2 \rightarrow \min. \quad (21)$$

lub

$$\Psi(P/D) = \sum_{l=1}^k \left(\frac{P_l - \bar{P}_l}{D_l} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (22)$$

gdzie: $\Psi(P/D)$ - kryterium estymacji oparte na cenach ważonych odwrotnością duration,

P_l - cena rzeczywista l -tego instrumentu, $l = 1, 2, \dots, k$,

\bar{P}_l - cena teoretyczna l -tego instrumentu, $l = 1, 2, \dots, k$,

D_l - duration l -tego instrumentu.

Przeprowadzona przez Bank Rozrachunków Międzynarodowych (ang. Bank for International Settlements, BIS) analiza wykorzystania modeli parametrycznych

³⁴ L. Martellini, P. Priaulet, S. Priaulet: *Fixed Income Securities*, op. cit., s. 143. Opinię tę potwierdza Filipović, który do walorów modeli parametrycznych zalicza: szeroki wachlarz otrzymanych postaci szacowanej krzywej dochodowości, prostotę modelu (niewielką liczbę parametrów), gładkość otrzymanej krzywej oraz kompatybilność z modelami dynamicznymi stopy procentowej. D. Filipović, *Term-Structure Models. A graduate course*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009, s. 52.

wskazuje, nie ma konsensusu co do wyboru kryterium dopasowania szacowanej funkcji do danych rzeczywistych (choć jest ono wybrane arbitralnie), nie wskazano również żadnych kryteriów wyboru konkretnej funkcji celu.

1.3 Modelowanie krzywej dochodowości w warunkach polskich

Estymacja struktury terminowej stóp procentowych jest przedmiotem zainteresowania wielu banków centralnych. Wynika to głównie z faktu wykorzystania jej potencjału informacyjnego dla prowadzenia skutecznej polityki pieniężnej. Stąd też istotnym problemem staje się wybór kryterium dopasowania krzywej do danych rynkowych, tak by oszacowana krzywa dochodowości możliwie dobrze odzwierciedlała aktualną sytuację rynkową.

Ponieważ modelowanie struktury terminowej na potrzeby polityki pieniężnej sprowadza się do znalezienia pewnego subiektywnego konsensusu pomiędzy jakością dopasowania a akceptowaną gładkością, elastycznością oraz stabilnością szacowanej krzywej, proces oceny modelu należy rozpatrywać na kilku płaszczyznach, uwzględniających:

- dobór oraz weryfikację dostępnych danych,
- wybór modelu
- wybór kryterium dopasowania szacowanych funkcji do danych rzeczywistych oraz procedury estymacji parametrów,
- ocenę jakości modelu.

Polskie doświadczenia dotyczące modelowania krzywej dochodowości nie mają długiej historii. M. Stamirowski (1999) przedstawił pierwsze próby szacowania terminowej struktury stóp procentowych w oparciu o parametryczny model Nelsona-Siegela. Dokonane szacunki przeprowadzone były na podstawie danych obejmujących kwotowania wybranych bonów skarbowych oraz obligacji³⁵. Na-

³⁵ M. Stamirowski, *Empirical application of the „Nelson and Siegel” parsimonious zero-coupon yield curve model*. NBP, Paper no 16, Warsaw, 1999.

stępnie problem ten rozwinęli I. Stępniaak i J. Zieliński (2000), budując krzywe dochodowości przy wykorzystaniu modelu Svenssona na wtórnym rynku obligacji skarbowych³⁶. Ze względu na krótki horyzont czasowy dostępnych wówczas instrumentów, a także z uwagi na wielkość obrotów, oba badania miały raczej charakter informacyjny, prezentujący możliwości interpretacyjne krzywych dochodowości.

M. Świętoń (2002) badał możliwości estymacji krzywej dochodowości na rynku papierów dłużnych (bonów oraz obligacji skarbowych) za pomocą modelu Nelsona-Siegela. Analiza potencjału informacyjnego krzywej dochodowości pozwoliła potwierdzić prawdziwość czystej teorii oczekiwań w krótkim terminie (do jednego miesiąca), natomiast w horyzoncie rocznym - teorii oczekiwań ze stałą premią czasową³⁷.

G. Cięciwa (2003) scharakteryzował możliwości modelowania krzywej dochodowości przy użyciu metody bootstrappingu³⁸, natomiast pierwsze próby estymacji krzywej rynku pieniężnego za pomocą modelu funkcji sklepanych przedstawił E. Gurazdowski (2003)³⁹. K. Liberadzki, J. Wójcik (2006) wskazali z kolei nowe kierunki estymacji krzywej dochodowości z wykorzystaniem algorytmu genetycznego⁴⁰.

M. Marciniak (2006), porównał model Svenssona oraz funkcji sklepanych dla danych z rynku obligacji. Wskazał wady i zalety każdego z modeli z uwzględnieniem cech rynku polskiego, charakteryzującego się średnią płynnością. Dokonał także próby wykorzystania krzywej dochodowości do zbadania wpływu nieprzewidywanych zdarzeń na rynek finansowy⁴¹.

³⁶ I. Stępniaak, J. Zieliński: *Estymacja i interpretacja zerokuponowej krzywej dochodowości*. Materiały i Studia NBP 2000, nr 108.

³⁷ M. Świętoń, *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001*. Materiały i Studia NBP 2002, nr 150.

³⁸ G. Cięciwa, *Wyznaczanie krzywych dochodowości metodą zmodyfikowanego bootstrappingu*. „Bank i Kredyt” 2003, nr 2, s. 81-86.

³⁹ E. Gurazdowski, *Wykorzystanie modelu zmiennej sztywności krzywej stop terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego*. „Bank i Kredyt” 2003, nr 2, s. 87-91.

⁴⁰ K. Liberadzki, J. Wójcik, *Wyznaczanie zerokuponowej krzywej dochodowości z wykorzystaniem hybrydowego algorytmu genetycznego*. „Bank i Kredyt” 2006, nr 2, s. 55-69.

⁴¹ Oba zbiory danych: stopy rentowności obligacji oraz lokat międzybankowych posłużyły do szacowania jednej krzywej. Szerzej: M. Marciniak, *Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland*. „Bank i Kredyt” 2006, nr 10, s. 52-74.

P. Kliber (2009) dokonał analizy porównawczej trzech modeli: Nelsona-Siegela, Svenssona oraz funkcji sklepanych na podstawie danych z rynku obligacji uzupełnionych stawkami WIBOR. Dodatkowo przeprowadził analizę zmienności stóp spot uzyskanych w wyniku estymacji modelu⁴².

Polski bank centralny informuje o konstrukcji bezkuponowej krzywej dochodowości od 1999 roku, kiedy to w *Raportach o inflacji* przedstawione zostały pierwsze wyniki estymacji modelu Svenssona. Biorąc pod uwagę mało wówczas płynny polski rynek papierów skarbowych, horyzont konstruowanej krzywej wynosił 5 lat, a od I kwartału 2002 został wydłużony do 10 lat.

1.3.1 Dobór i weryfikacja dostępnych danych

Choć tak wiele zrobiono w celu poprawy jakości samych danych, dostęp do nich należy określić jako bardzo ograniczony. Brak jest powszechnego na rynkach rozwiniętych zwyczaju konstruowania stawek referencyjnych dla praktycznie każdego płynnego segmentu rynku. W efekcie jedynym źródłem danych mogą stać się kwotowania banków komercyjnych, które nie są powszechnie dostępne. Niedostatek danych, ich subiektywny dobór, który może nie odzwierciedlać aktualnego stanu rynku, są dodatkowymi elementami zakłócającymi proces szacowania krzywej.

Na potrzeby niniejszego opracowania użyto danych z trzech segmentów rynku pieniężnego z lat 2009-2012:

- lokat międzybankowych, gdzie posłużono się dziennymi stopami WIBOR z pominięciem stawek najkrótszych, co sprawia, że struktura terminowa jest ciągiem złożonym z siedmiu elementów (stóp 1-, 2-tygodniowych, 1-, 3-, 6-, 9-miesięcznych oraz stopy rocznej)⁴³;
- transakcji FRA, rozpatrywanych oddzielnie dla 3 oraz 6 miesięcy, przy czym grupa pierwsza składająca się z trzynastu stóp 3-miesięcznych, oznaczonych w tekście jako FRA 3M (1x4, 2x5, 3x6, 4x7, 5x8, 6x9, 7x10, 8x11, 9x12, 12x15, 15x18, 18x21, 21x24) i grupa druga obejmująca osiem stóp 6-miesięcznych

⁴² P. Kliber, *Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce*. „Bank i Kredyt” 2009, nr 40 (1), s. 107-122.

⁴³ Nie wykorzystano stawek O/N oraz T/N, których duża zmienność jest efektem podaży i popytu na środki płynne uczestników rynkowych.

(FRA 6M: 1x7, 2x8, 3x9, 4x10, 5x11, 6x12, 12x18, 18x24). Utworzone dwa ciągi implikowanych stóp forward o tej samej zapadalności lecz różnych momentach rozpoczęcia transakcji wykorzystane zostały do bezpośredniego wyznaczenia implikowana stopa forward;

- swapów stopy procentowej, obejmujących kwotowania swapów o zapadalności od jednego roku do 10 lat, do których dołączono kwotowanie jednodniowej stawki POLONIA, uzyskując w efekcie ciąg składający się z jedenastu elementów. W celu uzyskania czynników dyskontowych konieczna była dekompozycja stałej stopy swap na stopy spot w oparciu o wzór⁴⁴:

$$\begin{cases} \delta(\tau, t_1) = \frac{1}{1 + r(\tau, t_1)} \\ \delta(\tau, t_j) = \frac{1 - r(\tau, t_j) \cdot [\delta(\tau, t_1) + \delta(\tau, t_2) + \dots + \delta(\tau, t_{j-1})]}{1 + r(\tau, t_j)} \end{cases} \quad (23)$$

gdzie: $r(\tau, t_j)$ - stała stopa swap dla transakcji o zapadalności t_j dla $j = 1, 2, \dots, k$

1.3.2 Wybór modelu – modele parametryczne

Choć tworzenie modeli krzywej w celu wspomaganie polityki pieniężnej ma krótką historię, w krajach o dobrze rozwiniętym rynku finansowym znalazły zastosowanie modele parametryczne opartych na pracach Nelsona-Siegela i Svenssona, a także modele funkcji sklepanych. Te pierwsze - najpopularniejsze - znalazły zastosowanie w polityce pieniężnej Europejskiego Banku Centralnego, a także Narodowego Banku Polskiego (NBP).

Jedną z głównych przyczyn szerokiego wykorzystania modeli parametrycznych do budowy bezkuponowej krzywej dochodowości jest ich prostota oraz niewielka liczba estymowanych parametrów. Prostota modeli rodzi jednak pewne niedogodności. Ponieważ możliwe jest niedopasowanie wartości teoretycznych i rynkowych, modele te nie powinny być stosowane do wyceny instrumentów pochodnych.

⁴⁴ Por. Y. S. Stander, *Yield Curve Modeling*, Palgrave Macmillan, New York 2005, s.18-22 oraz P. Bachert, *Wycena procentowych kontraktów swap przy użyciu krzywej zerokuponowej*. „Bank i Kredyt” 1998, nr 4, s. 49-53.

Model Nelsona-Siegela

Model Nelsona-Siegela⁴⁵ przedstawia chwilową stopę forward $f(s)$, dla $s \in [0; t]$, jako funkcję czterech parametrów $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \nu$:

$$f(s) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{s}{\nu}} + \beta_2 \cdot \frac{s}{\nu} \cdot e^{-\frac{s}{\nu}}. \quad (24)$$

Model dla implikowanej chwilowej stopy forward pozwala – na podstawie wzoru (18) – na otrzymanie stopy spot $i(0, t)$ poprzez wyznaczenie całki na przedziale $[0, t]$:

$$i(0, t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{\nu}}}{\frac{t}{\nu}} - \beta_2 \cdot e^{-\frac{t}{\nu}}. \quad (25)$$

Parametry modelu Nelsona-Siegela mają następującą interpretację:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} i(0, t) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \beta_0$, przez co parametr β_0 jest interpretowany jako poziom stopy długoterminowej o bardzo odległym terminie zapadalności.
- $\lim_{t \rightarrow 0} i(0, t) = i(0) = \beta_0 + \beta_1$, suma parametrów $\beta_0 + \beta_1$ odzwierciedla poziom chwilowej stopy spot i często jest interpretowana jako przybliżenie jednodniowej stopy overnight.
- parametry β_0 i $(\beta_0 + \beta_1)$ są interpretowane jako stopy procentowe, w procesie estymacji przyjmuje się założenie, że: $\beta_0 > 0$ oraz $\beta_0 + \beta_1 > 0$.
- ν - parametr interpretowany jako moment w czasie (stąd założenie, że $\nu > 0$).

Wykorzystując wzory (18-19) teoretyczny czynnik dyskontowy przyjmuje postać:

$$\bar{\delta}(t_j) = \exp \left[- \left(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t_j}{\nu}}}{\frac{t_j}{\nu}} - \beta_2 \cdot e^{-\frac{t_j}{\nu}} \right) \cdot t_j \right]. \quad (26)$$

Ze względu na to, że w modelu jest określona chwilowa stopa forward, konstrukcja krzywej dochodowości sprowadza się do znalezienia takich ocen parametrów $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \nu$, które pozwoliłyby zminimalizować wybraną funkcję $\Psi(\cdot)$

⁴⁵ C. R. Nelson, A. F. Siegel, *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. "Journal of Business" 1987, Vol. 60, No. 4, s. 473-489.

(wzór (20-22)). W celu oszacowania parametrów krzywej stosuje się numeryczne metody poszukiwania minimum, które jednak nie gwarantują znalezienia minimum globalnego. Kluczową rolę odgrywa zatem w praktyce dobór warunków początkowych związany z interpretacją rynkową parametrów⁴⁶.

Model Svenssona

Wady modelu Nielsona-Siegela zniwelował korygował model Svenssona⁴⁷ zwiększając liczbę parametrów z czterech do sześciu. Model ten przedstawia chwilową stopę forward jako funkcję parametrów: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \nu_1, \beta_3, \nu_2$, z których cztery pierwsze odgrywają taką samą rolę jak w modelu Nielsona-Siegela:

$$f(s) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{s}{\nu_1}} + \beta_2 \cdot \frac{s}{\nu_1} \cdot e^{-\frac{s}{\nu_1}} + \beta_3 \cdot \frac{s}{\nu_2} \cdot e^{-\frac{s}{\nu_2}}. \quad (27)$$

W celu konstrukcji krzywej dochodowości spot wykorzystuje się całkę chwilowej stopy procentowej $f(s)$ na przedziale $[0; t]$:

$$i(0, t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{\nu_1}}}{\frac{t}{\nu_1}} - \beta_2 \cdot e^{-\frac{t}{\nu_1}} + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{\nu_2}}}{\frac{t}{\nu_2}} - e^{-\frac{t}{\nu_2}} \right). \quad (28)$$

Parametr ν_2 interpretowany jest jako moment w czasie dla którego przebieg funkcji zakreśla drugi garb i przyjmuje wartość dodatnią. Teoretyczny czynnik dyskontowy można zapisać w sposób określony wzorem (29):

$$\bar{\delta}(t_j) = \exp \left[- \left(\beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t_j}{\nu_1}}}{\frac{t_j}{\nu_1}} - \beta_2 \cdot e^{-\frac{t_j}{\nu_1}} + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{t_j}{\nu_2}}}{\frac{t_j}{\nu_2}} - e^{-\frac{t_j}{\nu_2}} \right) \right) \cdot t_j \right]$$

Dla zadanej postaci czynnika dyskontowego (opartej na sześciu parametrach modelu Svenssona) wyznaczenie krzywej dochodowości sprowadza się do takiego doboru ocen parametrów $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \nu_1, \beta_3, \nu_2$, aby zminimalizować

⁴⁶ Szerzej: A. J. G. Cairns, *Interest Rate Models: an introduction*. Princeton University Press, New Jersey 2004, s. 230-231.

⁴⁷ Szerzej: L.E.O. Svensson, *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. "NBER Working Paper Series" 1994, No. 4871.

funkcję $\Psi(\cdot)$. Podobnie jak w przypadku modelu Nelsona-Siegela, w praktyce kluczową rolę odgrywa dobór warunków początkowych nakładanych w procesie estymacji na wektor parametrów.

Mimo braku gwarancji znalezienia minimum globalnego, pozytywnym aspektem modeli parametrycznych pozostaje ich prostota, która powoduje, że krzywą można szacować bez specjalistycznego oprogramowania⁴⁸. Porównując analizowane typy modeli krzywej dochodowości ze względu na gładkość, elastyczność oraz stabilność można stwierdzić, że zarówno model funkcji sklepanych, jak i Nelsona-Siegela nie cechuje się nadmierną elastycznością⁴⁹. Z kolei model Svenssona (pomimo niekwestionowanej prostoty) często traci stabilność - niewielkim zmianom rentowności instrumentów długoterminowych towarzyszą znaczne wahania stóp krótkoterminowych, nieadekwatne do faktycznej sytuacji na rynku. Wzbogacając model Nelsona-Siegela o dodatkowy składnik, Svensson uzyskał większą elastyczność szacowanej krzywej, ale kosztem stabilności⁵⁰.

1.3.3 Wybór kryterium dopasowania

Wybór kryterium dopasowania szacowanej funkcji do danych rzeczywistych niesie również ze sobą istotne konsekwencje. W celu porównania jakości oszacowanych modeli stosuje się odpowiednie przeliczenia pozwalające wyrazić błąd w tych samych jednostkach. W przypadku modeli stopy procentowej najczęściej stosowaną miarą jest uśredniona suma kwadratów różnic rentowności teoretycznych i rzeczywistych.

Dla potrzeb niniejszego opracowania, w celu oszacowania krzywych dochodowości przyjęto trzy kryteria dopasowania funkcji do danych rzeczywistych:

⁴⁸ Szerzej: M. Jackson, M. Staunton: *Advanced Modeling in Finance using Excel and VBA*. Wiley, Chichester 2001.

⁴⁹ Porównanie modeli znaleźć można u: M. Fisher, D. Nychka, D. Zervos, *Fitting the Term Structure of Interest Rates with smoothing splines*. "Finance and Economics Discussion Series" 1995, Federal Reserve Board, Washington, D.C., Working Paper 95-1; D. F. Waggoner, *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 1997, 97-10; R. R. Bliss, *Testing term structure estimation methods*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 1996, 96-12a.

⁵⁰ Por. S. K. Nawalkha, G. M. Soto, N. A. Beliaeva, *Interest Rate Risk Modeling*. Op. cit., s. 68-71.

$$\min_{\beta^*} \Psi(P), \text{ gdzie } \Psi(P) = \sum_{l=1}^k (P_l(t_l) - \overline{P_l(t_l)})^2, \quad (30a)$$

$$\min_{\beta^*} \Psi(P/D), \text{ gdzie } \Psi(P/D) = \sum_{l=1}^k \left(\frac{P_l(t_l) - \overline{P_l(t_l)}}{D_l} \right)^2, \quad (30b)$$

$$\min_{\beta^*} \Psi(Y), \text{ gdzie } \Psi(Y) = \sum_{l=1}^k (i_l(t_l) - \overline{i_l(t_l)})^2. \quad (30c)$$

Otrzymany wektor β^* jest wektorem ocen parametrów β , mający postać:

$$\beta^* = \begin{cases} [\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, v^*] & \text{dla modelu Nelsona – Siegela} \\ [\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*, v_1^*, v_2^*] & \text{dla modelu Svenssona} \end{cases}.$$

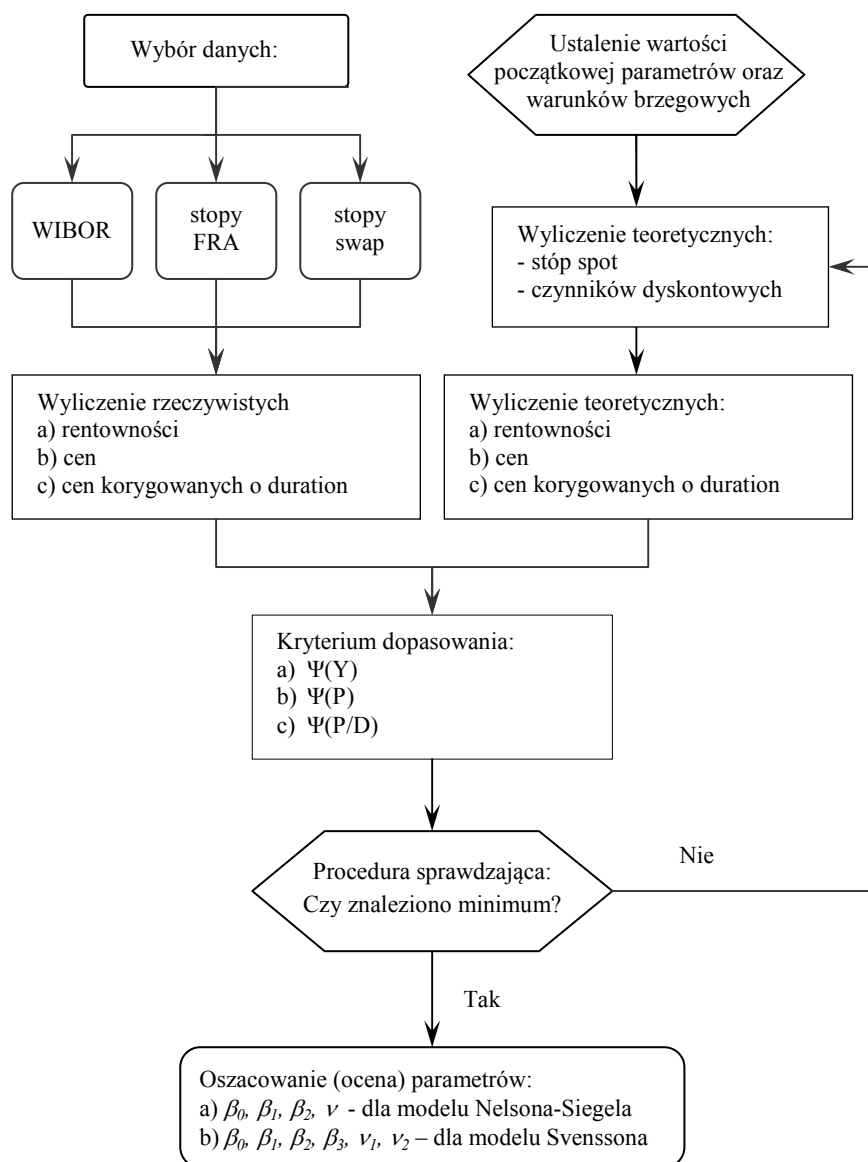
Celem procedury estymacyjnej jest znalezienie takiego wektora parametrów β^* , który umożliwi najlepsze przybliżenie wartości rynkowych (zgodne z przyjętym kryterium dopasowania). Ponieważ narzucona procedura nie ma rozwiązania analitycznego, zostało ono wyznaczone numerycznie (nieliniową metodą najmniejszych kwadratów).

Wybór kryterium dopasowania szacowanej funkcji do danych rzeczywistych pozwala rozpocząć proces estymacji parametrów. Ponieważ procedura ta nie jest jednoznaczna, istotne jest prawidłowe ustalenie warunków brzegowych oraz przyjęcie określonych wartości początkowych parametrów. Ze względu na konstrukcję modeli parametrycznych oraz interpretację parametrów, warunki brzegowe nie mogą być ustalane dowolnie. Ustala się a priori, że: $\beta_0 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ oraz $v > 0$ (dla modelu Nelsona-Siegela) i $\beta_0 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$ oraz $v_2 \geq v_1 > 0$ dla modelu Svenssona.

Równie ważna jest wartość początkowa parametrów przyjmowanych jako punkt wyjściowe do estymacji. Do analizy przyjęto, że w pierwszym dniu, dla którego uzyskano dane, wartościami początkowymi są wielkości odpowiadające aktualnej sytuacji na rynku: β_0 odpowiada stopie długoterminowej, natomiast $\beta_0 + \beta_1$ - krótkoterminowej. Pozostałe parametry ustala się zgodnie z interpretacją danego typu modelu parametrycznego. W procesie estymacji, w kolejnych dniach za wektor początkowy przyjęty został wektor parametrów uzyskany w wyniku poprzedniej estymacji.

Biorąc pod uwagę niewielką liczbę danych, jakimi dysponuje polski międzybankowy rynek lokat, transakcji FRA oraz swap, proces szacowania krzywej dochodowości oparty został na dwóch typach modeli parametrycznych: Nelsona-Siegela oraz Svenssona .

Rys. 2 Procedura szacowania struktury terminowej dla modeli parametrycznych



Źródło: opracowanie własne na podstawie I. Meier, *Estimating the term structure of interest rates: the Swiss case*. Swiss National Bank, Working Papers nr 99.06.

Streszczenie:

W rozdziale drugim dokonano weryfikacji modeli parametrycznych z wykorzystaniem klasycznych miar błędu. Na drugim etapie oceny modeli zastosowano metody wykorzystywane dotąd na rynku instrumentów pochodnych, których istotą jest analiza ryzyka. Skonstruowano trzy nowe mierniki oparte na cechach implikowanych stóp forward i obejmujących analizę struktury terminowej zmienności, powierzchni korelacji oraz premii za ryzyko.

2 Kryteria oceny modeli krzywej dochodowości

2.1 Klasyczne miary weryfikacji modelu

Pomimo różnych badań dotyczących możliwości szacowania krzywych dochodowości, nie ustalono dotąd powszechnie przyjętych kryteriów służących weryfikacji modeli ze względu na dobór kryterium optymalizacyjnego (kryterium dopasowania szacowanej funkcji do danych rzeczywistych)⁵¹.

W niniejszym opracowaniu, do porównania otrzymanych funkcji wykorzystano następujące miary wyrażone w punktach procentowych:

- średnie przeciętne (bezwzględne) odchylenie MAE , wyrażające średnią różnicę pomiędzy stopami obserwowanymi a teoretycznymi instrumentów o różnej zapadalności lecz pozyskanych w tym samym dniu τ , na podstawie wzoru:

$$MAE_{\tau} = \frac{\sum_{l=1}^k |i_l(\tau, t_l) - i_l^*(\tau, t_l)|}{k} \quad (31)$$

- średni kwadratowy błąd MSE, dla rentowności:

$$MSE_{\tau} = \frac{\sum_{l=1}^k (i_l(\tau, t_l) - i_l^*(\tau, t_l))^2}{k}, \quad (32)$$

gdzie $i_l^*(\tau, t_l)$ rentownością wyznaczoną w momencie τ w oparciu o uzyskany w

wyniku estymacji wektor ocen parametrów β_{τ}^* postaci:

$$\beta_{\tau}^* = \begin{cases} [\beta_{0,\tau}^*, \beta_{1,\tau}^*, \beta_{2,\tau}^*, v_{\tau}^*] & \text{dla modelu Nelsona – Siegela} \\ [\beta_{0,\tau}^*, \beta_{1,\tau}^*, \beta_{2,\tau}^*, \beta_{3,\tau}^*, v_{1,\tau}^*, v_{2,\tau}^*] & \text{dla modelu Svenssona} \end{cases}$$

k - liczba dni w których dokonywano konstrukcji krzywej (okres badawczy)

Zastosowana w powyższych dwóch przypadkach statystyka opisowa błędu, choć nie jest pozbawiona wad (nie rozróżnia kierunku niedopasowania), pozwala na pewną interpretację otrzymanych wyników. Zarówno średnia, jak i odchylenie standardowe pozwalają ocenić elastyczność danego modelu, rozumianą jako ła-

⁵¹ Analiza porównawcza pod kątem dopasowania krzywych do danych rzeczywistych została przeprowadzona przez Brousseau (2002). Szerzej: V. Brousseau, *The functional form of yield curves*. ECB Working Paper No 148, ECB, May 2002.

twość dostosowania szacowanej funkcji do zmieniających się warunków rynkowych. Niska wartość średniej błędów pozwala przypuszczać, iż model jest dobrze dopasowany do wartości rzeczywistych. Odchylenie standardowe umożliwia z kolei ocenę rozrzutu wartości błędów wokół średniej i może być interpretowane jako stopień dokładności dopasowania na przestrzeni całej próby badawczej⁵². Warto podkreślić, że jest to ocena oszacowania całej funkcji, niezależnie od terminu zapadalności. Stąd też bazując na tych miarach nie jest możliwa ocena dopasowania w poszczególnych segmentach krzywej dochodowości.

Ponieważ oceny parametrów nie są stałe (w każdym dniu τ procedura szacowania krzywej jest powtarzana na nowo), obie miary są również zmienne w czasie, przez co przedmiotem oceny jest wartość średnia oraz odchylenie standardowe wyznaczone za analizowany okres badawczy.

Na potrzeby prowadzonej analizy zweryfikowano jakość dopasowania modeli parametrycznych w zależności od przyjętego kryterium dopasowania $\Psi(\cdot)$ (wzory (30a-30c)). Sama procedura szacowania krzywej jest przeprowadzana dla każdego dnia τ , z którego pochodzą dane. Proces szacowania krzywych w oparciu o dane obowiązujące w dniu τ powtarzano trzykrotnie dla obu modeli: Nelsona-Siegela i Svenssona.

W efekcie zastosowanej procedury (Rys. 2), dla każdego instrumentu i dla każdej dziennej grupy danych otrzymano sześć wektorów miar MAE_{τ} oraz MSE_{τ} (po trzy dla każdego typu modelu parametrycznego), wyznaczonych na podstawie rentowności teoretycznych. Procedura estymacyjna powtarzana była dla każdego dnia τ , z którego pochodzą dane.

W tabelach przyjęto następujące oznaczenia poziomu statystyk miar (średniej i odchylenia standardowego) MAE_{τ} (Tabela 1) oraz MSE_{τ} (Tabela 2) wyznaczonych na podstawie rentowności teoretycznych uzyskanych w modelu:

NS_P – Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P)$,

NS_P/D – Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P/D)$,

⁵² N. Anderson, F. Breedon, M. Deacon, A. Derry, M. Murphy, *Estimating and interpreting the yield curve*. Op. cit., s. 58-59.

NS_Y – Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(Y)$,

Sv_P - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P)$,

Sv_P/D - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P/D)$,

Sv_Y - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(Y)$.

Tabela 1

Statystyki MAE_r - miary przeciętnego odchylenia stóp teoretycznych konstruowanych na podstawie modeli parametrycznych od stóp rzeczywistych w latach 2009-2012.

MAE		NS_P	NS_Y	NS_P/D	Sv_P	Sv_Y	Sv_P/D
WIBOR	średnia	0,0807	0,0163	0,0158	0,1173	0,0147	0,0444
	odchylenie standardowe	0,0316	0,0112	0,0102	0,0663	0,0093	0,0069
FRA 3M	średnia	0,0288	0,0138	0,0173	0,0284	0,0162	0,0363
	odchylenie standardowe	0,0045	0,0069	0,0098	0,0042	0,0077	0,0155
FRA 6M	średnia	0,0738	0,0340	0,0314	0,1675	0,0165	0,0259
	odchylenie standardowe	0,0401	0,0161	0,0155	0,0377	0,0089	0,0106
SWAP	średnia	0,0074	0,0118	0,0336	0,0546	0,0126	0,0557
	odchylenie standardowe	0,0062	0,0083	0,0167	0,0063	0,0080	0,0072

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2

Statystyki MSE_r - miary średniego błędu kwadratowego stóp teoretycznych konstruowanych na podstawie modeli parametrycznych od stóp rzeczywistych w latach 2009-2012.

MSE		NS_P	NS_Y	NS_P/D	Sv_P	Sv_Y	Sv_P/D
WIBOR	średnia	0,0095	0,0006	0,0005	0,0277	0,0004	0,0034
	odchylenie standardowe	0,0069	0,0008	0,0007	0,0313	0,0007	0,0009
FRA 3M	średnia	0,0011	0,0004	0,0008	0,0011	0,0003	0,0030
	odchylenie standardowe	0,0004	0,0004	0,0019	0,0004	0,0004	0,0025
FRA 6M	średnia	0,0674	0,0019	0,0018	0,0609	0,0005	0,0012
	odchylenie standardowe	0,0723	0,0018	0,0024	0,0533	0,0007	0,0008
SWAP	średnia	0,0002	0,0003	0,0019	0,0033	0,0002	0,0037
	odchylenie standardowe	0,0006	0,0007	0,0018	0,0013	0,0008	0,0016

Źródło: opracowanie własne

Weryfikacja dopasowania krzywych oszacowanych na podstawie danych dotyczących dnia τ została przeprowadzona dla poszczególnych segmentów rynku i objęła cztery zbiory danych: lokaty międzybankowe, FRA 3- i 6-miesięczne oraz swapy. W przypadku danych pochodzących z poszczególnych segmentów rynku, dla każdego dnia z którego pozyskano ciąg stóp tworzących strukturę terminową dokonano trzykrotnego oszacowania krzywej ze względu na różne kryteria dopasowania. Procedurę powtarzano dwukrotnie: dla modelu Nelsona-Siegela, a następnie Svenssona. W efekcie dla każdego dnia τ uzyskano trzy pary średnich kwadratowych błędów dopasowania funkcji do danych rzeczywistych.

W naturalny sposób statystyki miar MAE_τ oraz MSE_τ stanowią pierwsze mierniki oceny poszczególnych typów krzywej dochodowości przy zastosowaniu odpowiedniego kryterium dopasowania.

Analizując statystyki miar MAE oraz MSE dla krzywych wyznaczonych z danych pochodzących z rynku lokat międzybankowych (WIBOR), można stwierdzić, że najlepszą jakość dopasowania gwarantowały oba model (Svenssona i Nelsona-Siegela) z wykorzystaniem kryterium rentowności oraz Nelsona-Siegela z kryterium cen korygowanych odwrotnością duration. Nieznacznie gorsze wyniki dawał model Svenssona z wykorzystaniem kryterium cen korygowanych odwrotnością duration. Wyniki pokazują, że zarówno średnia, jak i odchylenie standardowe obu miar dla kryterium cen dla obydwu modeli parametrycznych są wyższe niż w przypadku pozostałych kryteriów dopasowania.

W przypadku FRA uzyskano podobne wyniki, z tym, że dla FRA6M wyraźnie widoczna jest różnica w wynikach w przypadku kryterium dopasowania $\min_{\beta^*} \Psi(P)_\tau$ dla obu modeli parametrycznych.

Dla danych z rynku swap, ze względu na typ danych - wyniki są nieco odmienne. W tym przypadku elastycznym okazały się modele Nelsona-Siegela z kryterium dopasowania opartym na minimalizacji sumy kwadratów różnic cen $\min_{\beta^*} \Psi(P)_\tau$. Dobrze ponownie wypadło kryterium oparte na minimalizacji sumy kwadratów różnic rentowności $\min_{\beta^*} \Psi(Y)_\tau$, niezależnie od typu modelu parametrycznego.

2.2 Analiza struktury terminowej zmienności implikowanych stóp forward

Konsekwencją budowy modeli parametrycznych, pozwalającej uzyskać wygładzoną, stabilną i elastyczną krzywą jest statyczność, która sprawia, że skonstruowana struktura jest obrazem bieżącej sytuacji rynkowej, odzwierciedlonej w momencie konstrukcji. Stąd też konieczność powtarzania procesu budowy krzywej wraz z napływem nowych informacji (mających istotny wpływ na poziom cen), przez co wektor estymowanych parametrów jest zmienny w czasie.

Ponieważ bank centralny nie jest zainteresowany budową krzywej dochodowości sensu stricte, a dokładność dopasowania nie jest cechą nadrzędną samego modelu, głównym motywem konstrukcji jest możliwość wyodrębniania oczekiwań rynkowych. Własności implikowanych stóp forward, które są powszechnie wykorzystywane w badaniu oczekiwań oraz ryzyka⁵³, mogą stać się alternatywnymi miarami oceny modelu krzywej dochodowości.

Na podstawie chwilowej struktury forward (wzór (24) dla modelu Nelsona-Siegel, (27) dla Svenssona możliwe jest wyznaczenie implikowanej stopy forward o zakładanej długości (tenorze) $\Delta s > 0$ (wzór(46) dla $t = s + \Delta s$):

$$f_{\tau}(s, s + \Delta s) = \frac{1}{\Delta s} \cdot \ln \frac{\delta(\tau, s)}{\delta(\tau, s + \Delta s)} \quad (33)$$

gdzie: $\delta(\tau, s)$ - czynnik dyskontowy,

$f_{\tau}(s, s + \Delta s)$ - implikowana stopa forward o tenorze Δs ,

s - moment realizacji transakcji forward,

τ - dowolny dzień, dla którego pozyskane są dane.

W celu zbadania dynamiki stóp definiuje się dzienną zmianę implikowanej stopy forward w kolejnych dniach (przy założeniu, że dane można pozyskać w czasie dyskretnym oznaczonych jako τ):

⁵³ Por. A. Meucci, *Risk and Asset Allocation*. Springer- Verlag, Berlin-Heidelberg 2005, s.154-156.

$$\Delta f_{\tau}(s, s + \Delta s) = \ln \frac{f_{\tau}(s, s + \Delta s)}{f_{\tau-1}(s, s + \Delta s)}. \quad (34)$$

Badanie potencjału informacyjnego implikowanych stóp forward może odbywać się poprzez analizę:

- kształtu struktury zmienności implikowanych stóp forward o wybranym tenorze
- cech powierzchni zbudowanej na bazie macierzy korelacji implikowanych stóp forward o wybranym tenorze

Przedmiotem analizy są zazwyczaj te implikowane stopy forward, których znaczenie w polityce pieniężnej jest największe. Istotną rolę odgrywają tu dwa elementy: długość transakcji (okres od realizacji do zapadalności) zwana także tenorem oraz czas pozostający do realizacji transakcji.

Na potrzeby niniejszego badania wzięto pod uwagę siedmiodniową implikowaną stopę forward, co wynika z faktu, że od 2005 roku stopą referencyjną NBP jest rentowność 7-dniowego bonu pieniężnego emitowanego przez NBP:

$$f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}) = \frac{365}{7} \cdot \ln \frac{\delta(\tau, s)}{\delta(\tau, s + \frac{7}{365})}, \quad (35)$$

gdzie: $f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ - implikowana 7-dniowa stopa forward.

Choć parametry modelu pozwalają oszacować poziom implikowanej stopy w na dowolny moment s w przyszłości, na potrzeby analizy wyznaczono implikowane 7-dniowe stopy forward $f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ o ustalonym terminie realizacji $s = \frac{7}{365}, \frac{14}{365}, \dots, \frac{119}{365}$. W efekcie wyniki można zapisać za pomocą wektora \mathbf{f}_{τ} stóp $f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$, gdzie $s + \frac{7}{365}$ wyraża zapadalność tygodniowej stopy forward realizowanej w dniu s i wyznaczonej w dniu τ :

$$\mathbf{f}_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}) = [f_{\tau}(\frac{7}{365}, \frac{14}{365}); f_{\tau}(\frac{14}{365}, \frac{21}{365}); \dots; f_{\tau}(\frac{119}{365}, \frac{126}{365})]. \quad (36)$$

Wektor ten odzwierciedla oszacowane w momencie τ wartości tygodniowych implikowanych stóp forward, które miałyby obowiązywać za tydzień, dwa,

aż do siedemnastego tygodnia. Należy więc podkreślić, że są to stopy o tej samej długości (tenorze), ale których realizacja przebiega w różnych momentach w przyszłości.

Zbiór dziennych przyrostów implikowanej stopy forward można także zapisać w postaci wektora:

$$\Delta \mathbf{f}_\tau(s, s + \frac{7}{365}) = \left[\Delta f_\tau\left(\frac{7}{365}, \frac{14}{365}\right); \Delta f_\tau\left(\frac{14}{365}, \frac{21}{365}\right); \dots; \Delta f_\tau\left(\frac{119}{365}, \frac{126}{365}\right) \right]. \quad (37)$$

Na potrzeby analizy wykorzystano wyniki szacunku krzywych, które doprowadziły do wyznaczenia trzech ocen wektora parametrów β_τ^* (wzór (30a)-(30c)) w zależności od przyjętego kryterium dopasowania. Ponieważ badanie objęło oba modele parametryczne, otrzymano sześć wektorów ocen parametrów na każdy dzień badawczy dla każdego typu instrumentów, co pozwoliło na wyznaczenie sześciu wektorów dziennych przyrostów implikowanej stopy forward w zależności od przyjętego kryterium dopasowania.

Jedną z charakterystyk opisujących dynamikę stóp forward jest zmienność, która może być wyznaczana zarówno z instrumentów pochodnych na stopy procentowe (zmienność implikowana), jak również na podstawie obserwacji samych stóp forward (zmienność historyczna). W toku pracy wykorzystano zmienność historyczną, a za jej miarę przyjęto odchylenie standardowe mierzone w wartościach rocznych (odzwierciedlających liczbę dni transakcyjnych)⁵⁴, dane wzorem:

$$\sigma(s, s + \frac{7}{365}) = \sqrt{\frac{250}{503} \sum_{\tau=2}^{504} \left(\Delta f_\tau(s; s + \frac{7}{365}) - \overline{\Delta f_\tau}(s; s + \frac{7}{365}) \right)^2}, \quad (38)$$

gdzie: $\sigma(s; s + \frac{7}{365})$ - odchylenie standardowe,

$\Delta f_\tau(s; s + \frac{7}{365})$ - dzienna zmiana implikowanej stopy forward

$\overline{\Delta f_\tau}(s; s + \frac{7}{365})$ - średnia dzienna zmiana implikowanej stopy forward.

⁵⁴ Roczna zmienność jest iloczynem dziennego odchylenia standardowego oraz pierwiastka z przyjętej liczby dni (transakcyjnych) w roku. Stosuje się zarówno liczbę dni równą 250, jak też 260 oraz 365. W badaniu przyjęto liczbę 250. Za: F. J. Fabozzi, S. V. Mann, M. Choudhry, *Measuring and controlling interest rate and credit risk*. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2003, s. 185.

Strukturę terminową zmienności stóp procentowych, nazywaną także funkcją implikowanej zmienności, można zdefiniować jako relację pomiędzy zmiennością stóp $\sigma(s; s + \frac{7}{365})$, a ich zapadalnością w dniu $s + \frac{7}{365}$ i zapisać w postaci:

$$\left\{ \sigma\left(s, s + \frac{7}{365}\right) \right\}_{s=\frac{7}{365}, \frac{14}{365}, \dots, \frac{119}{365}} \quad (39)$$

Przebieg funkcji zmienności implikowanych stóp forward może przybierać dwa podstawowe kształty⁵⁵:

- w krótkim terminie (do 1 roku) funkcja jest rosnąca, a następnie po osiągnięciu maksimum - maleje wraz ze wzrostem s - kształt charakterystyczny dla rynków stabilnych, kiedy to banki centralne poprzez politykę informacyjną sygnalizują potencjalne zmiany stóp, przez co niepewność, a zarazem i zmienność jest niewielka;
- funkcja jest malejąca niezależnie od s , co jest charakterystyczne dla rynków niestabilnych, kiedy oczekiwania dotyczące najbliższej przyszłości są determinowane niepewnością, i nie ma konsensusu co do kolejnych decyzji dotyczących polityki pieniężnej. Można wówczas oczekiwać wysokiej zmienności dla krótkich zapadalności stóp forward⁵⁶.

Spadek zmienności w długim terminie wynika z procesu absorpcji informacji, który przykłada coraz większą wagę oczekiwaniom inflacyjnym. Im krótszy termin realizacji stopy forward, tym większe znaczenie napływu nowych informacji, determinujących zmianę poziomu stóp i wpływających na zmienność. Sama zmienność może być wyższa w przypadku krajów mających problemy z utrzymaniem inflacji pod kontrolą, dla których niepewność dotycząca poziomu tego wskaźnika w przyszłości jest znaczna.

W celu zbadania poziomu zmienności implikowanej 7-dniowej stopy forward na polskim rynku w latach 2009-2012, dla każdego z elementów wektora

⁵⁵ R. Rebonato, *Volatility and Correlations 2nd Edition*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2004, s. 672-673.

⁵⁶ R. Rebonato, *Modern pricing of interest-rate derivatives*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002, s. 153-172.

$\Delta f_{\tau}(s; s + \frac{7}{365})$ wyznaczone zostały współczynniki zmienności. Obliczenia powtarzano dla każdego typu modelu oraz kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych.

Na wykresach (Rys. 3-6) przyjęto następujące oznaczenia poziomu zmienności $\sigma(s; s + \frac{7}{365})$ implikowanych stóp forward $f_{\tau}(s; s + \frac{7}{365})$, które zostały wyznaczone na podstawie modelu:

NS_P – Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P)$,

NS_P/D – Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P/D)$,

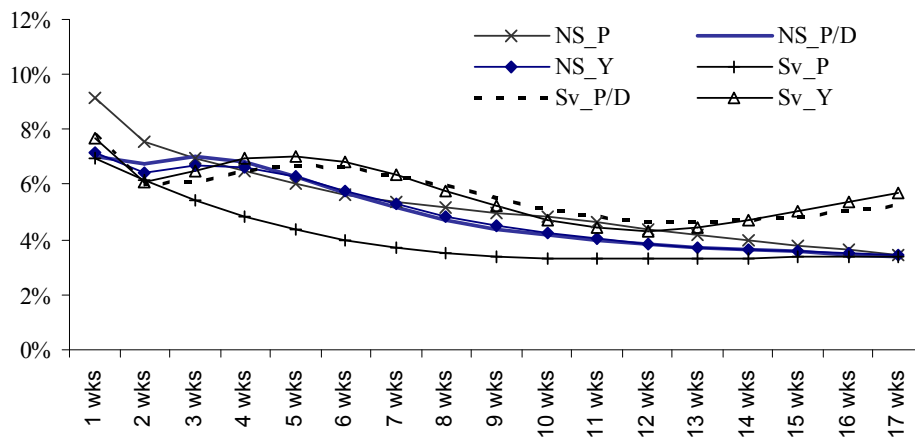
NS_Y – Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(Y)$,

Sv_P - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P)$,

Sv_P/D - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P/D)$,

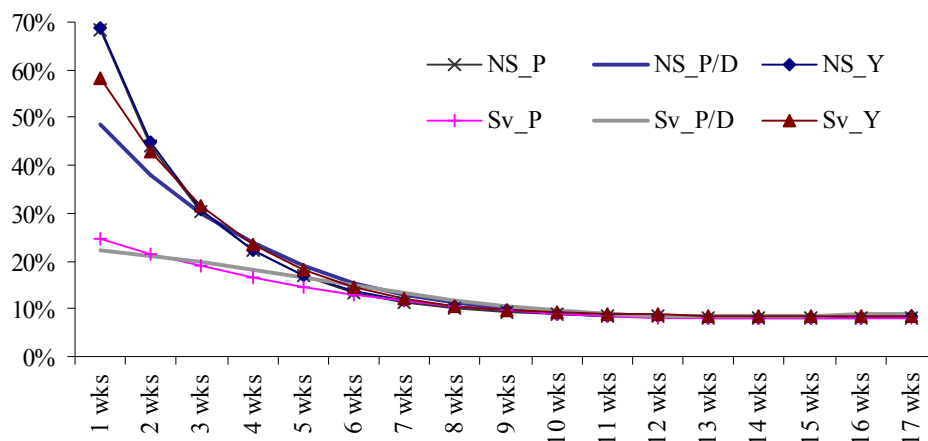
Sv_Y - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(Y)$.

n wks - termin realizacji stopy $f_{\tau}\left(\frac{7 \cdot n}{365}, \frac{7 \cdot (n+1)}{365}\right)$, gdzie $n = 1, \dots, 17$.

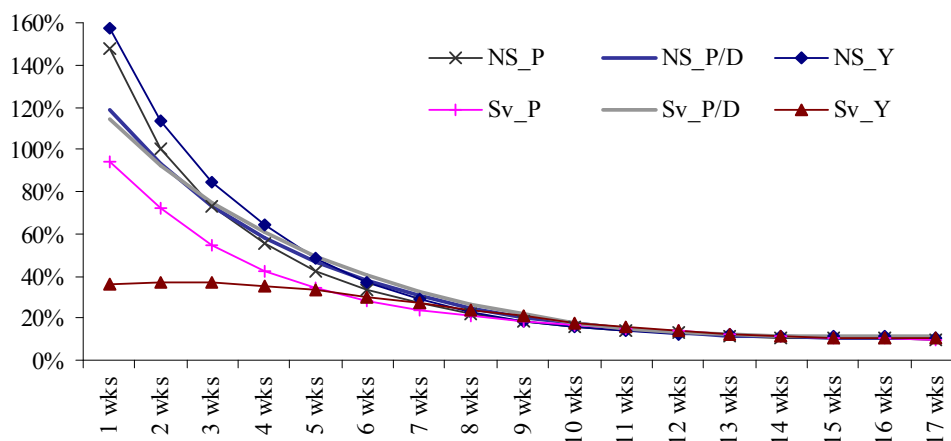


Rys. 3 Funkcja rocznej zmienności zmian implikowanej dla stóp WIBOR.

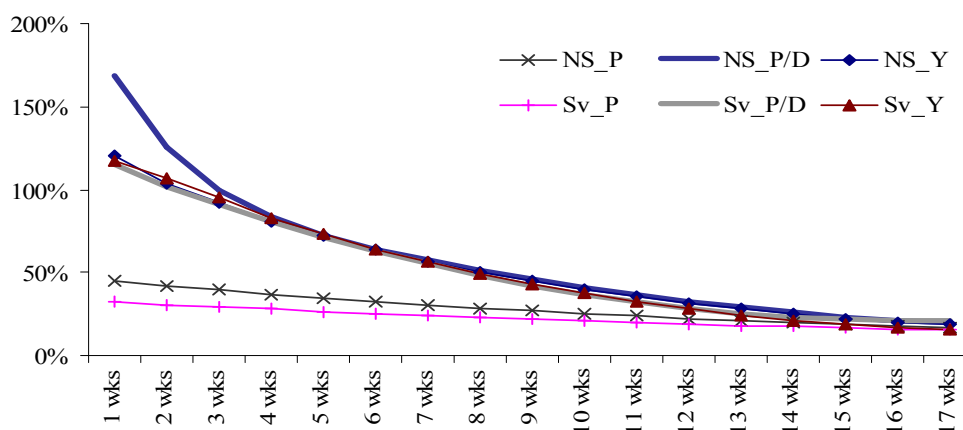
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4 Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp FRA 3M.
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5 Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp FRA 6M.
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6 Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp SWAP.
Źródło: opracowanie własne.

Wykresy przebiegu funkcji pokazują, najbardziej jednolite wyniki – z punktu widzenia poziomu implikowanej zmienności - otrzymane zostały przy zastosowaniu kwotowań WIBOR. Nieznaczne różnice pojawiły się dla kryterium minimalizacji kwadratów odchyień cen dla obu modeli parametrycznych. W pozostałych czterech przypadkach wykres tworzy charakterystyczne wzniesienie.

W celu weryfikacji krzywych dochodowości konstruowanych przy założeniu typu modelu parametrycznego oraz kryterium szacowania parametrów, możliwa jest konstrukcja subiektywnego miernika, pozwalającego na uszeregowanie modeli ze względu na kryterium implikowanej zmienności stóp forward. Ponieważ przedmiotem zainteresowania jest implikowana 7-dniowa stopa forward i jej dynamika na krótko przed zmianami polityki pieniężnej, konstrukcja wskaźnika oparta jest na średniej arytmetycznej z czterech zmienności implikowanych stóp forward według wzoru:

$$M(\sigma) = \frac{\sum_{n=1}^4 \sigma\left(\frac{7-n}{365}, \frac{7-(n+1)}{365}\right)}{4}, \quad (40)$$

gdzie: $M(\sigma)$ - wskaźnik krótkoterminowej zmienności implikowanych stóp forward

$\sigma\left(\frac{7-n}{365}; \frac{7-(n+1)}{365}\right)$ - odchylenie standardowe, wyznaczone dla $n = 1,2,3,4$.

Należy podkreślić, że każdorazowe tworzenie mierników niesie ze sobą problem niejednoznaczności, dotyczący najczęściej indywidualnych preferencji oraz jakości danych, determinujących poziom niedoskonałości, czyli ryzyka samego modelu. W tym przypadku subiektywnie przyjęty został termin realizacji $s = \left\{ \frac{7}{365}, \frac{14}{365}, \frac{21}{365}, \frac{28}{365} \right\}$ oraz liczba elementów $n = 4$ tworząca średnią.

Tabela 3
Poziom wskaźnika krótkoterminowej zmienności implikowanej 7-dniowej stopy forward

	NS_P	NS_Y	NS_P/D	Sv_P	Sv_Y	Sv_P/D
WIBOR	0,075	0,069	0,067	0,058	0,066	0,068
FRA 3M	0,412	0,351	0,417	0,204	0,204	0,391
FRA 6M	0,938	0,859	1,048	0,659	0,855	0,364
SWAP	0,410	1,194	0,994	0,301	0,972	1,004

Źródło: opracowanie własne

2.3 Powierzchnia korelacji implikowanych stóp forward

Weryfikacja krzywej dochodowości dokonywana ze względu na jej potencjał informacyjny, opierać się może także na wzajemnej relacji pomiędzy poszczególnymi implikowanymi stopami forward.

Macierz \mathbf{P} , której elementy stanowią współczynniki korelacji $\rho_{n,m}$ (gdzie $|n-m|$ wyraża mierzony w tygodniach dystans pomiędzy terminami rozliczenia transakcji), powinna charakteryzować się następującymi własnościami⁵⁷:

[1] $\rho_{m,m} = 1$, dla dowolnego m ,

[2] $-1 \leq \rho_{n,m} \leq 1$,

[3] $\rho_{m,n} = \rho_{n,m}$,

[4] dla ustalonego n , $\rho_{n,n+m}$ jest malejącą funkcją m , która to własność, określana jako efekt dekorelacji⁵⁸ oznacza, że wraz ze wzrostem zróżnicowania się terminów realizacji implikowanych stóp forward $|n-m|$, ich wzajemny związek ulega osłabieniu,

[5] dla ustalonego n , $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{n,n+m} = a > 0$ dąży do pewnej dodatniej wartości,

[6] dla ustalonego m , $\rho_{n,n+m}$ jest rosnącą funkcją n , co oznacza, że w przypadku krótkiego horyzontu realizacji kontraktów rynek silnie różnicuje oczekiwania, natomiast w odleglejszej przyszłości różnice te zanikają.

Na bazie współczynników korelacji (elementów macierzy \mathbf{P}) można zbudować wykres przedstawiający trójwymiarową powierzchnię. Na osiach X i Y odłożone są terminy realizacji kontraktów implikowanych 7-dniowych stóp forward, natomiast na osi Z wartości korelacji między nimi.

Do wyznaczenia macierzy korelacji $\mathbf{P} = \{\rho_{n,m}\}_{n=1,2,\dots,17; m=1,2,\dots,17}$ o siedemnastu wierszach i siedemnastu kolumnach wykorzystane zostały serie dziennych

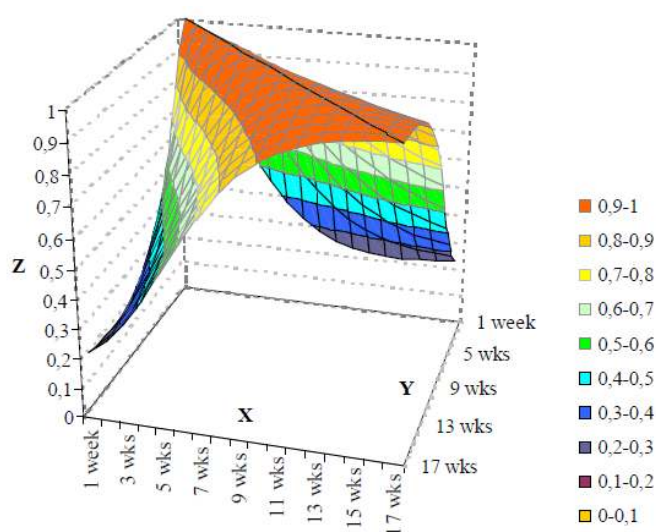
⁵⁷ Por. R. Rebonato, *Modern pricing of interest-rate derivatives*. Op. cit., s. 190-191.

⁵⁸ Własność ta została wykazana dla stop LIBOR. A. Brace, D. Gątarek, M. Musiela, *The market model of interest rate dynamics*. "Mathematical Finance" 1997 nr 7 s. 127-154.

przyrostów implikowanych stóp forward Δf_τ , za pomocą których obliczony został współczynnik korelacji $\rho_{n,m}$ dla terminów realizacji $n, m = 1, 2, \dots, 17$, dany wzorem:

$$\rho_{n,m} \equiv \rho_{n,m} \left(\Delta f_\tau \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right); \Delta f_\tau \left(\frac{7m}{365}, \frac{7(m+1)}{365} \right) \right), \quad (41)$$

przy czym $\Delta f_\tau \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right) = \ln \frac{f_\tau \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right)}{f_{\tau-1} \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right)}$ dla $n = 1, 2, \dots, 17$.



Rys. 7 Optymalna powierzchnia korelacji implikowanych stóp forward

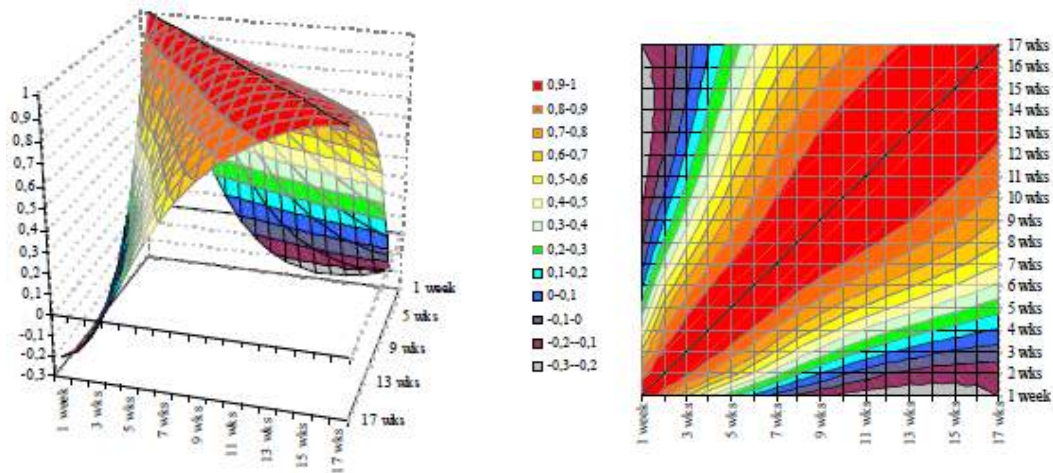
Źródło: opracowanie własne.

Powierzchnie korelacji utworzone zostały dla czterech zbiorów aktywów z uwzględnieniem obu modeli parametrycznych oraz trzech kryteriów dopasowania⁵⁹. Dotychczas prowadzone badania wskazują, że wybór kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych może mieć wpływ na kształt powierzchni korelacji⁶⁰.

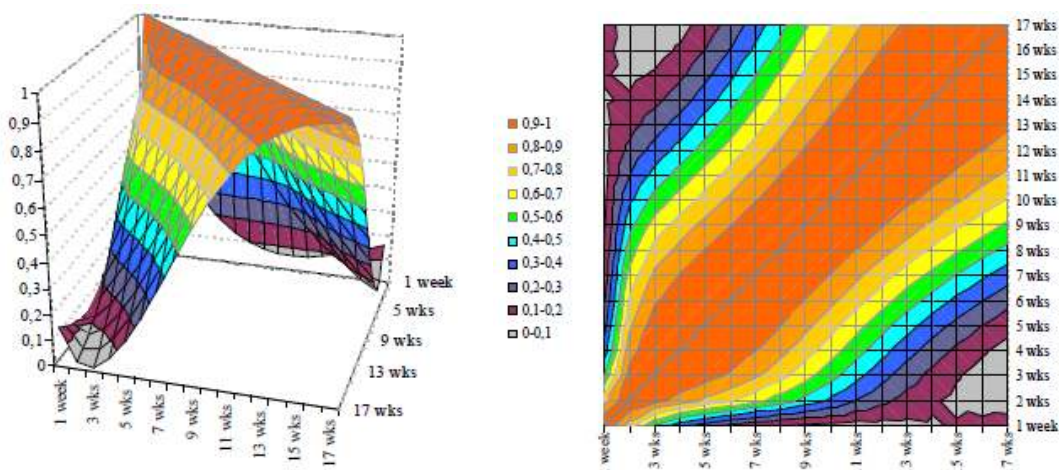
⁵⁹ Poszczególne kolory na wykresie powierzchniowym oraz odpowiadającym im wykresach konturowych reprezentują odpowiedni przedział wartości współczynnika korelacji reprezentowany w legendzie wykresu.

⁶⁰ Porównanie powierzchni korelacji wyznaczonych w oparciu o różne modele można znaleźć w: C. Alexander, *Market Risk Analysis*. Volume III, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2008, s. 56-57, a także C. Alexander, D. Lvov, *Statistical properties of forward Libor rates*, ISMA Discussion Papers in Finance 2003-03, January 2003 oraz E. Dziwok, *Krzywa dochodowości a polityka pieniężna. Modelowanie i kryteria doboru krzywej na polskim rynku*. Wydawnictwo UE w Katowicach, Katowice, 2012, s. 93-105

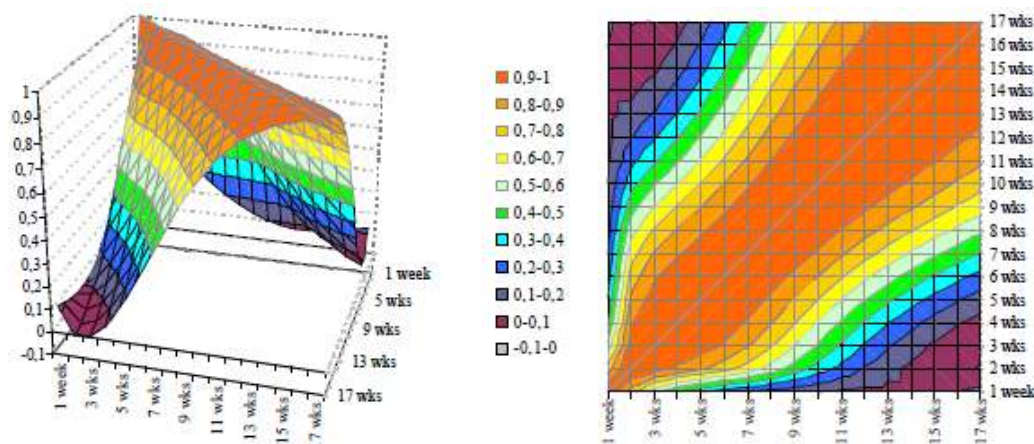
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.



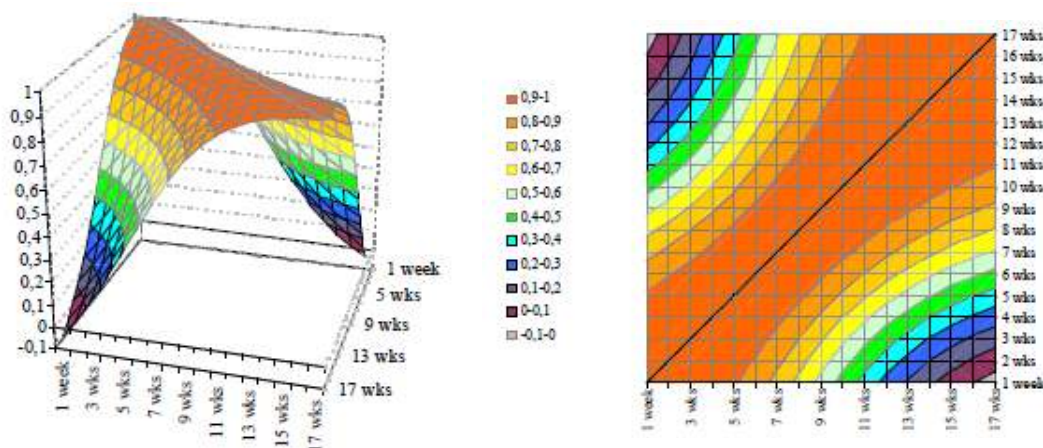
(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.



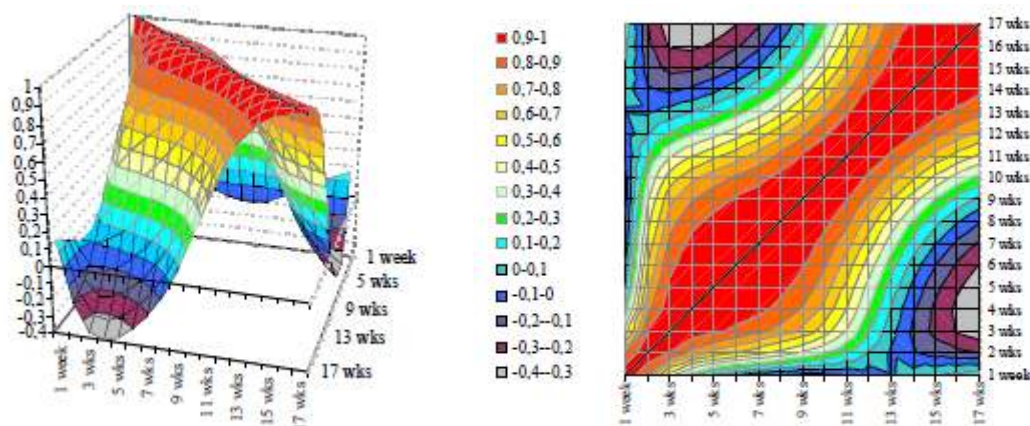
Rys. 8 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki WIBOR i model Nelsona-Siegeła.

Źródło: opracowanie własne.

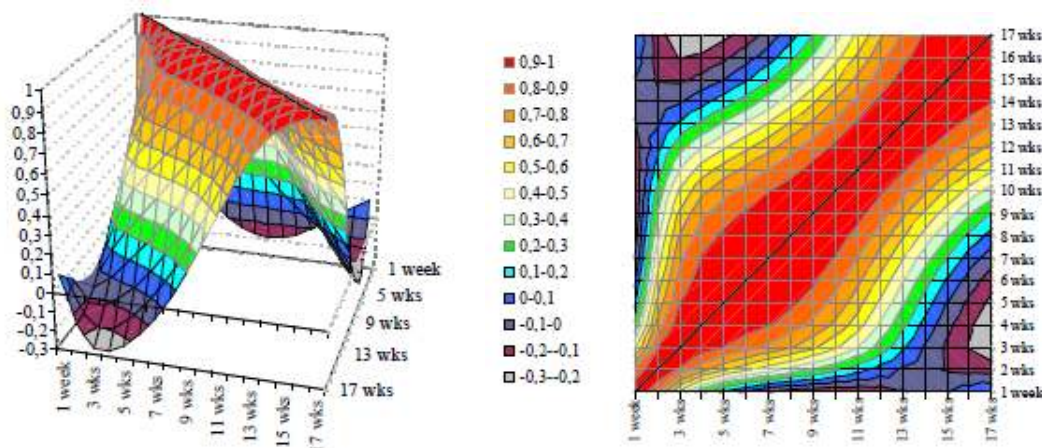
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.

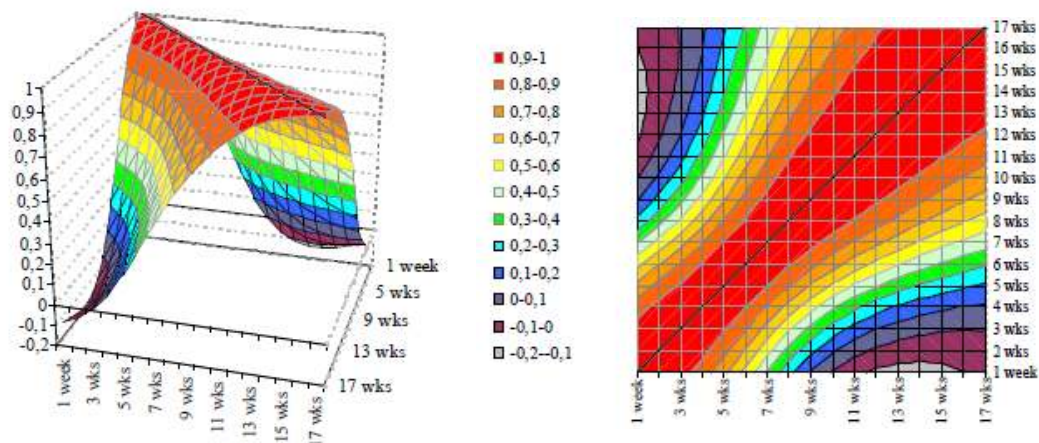


(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.

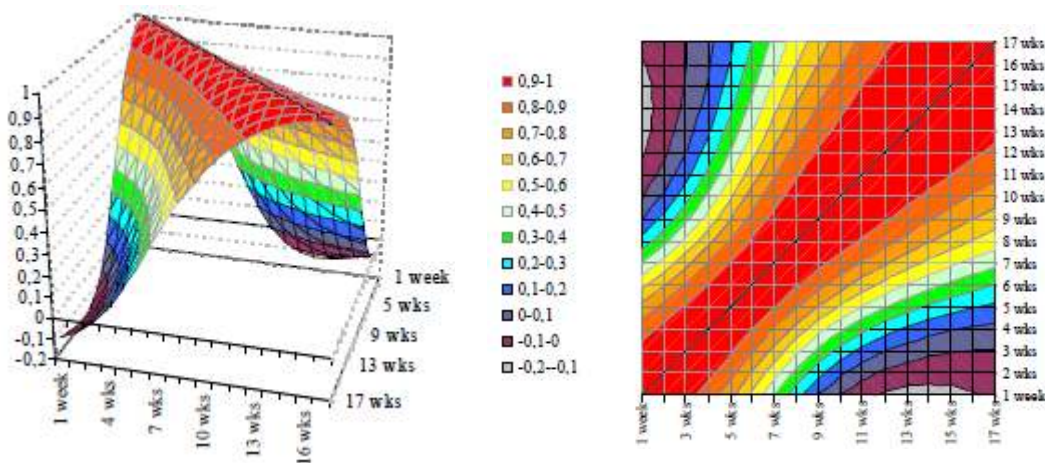


Rys. 9 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki WIBOR i model Svenssona.
Źródło: opracowanie własne.

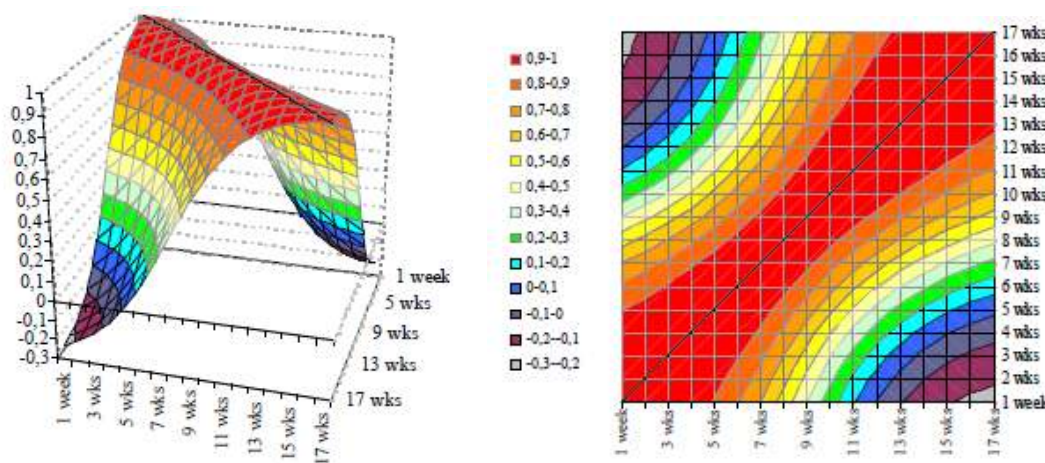
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.

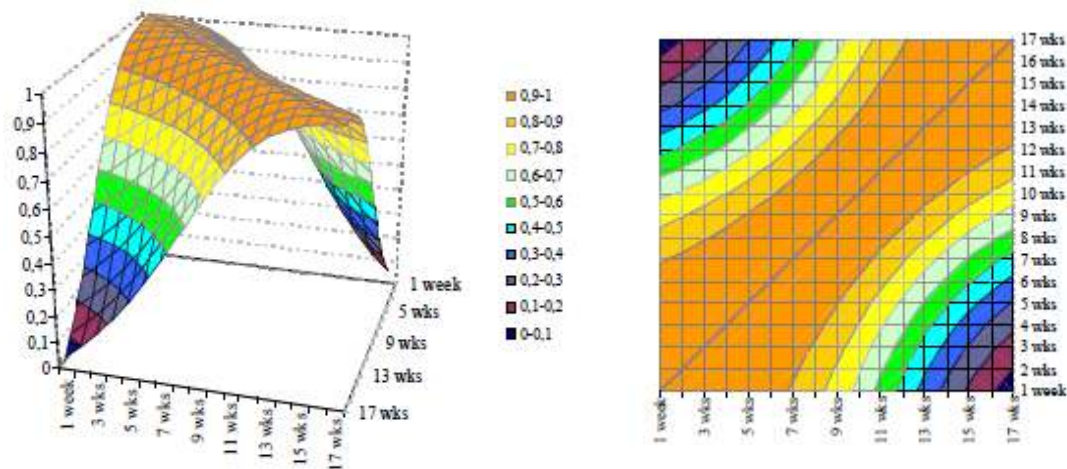


(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.

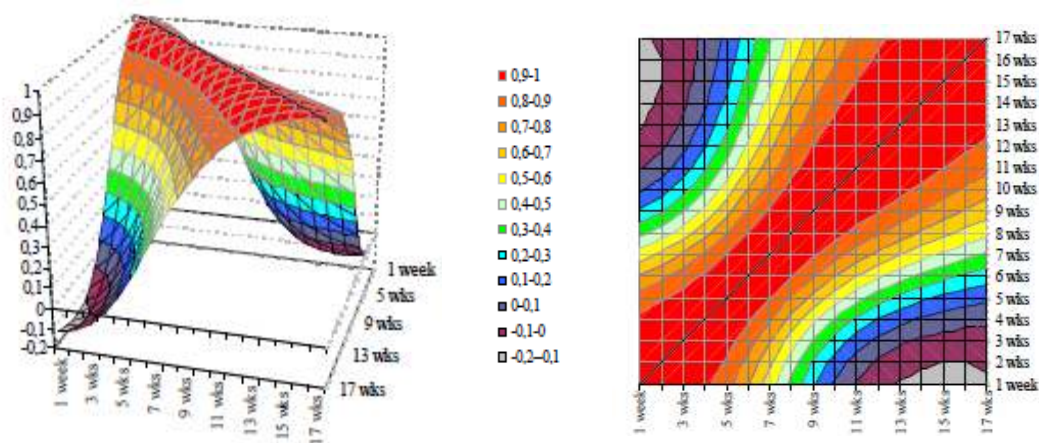


Rys. 10 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 3M i model Nelsona-Siegela.
Źródło: opracowanie własne.

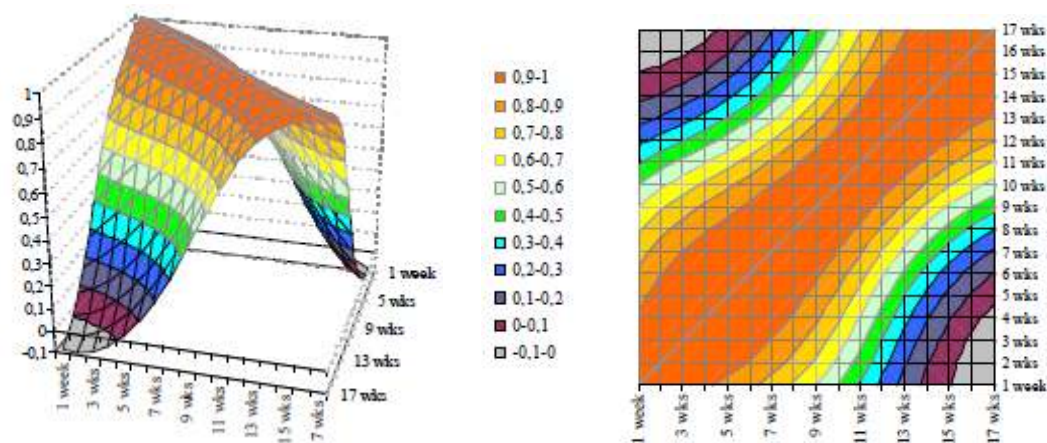
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.



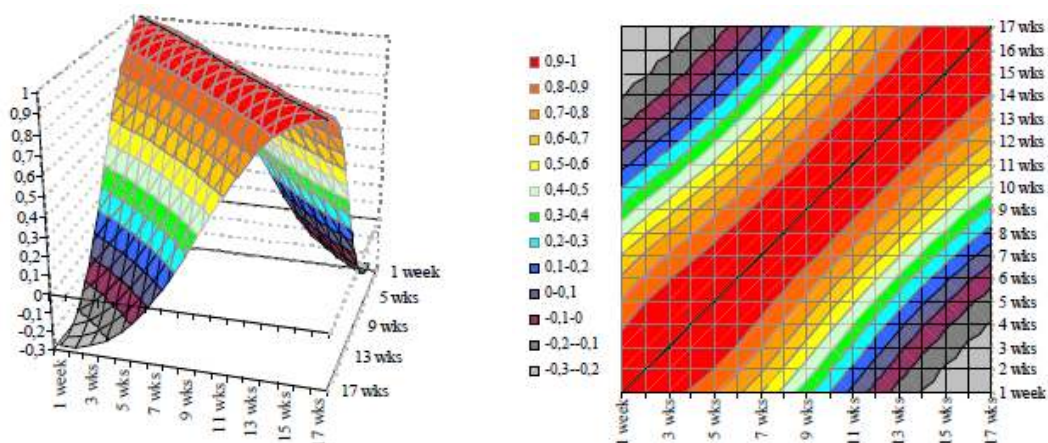
(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.



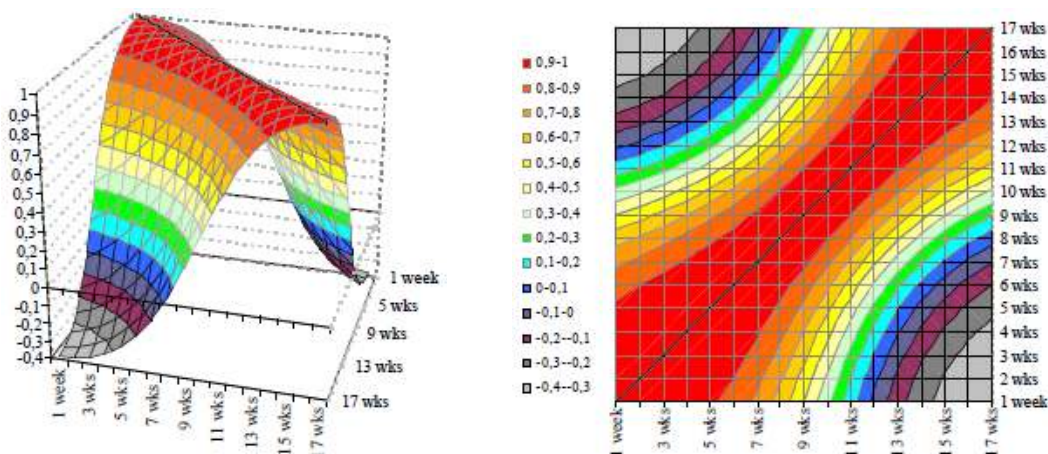
Rys. 11 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 3M i model Svenssona.

Źródło: opracowanie własne.

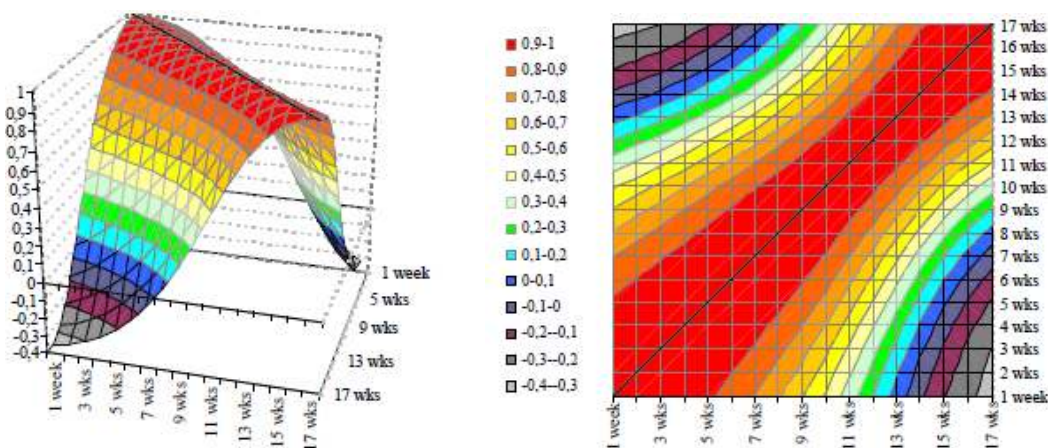
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.

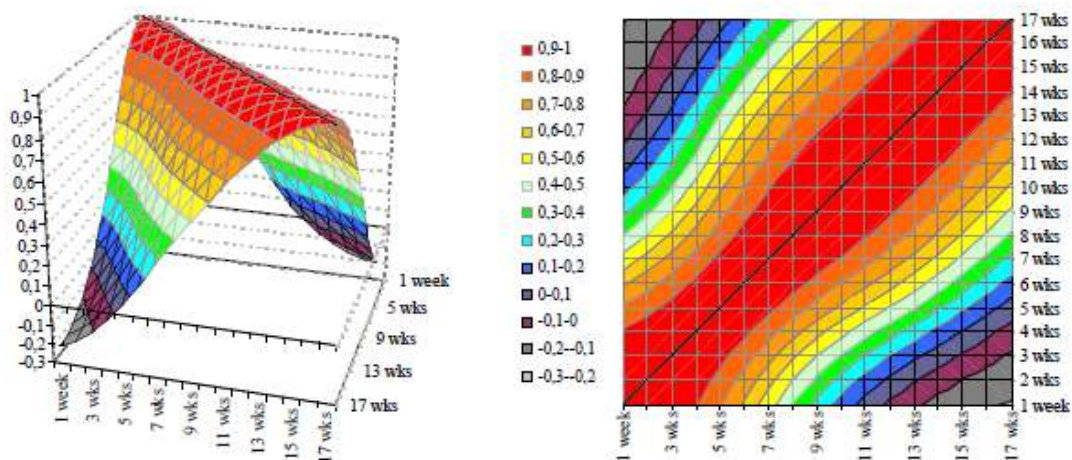


(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.

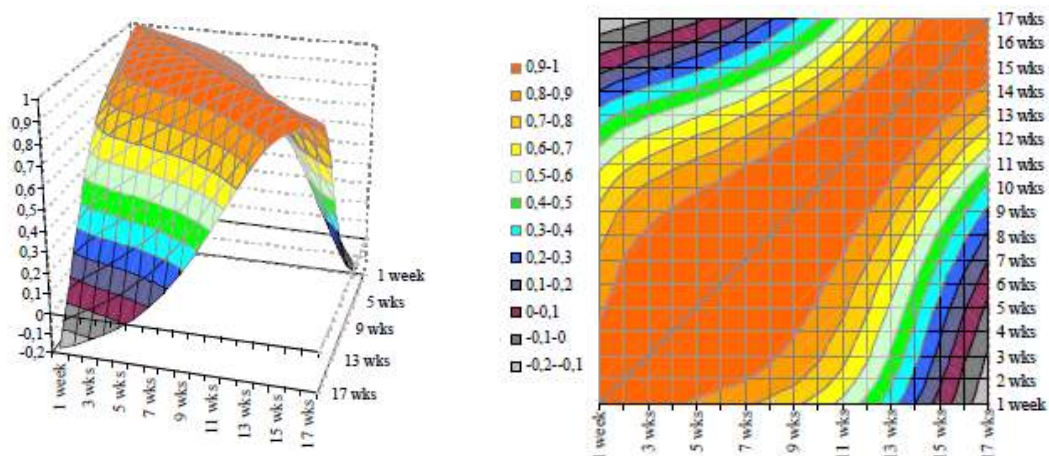


Rys. 12 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 6M i model Nelsona-Siegela.
Źródło: opracowanie własne.

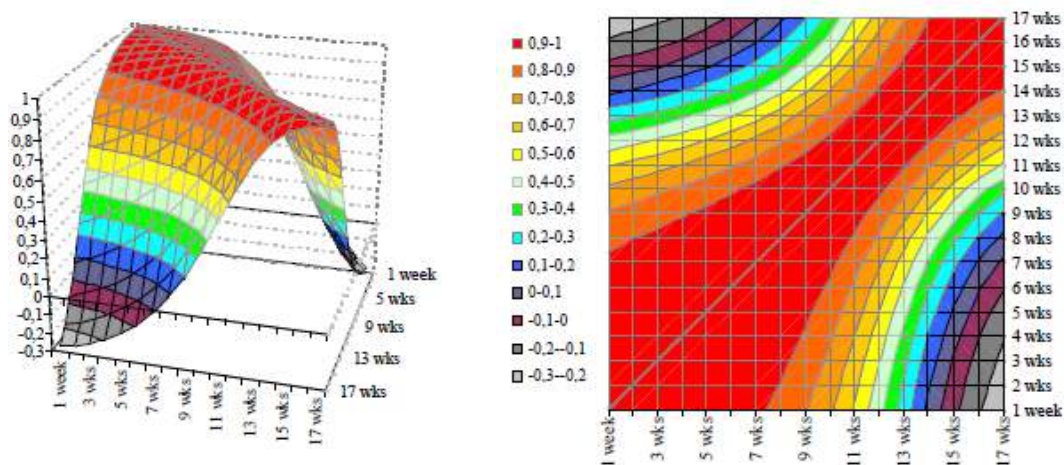
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.



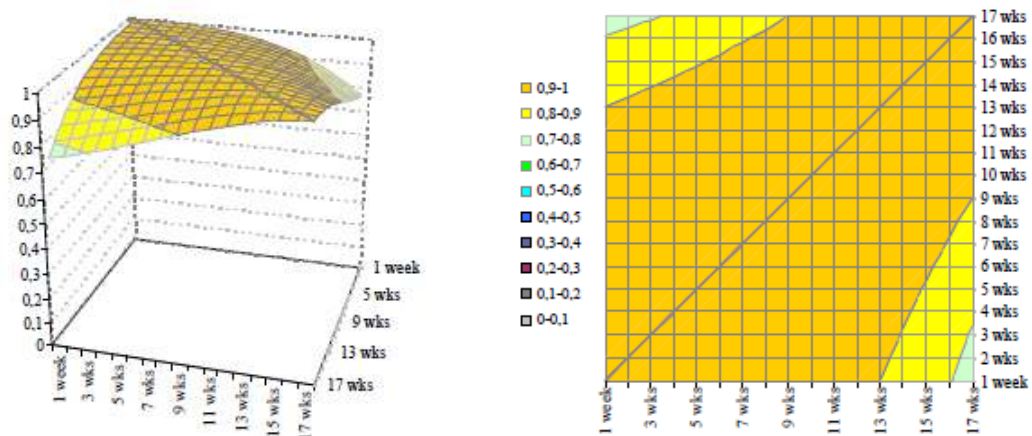
(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.



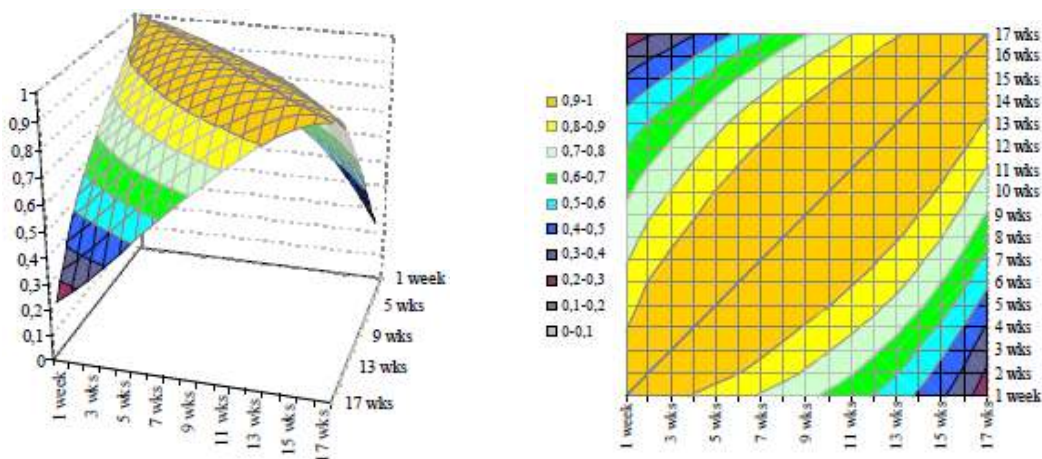
Rys. 13 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 6M i model Svenssona.

Źródło: opracowanie własne.

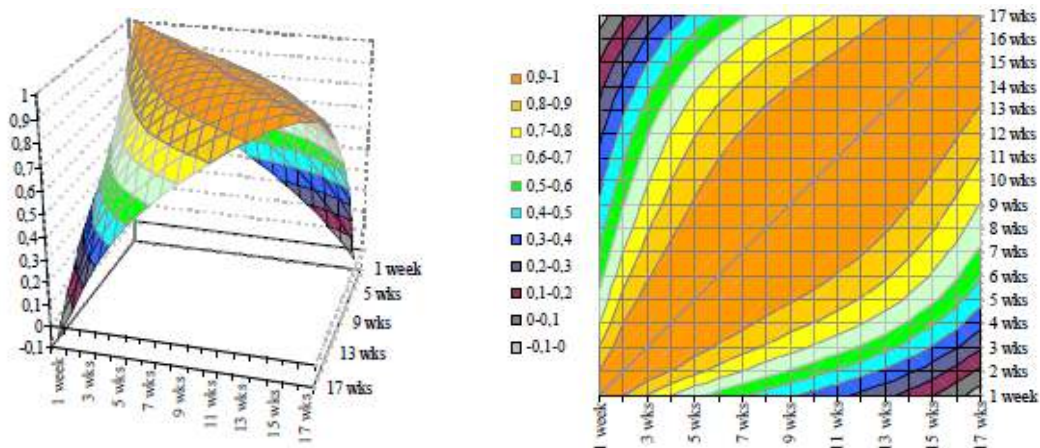
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.

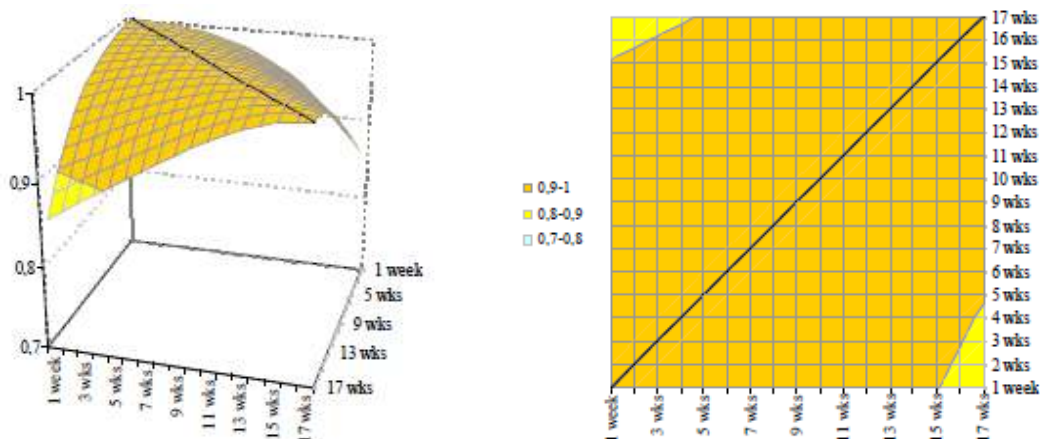


(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.

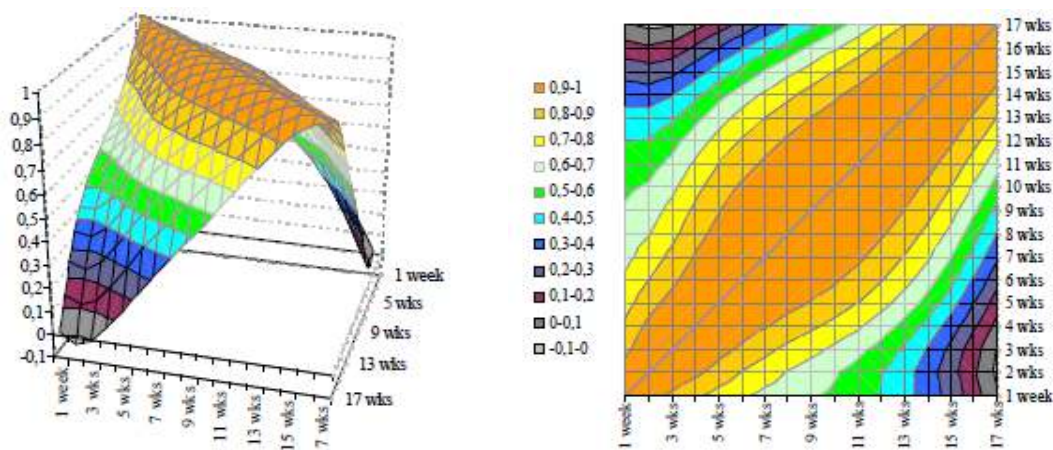


Rys. 14 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki SWAP i model Nelsona-Siegela.
Źródło: opracowanie własne.

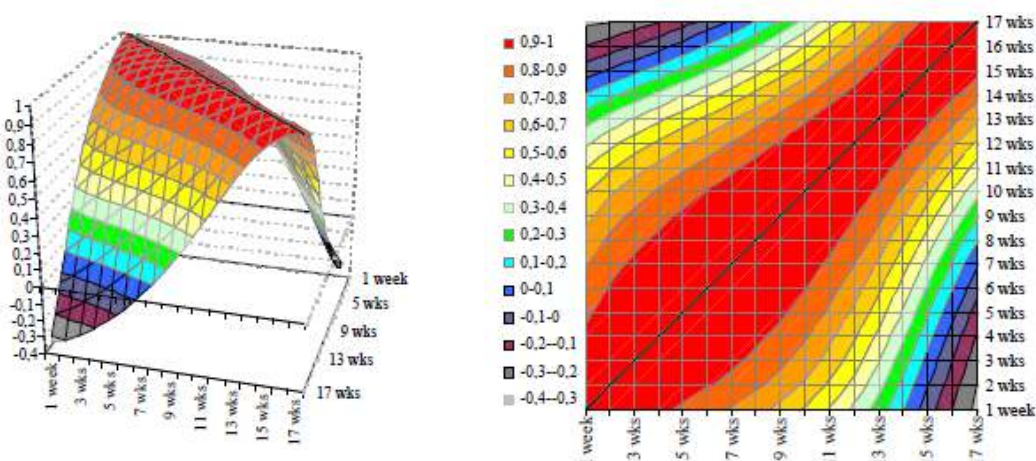
(a) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen.



(b) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic rentowności.



(c) Kryterium dopasowania krzywej - minimalizacja kwadratów różnic cen ważonych odwrotnością duration.



Rys. 15 Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki SWAP i model Svenssona.
 Źródło: opracowanie własne.

Porównanie modeli konstrukcji krzywej dochodowości sprowadza się do wskazania miernika pozwalającego na interpretację zachowań powierzchni korelacji w kontekście spełnienia własności [1]-[6]. Ponieważ sama budowa macierzy korelacji realizuje wykonanie warunków [1]-[3], konstrukcja miernika adekwatności powierzchni korelacji $M(\rho)$ w stosunku do powierzchni optymalnej, może zostać przedstawiona jako zagregowana wartość ważona uwzględniająca własności [4], [5] oraz [6] :

$$M(\rho) = \frac{M_{[4]}(\rho) + M_{[5]}(\rho) + M_{[6a]}(\rho) + M_{[6b]}(\rho)}{4}, \quad (42)$$

gdzie: $M(\rho)$ - wskaźnik adekwatności powierzchni korelacji

$M_{[4]}(\rho) = |\rho_{1,2}| - |\rho_{1,10}|$ kryterium mierzące stopień spadku wskaźnika korelacji, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta

$M_{[5]}(\rho) = \begin{cases} \rho_{1,100} & \text{jeśli } \rho_{1,17} > 0 \\ 0 & \text{jeśli } \rho_{1,17} \leq 0 \end{cases}$ kryterium mierzące granicę poziomu korelacji, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta

$M_{[6a]}(\rho) = |\rho_{1,1} - \rho_{1,3}|$ kryterium mierzące siłę zróżnicowania oczekiwań w krótkim terminie, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta,

$M_{[6b]}(\rho) = |\rho_{1,17} - \rho_{1,16}|$ kryterium mierzące stopień podobieństwa wskaźnika korelacji w dłuższym terminie, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako destymulanta,

Tabela 4
Poziom wskaźnika adekwatności powierzchni korelacji implikowanej 7-dniowej stopy forward

	NS_P	NS_Y	NS_P/D	Sv_P	Sv_Y	Sv_P/D
WIBOR	0,564	0,916	0,851	0,311	0,909	0,749
FRA 3M	0,485	0,488	0,433	0,296	0,469	0,333
FRA 6M	0,476	0,404	0,270	0,455	0,159	0,160
SWAP	0,175	0,176	0,345	0,210	0,179	0,121

Źródło: opracowanie własne

2.4 Premia za ryzyko

W ostatnich latach polska polityka pieniężna kładzie stały nacisk na poprawę komunikacji z rynkiem. Świadomość konsekwencji związanych z potencjalnymi zakłóceniami rynkowymi sprawia, że bank centralny nie jest zainteresowany zakaskiwaniem rynku swoimi decyzjami. Zakładając determinację banku centralnego w dążeniu do osiągnięcia ustalonego celu, wzrost obaw co do przyszłego poziomu stóp znajduje natychmiast odzwierciedlenie w poziomie oczekiwań (rynek „dyskontuje” przyszłe zmiany stóp). W efekcie decyzja banku centralnego zgodna z oczekiwaniami rynku nie powoduje zmian w przebiegu krzywej bądź skala tych zmian jest minimalna⁶¹.

Lata 2009-2012 to okres podwyżek oficjalnych stóp procentowych. Rada Polityki Pieniężnej dokonała pięciu zmian oficjalnych stóp procentowych, zwiększając poziom stopy referencyjnej z 3,5% do 4,75%, za każdym razem o 25 punktów bazowych.

Zbadanie jak w przeszłości rynek przewidywał poziom stopy referencyjnej (7-dniowego bonu pieniężnego) mogło się odbyć dopiero po faktycznej decyzji banku centralnego. Na podstawie wzoru (13) wyznaczona w momencie τ teoretyczna stopa forward, rozumiana jako wypadkowa obowiązujących w tym dniu stóp spot (wiedzy dostępnej na moment, jest wyznacznikiem stóp w przyszłości:

$$f_{\tau}(s, t) = E_{\tau}[i(s, t)] + \Phi_{\tau}(s, t)$$

Analizowany ex post (w momencie s) poziom premii za ryzyko⁶² wyraża różnicę pomiędzy implikowaną stopą forward a ustaloną oficjalną stopą referencyjną na podstawie wzoru:

$$\Phi_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}) = f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}) - i_{NBP}^*(s), \quad (43)$$

⁶¹ Szerzej: M. Goodfriend, *Using the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy*. Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly 1998, vol. 84/3.

⁶² Na premię wpływają zarówno oczekiwania dotyczące przyszłych zmian oficjalnych stóp procentowych banku centralnego, jak również premia za płynność, oczekiwania inflacyjne, a także możliwość wystąpienia nieprzewidzianych zdarzeń.

gdzie: $\Phi_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ – premia za ryzyko obowiązująca w chwili τ ,

$f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ - 7-dniowa stopa forward wyznaczona w momencie τ ,

$i_{NBP}^*(s) \equiv i_{NBP}(s, s + \frac{7}{360}) \cdot \frac{365}{360}$ - stopa referencyjna obowiązująca w momen-

cie s , oparta na bazie 365 dni⁶³

s - oznacza dni, w których ogłoszono komunikat po posiedzeniu Rady Polityki Pieniężnej.

Poziom premii za ryzyko pozwala zbadać, w jakim stopniu implikowana stopa forward odzwierciedlała poziom stopy referencyjnej w latach 2009-2012. Ponieważ oczekiwania były badane na krótko przed decyzją RPP, przyjęto, że premia za płynność powinna być niewielka, a wszelkie niedopasowania są efektem premii za ryzyko związanej z sytuacją na rynku bądź konstrukcją samego instrumentu. Analiza wielkości premii w zależności od czasu, instrumentu oraz modelu krzywej (wraz z przyjętym kryterium dopasowania) pozwoliła zasygnalizować pewne cechy charakterystyczne dla danego instrumentu.

Kluczowym elementem badania jest długość terminu $s - \tau$, wyrażającego czas pomiędzy wyznaczeniem stopy kontraktu forward a jego realizacją. W przypadku, gdy jest on krótki, znaczenie premii za płynność bądź oczekiwań inflacyjnych spada praktycznie do zera, a kwestie ryzyka mogą dotyczyć niepewności związanej z aktualną sytuacją rynkową.

Za moment konstrukcji implikowanej stopy forward przyjęto 7 i 14 dzień przed podjęciem decyzji dotyczącej nowego poziomu stopy referencyjnej:

$$s - \tau \in \left\{ \frac{14}{365}, \frac{7}{365} \right\}, \text{ stąd: } \tau \in \left\{ s - \frac{14}{365}, s - \frac{7}{365} \right\}.$$

Implikowana stopa forward wyznaczona na 14 i 7 dni przed spotkaniem Rady Polityki Pieniężnej (RPP) była następnie porównywana z ustalonym (odpowiednio po 14 i 7 dniach) poziomem stopy referencyjnej.

⁶³ Ponieważ stopa referencyjna jest oparta na bazie (liczbie dni w roku) równej 360, natomiast instrumenty rynkowe funkcjonują na bazie 365 dni, dokonano przeskalowania na jedną wspólną bazę równą 365 dniom

Ponieważ implikowana 7-dniowa stopa forward była wyznaczana w sześciu wariantach (dla obu modeli parametrycznych oszacowanych przy trzech różnych kryteriach szacowania krzywej), do dalszej analizy przyjęto następujące oznaczenia, gdy stopa ta $f_{\tau}(s)$ została wyznaczona na podstawie modelu:

NS_P - Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P)$,

NS_P/D - Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P/D)$,

NS_Y - Nelsona-Siegela przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(Y)$,

Sv_P - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P)$,

Sv_P/D - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(P/D)$,

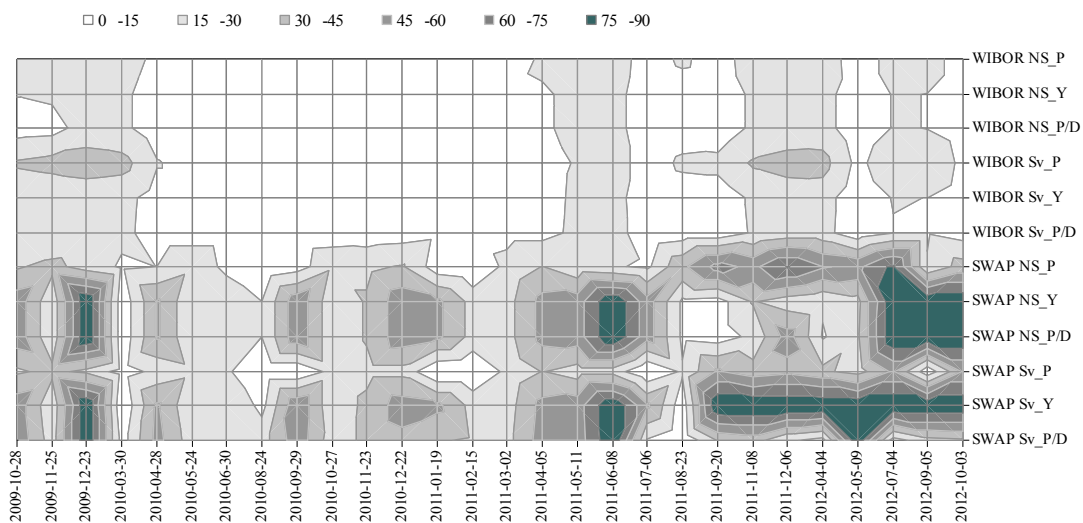
Sv_Y - Svenssona przy zastosowaniu kryterium $\min_{\beta^*} \Psi(Y)$.

Poziom premii $\Phi_{\tau}(s)$ przeanalizowano pod kątem zaburzeń na rynkach finansowych, kiedy to wzrastająca niepewność i spadek wzajemnego zaufania inwestorów powinny znaleźć odzwierciedlenie we wzroście jej wartości. Bank centralny może wykorzystać tę wiedzę do modyfikacji swej dotychczasowej polityki pieniężnej realizowanej - tak jak to ma miejsce w Polsce - w postaci bezpośredniego celu inflacyjnego.

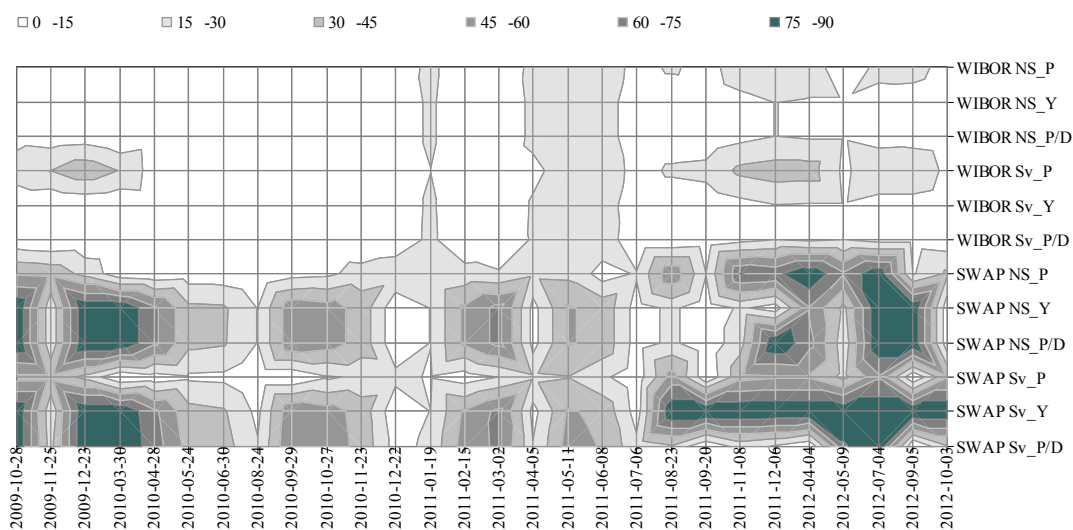
Analiza empiryczna została przeprowadzona na 14-dni oraz 7-dni przed ogłoszeniem przez RPP komunikatu dotyczącego stóp procentowych w latach 2009-2012⁶⁴. Dla każdego z czterech instrumentów wyznaczono sześć poziomów premii w zależności od modelu i przyjętego kryterium oszacowania wyznaczona które zostały przedstawione została za pomocą wykresu konturowego na rysunkach 16-19⁶⁵.

⁶⁴ W okresie X.2009-X.2012, dla którego uzyskano dane, RPP spotykała się 28 krotnie, z czego 5 razy podjęła decyzję o zmianie stopy referencyjnej.

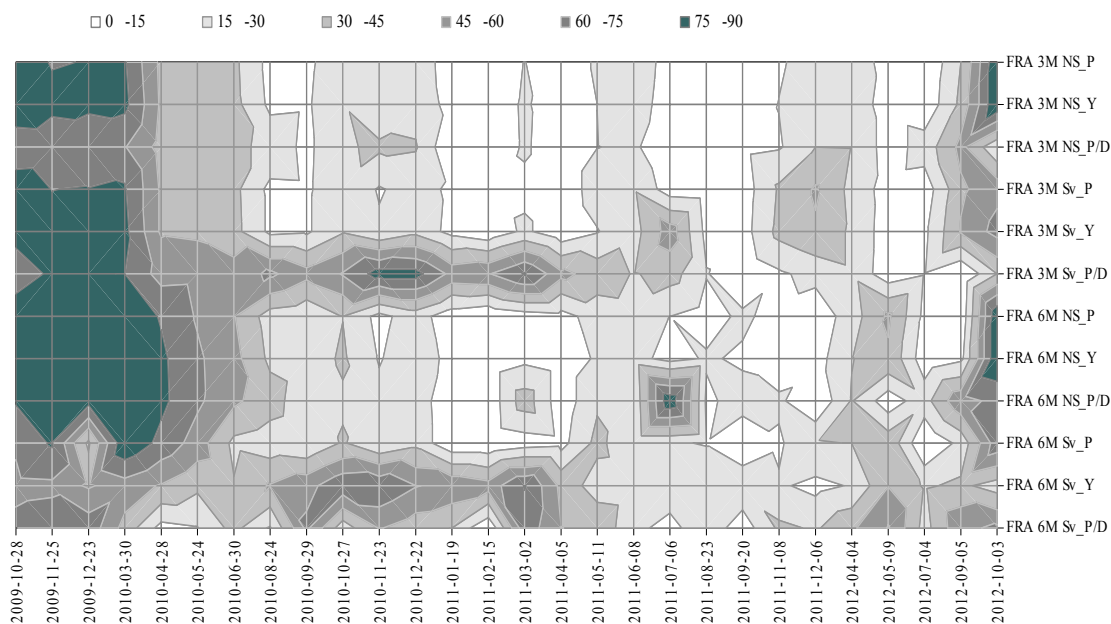
⁶⁵ Na wykresie konturowym kolory reprezentują określone zakresy wartości (tu: wartość premii w punktach bazowych) i, analogicznie do poziomicy, łączą interpolowane punkty o tej samej wartości. W punktach węzłowych siatki można odczytać (po kolorze) przedział, w jakim znajduje się premia.



Rys. 16 Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań WIBOR i SWAP na 14 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2021).
 Źródło: opracowanie własne.

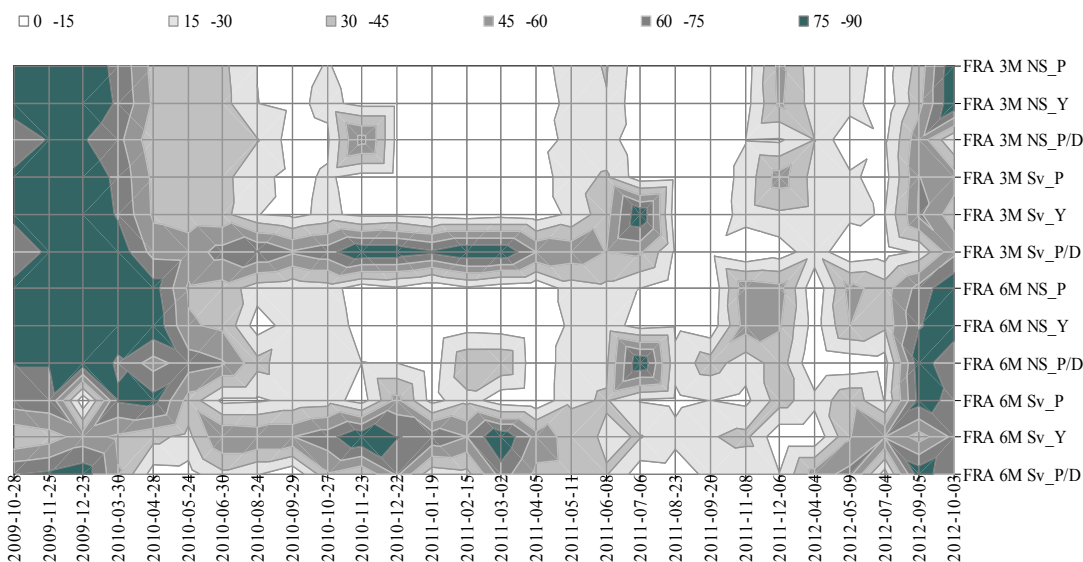


Rys. 17 Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań WIBOR i SWAP na 7 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2012).
 Źródło: opracowanie własne.



Rys. 18 Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań FRA 3M FRA 6M na 14 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2012).

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 19 Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań FRA 3M FRA 6M na 7 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2012).

Źródło: opracowanie własne.

Konstrukcja wskaźnika mierzącego poziom premii za ryzyko oparty został na średniej zgodnie ze wzorem:

$$M(r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}), \quad (44)$$

gdzie: $M(r)$ - wskaźnik poziomu premii za ryzyko

τ - dni, w których wyznaczana była implikowana stopa forward (na 7-dni przed komunikatem RPP)

Tabela 5

Poziom wskaźnika premii za ryzyko w latach 2009-2012

	NS_P	NS_Y	NS_P/D	Sv_P	Sv_Y	Sv_P/D
WIBOR	0,106	0,075	0,079	0,166	0,072	0,071
FRA 3M	0,305	0,312	0,271	0,290	0,333	0,531
FRA 6M	0,371	0,370	0,427	0,314	0,468	0,371
SWAP	0,297	0,442	0,584	0,221	1,236	0,432

Źródło: opracowanie własne

Im notowano wyższy poziom premii, tym słabiej przewidywane były decyzje Rady Polityki Pieniężnej. Dodatkowo można stwierdzić, że niezależnie od metody szacowania krzywej, dobrym prognozykiem przyszłych zmian niepewności na rynku są kwotowania z rynku depozytów międzybankowych.

Streszczenie

W rozdziale trzecim zebrano dotychczasowe wyniki i zbadano możliwość konstrukcji zagregowanego wskaźnika, będącego wypadkową pożądanых cech krzywej dochodowości. Zastosowano dwie metody, normalizacji min-max oraz metodę rangowania w celu porównania wskaźników i stworzenia wskaźnika całościowego. W efekcie otrzymano możliwość pozycjonowania krzywych dochodowości według zakładanych kryteriów.

3 Syntetyczna ocena krzywej dochodowości

Zastosowanie różnych kryteriów oceny krzywej dochodowości zmusza do poszukiwań oceny zbiorczej będącej wypadkową pożądanых cech krzywej dochodowości.

Narzędzi dostarcza analiza wielokryterialna podejmowania decyzji, która dzięki swej metodologii pozwala stworzyć zagregowaną ocenę na podstawie zróżnicowanych kryteriów oceny. Zaletą tak przyjętej procedury jest sprowadzenie zagadnienia wielowymiarowego do jednowymiarowego, natomiast wadą jest subiektywizm w szacowaniu wag poszczególnych kryteriów.

Stworzenie zbiorczej oceny modelu krzywej dochodowości tworzonej na potrzeby polskiej polityki pieniężnej wymagało przyjęcia subiektywnych kryteriów oceny. W toku prowadzonego badania przyjęto dwie klasyczne miary jakości dopasowania oraz trzy utworzone na bazie cech implikowanej 7-dniowej stopy forward. Taki sposób oceny daje bardziej wszechstronny obraz potencjału krzywej dochodowości w zależności od przyjętego modelu parametrycznego oraz funkcji celu. Podkreślenia wymaga fakt, że trzy skonstruowane mierniki są obciążone subiektywizmem autora i zostały uzależnione od przyjętych założeń badawczych. Konieczność analizy innych cech krzywej dochodowości wymagać będzie przekonstruowania wskaźników w celu osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

Za wynikową wartość oceny przyjęta została średnia arytmetyczna mierników cech pożądanых przez modelową krzywą dochodowości.

W celu porównania kryteriów z szeregu metod wykorzystywanych w analizie wielokryterialnej wybrano dwie, obejmujące metodę normalizacji min-max oraz metodę rangowania⁶⁶.

⁶⁶ A. Stabryła A. (red), Przegląd problemów doskonalenia systemów zarządzania przedsiębiorstwem, Wydawnictwo Mifles, Kraków 2011. s. 18-23 oraz M. Szreder, Metody i techniki sondażowych badań opinii, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2004.

3.1 Metoda normalizacji min-max

Najprostszą metodą wyznaczenie oceny syntetycznej jest obliczenie średniej ze wskaźników, zarówno w formie średniej arytmetycznej, jak i ważonej przy wagach odpowiadających najczęściej subiektywnej ocenie analityka.

Przebieg tworzenia zagregowanego wskaźnika oceny krzywej dochodowości odbywa się według schematu:

- ustalenie zagregowanej formuły wskaźnika według wybranych kryteriów,
- zestawienie wskaźników cząstkowych opisujących kryteria,
- normalizacja wskaźników,
- obliczanie wskaźnika agregatowej oceny,
- uszeregowanie modeli według skali malejącej

Konstrukcja zagregowanej oceny jakości krzywej dochodowości oparta została na pięciu kryteriach, które pozwoliły na zbudowanie wskaźników cząstkowych opartych na statystykach średniego przeciętnego odchylenia MAE i średniego błędu kwadratowego MSE , krótkoterminowej zmienności implikowanej stopy forward $M(\sigma)$, adekwatności powierzchni korelacji implikowanych stóp forward $M(\rho)$ oraz poziomu premii za ryzyko $M(r)$.

Aby otrzymane wskaźniki sprowadzić do wzajemnej porównywalności konieczne jest ich normalizacja według wzoru⁶⁷.

$$X_i = \frac{x_i - \min\{x_i\}}{\max\{x_i\} - \min\{x_i\}} \quad (45)$$

gdzie: X_i - znormalizowana i -ta wartość wskaźnika o postaci stymulanty,

x_i - wartość wskaźnika o postaci stymulanty,

$\min\{x_i\}$ - minimalna obserwowana wartość wskaźnika

$\max\{x_i\}$ - maksymalna obserwowana wartość wskaźnika

⁶⁷ D. Wędzki: *Analiza wskaźnikowa sprawozdania finansowego: Tom 2. Wskaźniki finansowe*. Wolters Kluwer Polska sp. z o.o., Warszawa, Kraków 2009, s. 469.

Normalizacja wskaźnika o charakterze denominanty odbywa się według wzoru:

$$X_i = \frac{\max\{x_i\} - x_i}{\max\{x_i\} - \min\{x_i\}} \quad (46)$$

Dzięki unormowaniu, wskaźniki nie tylko stały się porównywalne, ale również zawarte w przedziale [0;1]. Im poziom wskaźnika bliższy jest jedynki, tym w większym stopniu model posiada cechę określoną danym wskaźnikiem⁶⁸.

W ostatnim etapie dokonano oceny wynikowej poprzez wyliczenie średniej arytmetycznej pięciu wskaźników budowanych na bazie wzmiankowanych kryteriów.

Tabela 6

Znormalizowana ocena modeli krzywej dochodowości

	MSE	MAE	M(σ)	M(ρ)	M(r)	ŚREDNIA
WIBOR NS P	0,89	0,55	0,99	0,56	0,97	0,79
WIBOR NS Y	0,99	0,92	0,99	0,92	1,00	0,96
WIBOR NS P/D	1,00	0,93	0,99	0,85	0,99	0,95
WIBOR Sv P	0,58	0,16	1,00	0,31	0,92	0,59
WIBOR Sv Y	1,00	0,94	0,99	0,91	1,00	0,97
WIBOR Sv P/D	0,97	0,86	0,99	0,75	1,00	0,92
FRA 3M NS P	0,99	0,93	0,69	0,49	0,80	0,78
FRA 3M NS Y	1,00	0,96	0,74	0,49	0,79	0,80
FRA 3M NS P/D	0,99	0,92	0,68	0,43	0,83	0,77
FRA 3M Sv P	0,99	0,93	0,87	0,30	0,81	0,78
FRA 3M Sv Y	1,00	0,94	0,87	0,47	0,78	0,81
FRA 3M Sv P/D	0,96	0,82	0,71	0,33	0,61	0,69
FRA 6M NS P	0,00	0,50	0,23	0,48	0,74	0,39
FRA 6M NS Y	0,98	0,82	0,30	0,40	0,74	0,65
FRA 6M NS P/D	0,97	0,83	0,13	0,27	0,69	0,58
FRA 6M Sv P	0,18	0,23	0,47	0,46	0,79	0,43
FRA 6M Sv Y	1,00	0,93	0,30	0,16	0,66	0,61
FRA 6M Sv P/D	0,99	0,89	0,73	0,16	0,74	0,70
SWAP NS P	1,00	0,98	0,69	0,17	0,81	0,73
SWAP NS Y	1,00	0,95	0,00	0,18	0,68	0,56
SWAP NS P/D	0,98	0,82	0,18	0,34	0,56	0,57
SWAP Sv P	0,97	0,84	0,79	0,21	0,87	0,73
SWAP Sv Y	1,00	0,95	0,20	0,18	0,00	0,47
SWAP Sv P/D	0,97	0,83	0,17	0,12	0,69	0,55

Źródło: opracowanie własne

⁶⁸ M. Walesiak, E. Gatnar (red.), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009, s. 66

3.2 Metoda rangowania

Metoda rangowania znajduje zastosowanie do oceny modeli na skali wartości liczb naturalnych, od projektu najlepszego do najgorszego (lub odwrotnie). Jej zastosowanie do oceny modeli konstrukcji krzywej pozwala - poprzez swą konstrukcję na bazie liczb naturalnych - na większe zdywersyfikowanie ocen.

Proces oceny za pomocą metody rangowania przebiega w następujących etapach:

- ustalenie kryteriów opisujących cechy krzywej dochodowości,
- zestawienie wskaźników cząstkowych opisujących kryteria,
- nadanie rang (im niższa ranga tym wyższa pozycja modelu),
- obliczanie rang wynikowych poprzez sumowanie lub uśrednianie,
- uszeregowanie modeli według skali rosnącej

Proces tworzenia rankingu w pierwszych dwóch etapach był zgodny z metodą normalizacji. Już na etapie tworzeniu wskaźnika adekwatności powierzchni korelacji implikowanych stóp forward nadawane były rangi tak, by wynikowy poziom $M(\rho)$ miał postać średniej rangi. Sam proces nadawania rang polegał na przypisaniu kolejnych liczb naturalnych (od 1 do 24), przy czym w przypadku wystąpienia tych samych wartości ranga była uśredniana. Ponieważ opisywane cechy miały charakter zarówno stymulant jak i destymulant, zjawisko to uwzględnione zostało w procesie nadawania rang.

Wartości rang poszczególnych kryteriów poddane zostały analizie korelacji wyznaczonej na podstawie współczynnika korelacji rang Spearmana.

Tabela 7

Macierz korelacji rang Spearmana

	MSE	MAE	M(s)	M(ρ)	M(r)
MSE	1,00	0,60	0,16	0,46	0,09
MAE	0,60	1,00	0,44	0,76	0,39
M(s)	0,16	0,44	1,00	0,58	0,83
M(ρ)	0,46	0,76	0,58	1,00	0,61
M(r)	0,09	0,39	0,83	0,61	1,00

Źródło: opracowanie własne

Sumaryczna ocena została określona jako średnia ranga z pięciu przedstawionych wskaźników.

Tabela 8

Ocena modeli krzywej dochodowości metodą rangowania

	MSE	MAE	M(σ)	M(ρ)	M(r)	ŚREDNIA
WIBOR NS P	21,0	12,8	6	15,1	5,0	11,98
WIBOR NS Y	12,2	13,8	5	5,6	3,5	8,01
WIBOR NS P/D	7,5	8,3	3	5,9	3,5	5,63
WIBOR Sv P	22,0	13,3	1	16,9	6,0	11,83
WIBOR Sv Y	6,5	5,5	2	8,1	1,5	4,73
WIBOR Sv P/D	16,0	13,5	4	8,8	1,5	8,75
FRA 3M NS P	7,0	17,0	14	7,5	12,0	11,50
FRA 3M NS Y	4,0	8,8	10	7,0	12,0	8,35
FRA 3M NS P/D	14,0	12,8	15	8,3	8,0	11,60
FRA 3M Sv P	7,0	18,0	8	15,3	9,0	11,45
FRA 3M Sv Y	3,0	6,8	7	6,3	14,0	7,40
FRA 3M Sv P/D	18,5	14,3	12	11,0	22,0	15,55
FRA 6M NS P	24,0	11,5	19	8,9	16,0	15,88
FRA 6M NS Y	16,0	14,5	18	12,4	16,0	15,38
FRA 6M NS P/D	16,5	10,0	23	14,5	18,5	16,50
FRA 6M Sv P	23,0	12,5	16	11,9	12,0	15,08
FRA 6M Sv Y	7,5	12,5	17	17,3	21,0	15,05
FRA 6M Sv P/D	14,2	10,0	11	18,1	16,0	13,86
SWAP NS P	3,0	12,0	13	15,8	10,0	10,75
SWAP NS Y	5,5	9,8	24	19,0	20,0	15,65
SWAP NS P/D	16,0	17,3	21	16,6	23,0	18,78
SWAP Sv P	16,0	20,5	9	15,6	7,0	13,63
SWAP Sv Y	8,7	9,3	20	17,0	24,0	15,78
SWAP Sv P/D	17,5	15,8	22	17,4	18,5	18,23

Źródło: opracowanie własne

3.3 Weryfikacja modeli krzywej dochodowości

Zastosowanie dwóch metod oceny agregatowej do oceny modeli konstrukcji krzywej dochodowości pozwoliło na pozycjonowanie projektów. Dystans dzielący minimum i maksimum każdej skali został podzielony na trzy równe przedziały, w których umieszczono zagregowaną ocenę poszczególnych modeli. Uzyskano w ten sposób podział na modele dobre, przeciętne i słabe.

Tabela 9

Pozycjonowanie modeli krzywej dochodowości

METODA RANGOWANIA		METODA UNITARYZACJI	
WIBOR Sv Y	4,73	WIBOR Sv Y	0,97
WIBOR NS P/D	5,63	WIBOR NS Y	0,96
FRA 3M Sv Y	7,40	WIBOR NS P/D	0,95
WIBOR NS Y	8,01	WIBOR Sv P/D	0,92
FRA 3M NS Y	8,35	FRA 3M Sv Y	0,81
WIBOR Sv P/D	8,75	FRA 3M NS Y	0,80
SWAP NS P	10,75	WIBOR NS P	0,79
FRA 3M Sv P	11,45	FRA 3M Sv P	0,78
FRA 3M NS P	11,50	FRA 3M NS P	0,78
FRA 3M NS P/D	11,60	FRA 3M NS P/D	0,77
WIBOR Sv P	11,83	SWAP Sv P	0,73
WIBOR NS P	11,98	SWAP NS P	0,73
SWAP Sv P	13,63	FRA 6M Sv P/D	0,70
FRA 6M Sv P/D	13,86	FRA 3M Sv P/D	0,69
FRA 6M Sv Y	15,05	FRA 6M NS Y	0,65
FRA 6M Sv P	15,08	FRA 6M Sv Y	0,61
FRA 6M NS Y	15,38	WIBOR Sv P	0,59
FRA 3M Sv P/D	15,55	FRA 6M NS P/D	0,58
SWAP NS Y	15,65	SWAP NS P/D	0,57
SWAP Sv Y	15,78	SWAP NS Y	0,56
FRA 6M NS P	15,88	SWAP Sv P/D	0,55
FRA 6M NS P/D	16,50	SWAP Sv Y	0,47
SWAP Sv P/D	18,23	FRA 6M Sv P	0,43
SWAP NS_P/D	18,78	FRA 6M NS_P	0,39

Źródło: opracowanie własne

W obu przypadkach za dobre uznane zostały modele krzywej dochodowości konstruowane na bazie stóp WIBOR dla obu modeli parametrycznych z zastosowaniem funkcji celu opartej na minimalizacji kwadratów rentowności oraz cen ważonych odwrotnością duration. Dodatkowo dobre modele można było uzyskać korzystając ze stóp FRA 3M dla obu modeli z zastosowaniem funkcji celu opartej na minimalizacji kwadratów rentowności. Najlepszym modelem – według obu metod

– okazał się model Svenssona budowanego dla stóp WIBOR z funkcją celu opartą na minimalizacji kwadratów rentowności.

Przyjęcie powyższych metod zastosowanych do weryfikacji krzywych dochodowości na polskim rynku międzybankowym w latach 2009-2012 pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

- Ze względu na fakt, że różnice przy pozycjonowaniu były niewielkie, wskazanie jednego typu modelu parametrycznego, jak i kryterium dopasowania na tym etapie, nie jest możliwe. Bardziej szczegółowa analiza przeprowadzona jedynie dla instrumentów WIBOR i FRA 3M pozwoliłaby na większe zróżnicowanie wyników.
- W latach 2009-2012 za dobre uznane zostały modele krzywej dochodowości konstruowane na bazie stóp WIBOR dla obu modeli parametrycznych z zastosowaniem funkcji celu opartej na minimalizacji kwadratów rentowności oraz cen ważonych odwrotnością duration oraz stóp FRA 3M dla obu modeli z zastosowaniem funkcji celu opartej na minimalizacji kwadratów rentowności. Kryterium minimalizacji sumy kwadratów różnic cen teoretycznych i rzeczywistych nie powinno być stosowane.
- Satysfakcjonującą alternatywę dla kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych, opartego na minimalizacji sumy kwadratów różnic cen teoretycznych i rzeczywistych, stanowi kryterium skorygowane o odwrotność duration. Zastosowanie tego kryterium na rynku polskim pozwoliło zwiększyć jakość krzywej dla instrumentów o krótszym terminie zapadalności. Otrzymane wyniki były porównywalne do tych, jakie osiągnięto przy zastosowaniu kryterium minimalizacji sumy kwadratów różnic rentowności teoretycznych i rzeczywistych.
- Stworzenie zbiorczej oceny modelu krzywej dochodowości wymagało przyjęcia nowych kryteriów oceny, przez co obarczona jest ona błędem związanym z subiektywizmem autora. Konieczność analizy dodatkowych cech krzywej dochodowości wymagać będzie przekonstruowania wskaźników w celu osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

Literatura

- Alexander C., *Market Risk Analysis*. Volume III, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2008.
- Alexander C., D. Lvov, *Statistical properties of forward Libor rates*, ISMA Discussion Papers in Finance 2003-03, January 2003
- Anderson N, J. Sleah, *New estimates of the UK real and nominal yield curves*. Bank of England Quarterly Bulletin, November 1999, s. 384-392.
- Anderson N., F. Breedon, M. Deacon, A. Derry, M. Murphy, *Estimating and interpreting the yield curve*. John Wiley & Sons, West Sussex 1996.
- Andersson M., H. Diolen, P. Sellin, *Monetary Policy Signaling and Movements In the Swedish Term Structure of Interest Rates*. Sveriges Riksbank Working Paper Series 2001, No 132.
- Angeloni I., A. Kashyap, B. Mojon (ed.), *Monetary Policy Transmission in the Euro Area*. Cambridge University Press, 2003.
- Audley D., Chin R., Ramamurthy S., *Term structure modeling*. w F.J. Fabozzi (ed): *Interest Rate, Term Structure and Valuation Modeling*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken 2002, s. 93-135.
- Bachert P., *Wycena procentowych kontraktów swap przy użyciu krzywej zerokuponowej*. „Bank i Kredyt” 1998, nr 4, s. 49-53.
- BIS, Monetary and Economic Department, *Zero-coupon yield curves: technical documentation*., BIS Paper No 25, October 2005.
- Bliss, R.R., *Testing term structure estimation methods*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 1996, nr 96-12a.
- Brace A., D. Gątarek, M. Musiela, *The market model of interest rate dynamics*. “Mathematical Finance” 1997 nr 7 s. 127-154.
- Brousseau V., *The functional form of yield curves*. ECB Working Paper 2002, No 148.
- Brzoza-Brzezina M., *Neutralność pieniądza a badanie mechanizmów transmisji monetarnej w Polsce*. „Bank i Kredyt” 2000 Nr 3, s.34-46.
- Cairns A. J. G., *Interest Rate Models: an introduction*. Princeton University Press, New Jersey 2004.
- Choudhry M., *An Introductory Guide to Analyzing and Interpreting the Yield Curve*. w F.J. Fabozzi (ed): *Interest Rate, Term Structure and Valuation Modeling*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken 2002, s. 73-91.
- Choudhry M., *Analyzing and Interpreting the Yield Curve*. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, Singapore 2004.

-
- Choudhry M., *The Market Yield Curve and Fitting the Term Structure of Interest Rates*. w: F. J. Fabozzi [ed.] *The handbook of fixed income securities*. McGraw-Hill, New York 2005, s. 939-965.
- Chrzan P., *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*. Oikonomos sp. z o.o., Katowice 2001.
- Cięciwa G., *Wyznaczanie krzywych dochodowości metodą zmodyfikowanego bootstrappingu*. „Bank i Kredyt” 2003, nr 2, s. 81-86.
- Dziwok E., *Krzywa dochodowości a polityka pieniężna. Modelowanie i kryteria doboru krzywej na polskim rynku*. Wydawnictwo UE w Katowicach, Katowice, 2012.
- ECB, *The predictability of the ECB’s monetary policy*, ECB Monthly Bulletin 2006, nr 1, s. 51-61.
- Fabozzi F. J., *Fixed Income Mathematics. Analytical and Statistical Techniques*. Fourth Edition, McGraw-Hill, New York, 2006.
- Fabozzi F. J., S. V. Mann, M. Choudhry, *Measuring and controlling interest rate and credit risk*. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2003.
- Fabozzi F. J., *Rynki obligacji. Analiza i strategie*, WIG-Press, Warszawa 2000.
- Filipović D., *Term-Structure Models: a graduate course*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- Fisher L., R. L. Weil, *Coping with the risk of interest-rate fluctuations: returns to bondholder from naive and optimal strategies*. “Journal of Business” 1971, 4, s. 408-431.
- Fisher M., D. Nychka, D. Zervos, *Fitting the Term Structure of Interest Rates with smoothing splines*. Finance and Economics Discussion Series 1995, Federal Reserve Board, nr 95-1.
- Fisher M., *Forces That Shape the Yield Curve: Part 1 and 2*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 2001-3.
- Focardi S. M., F. J. Fabozzi, *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004.
- Golinelli R., R. Rovelli, *Monetary policy transmission, interest rate rules and inflation targeting in three transition countries*. “Journal of Banking and Finance” 2005, nr 29, s. 183-201.
- Goodfriend M., *Using the Term Structure of Interest Rates for Monetary Policy*. Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly 1998, vol. 84/3.
- Gurazdowski E., *Wykorzystanie modelu zmiennej sztywności krzywej stóp terminowych do przybliżania krzywej rynku pieniężnego*. „Bank i Kredyt” 2003, nr 2, s. 87-91.
- Jackson M., M. Staunton, *Advanced Modeling in Finance using Excel and VBA*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2001.

- James J., N. Weber, *Interest Rate Modeling*. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey 2000.
- Joshi M.S., *The concept and practice of mathematical finance*. Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- Jurek W., *Konstrukcja i analiza portfela papierów wartościowych o zmiennym dochodzie*. Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2001.
- Kliber P., *Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce*. „Bank i Kredyt” 2009, 40 (1), s.107-122.
- Kokoszyczyński R. (red), *Mechanizm transmisji impulsów polityki pieniężnej: przegląd głównych teorii oraz specyfika transmisji w Polsce*. Materiały i Studia NBP, nr 91, Warszawa 1999.
- Konstantinou P.T., *The Expectations Hypothesis of the Term Structure*. “Emerging Markets Finance and Trade” 2005, vol.41, no.3, s.70-91.
- Lavoie M., M. Seccareccia (ed), *Central Banking in the Modern World*. Edward Elgar, Cheltenham, Northampton, 2004.
- Liberadzki K., J. Wójcik, *Wyznaczanie zerokuponowej krzywej dochodowości z wykorzystaniem hybrydowego algorytmu genetycznego*. „Bank i Kredyt” 2006, nr 2, s. 55-69.
- Lobley J. N., *J.P. Morgan Yield Curve Model*, mimeo, Bond Index Group, J.P. Morgan 1989.
- Łyziak T., *Monetary transmission mechanism in Poland. The strength and delays*. Materiały i Studia NBP, Paper no 26, NBP, Warszawa 2002.
- Marciniak M., *Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland*. “Bank i Kredyt” 2006, nr 10, s. 52-74.
- Martellini L., P. Priaulet, S. Priaulet, *Fixed-income securities: valuation, risk management, and portfolio strategies*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester 2003.
- McCulloch J.H., *Measuring the term structure of interest rates*. “Journal of Business” 1971, 44, s. 19-31.
- Mehra Y. P., *Some Key Empirical Determinants of Short-Term Nominal Interest Rates*. Federal Reserve Bank of Richmond, Economic Quarterly Volume 81/3 Summer 1995, s. 33-51.
- Meltzer A.H., *Monetary reform in an uncertain environment*. W: Money, credit and policy. Edward Elgar Publishing Ltd, 1995,
- Meucci A., *Risk and Asset Allocation*. Springer- Verlag, Berlin-Heidelberg 2005.
- Modigliani F., R. Sutch, *Innovation In Interest Rate Policy*. „American Economic Review” 1966, s.178-197.
- Musiela M., M. Rutkowski, *Martingale Methods In Financial Modelling*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

-
- Nawalkha S. K., G. M. Soto, N. A. Beliaeva, *Interest Rate Risk Modeling*. John Wiley & Sons, Inc. 2005.
- Nelson C. R., A. F. Siegel, *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. "Journal of Business" 1987, Vol. 60, No. 4, s. 473-489
- Opiela T. P., *Survey of the Channels of the Monetary Transmission Mechanism*, Materiały i Studia NBP 1996, Paper nr 13.
- Pliska S.L., *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
- Polański Z., T.P. Opiela: *Rynki finansowe a transmisja impulsów polityki pieniężnej banku centralnego*. „Bank i Kredyt” 1995 nr 6, s. 75-92.
- Rebonato R., *Modern pricing of interest-rate derivatives*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002
- Rebonato R., *Volatility and Correlations 2nd Edition*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2004.
- Roman S., *Introduction to the mathematics of finance: from risk management to options pricing*. Springer-Verlag, New York 2004.
- Schaefer S.M., *Measuring a tax-specific term structure of interest rates in the market for British government securities*. "The Economic Journal", 1981, 91, s. 415-438.
- Shea G.S., *Pitfalls In smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximation*. "Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1984, 19, s. 253-269.
- Shiller R.J., J.Y. Campbell, K.L. Schoenholtz, *Forward Rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates*. „Brookings Papers on Economic Activity” 1983, 1, s.173-217.
- Sławiński A., *Krzywa dochodowości*. „Bank i Kredyt” 1996, 11, s. 25-35.
- Sotomska-Krzysztofik P., *Jak Bank Szwecji wspiera stabilność finansową za pomocą polityki informacyjnej*. „Bank i Kredyt” 2005, nr 1, s. 15-24.
- Stamirowski M., *Empirical application of the „Nelson and Siegel” parsimonious zero-coupon yield curve model*. Materiały i Studia NBP, Paper no 16, Warsaw 1999.
- Stabryła A. (red), *Przegląd problemów doskonalenia systemów zarządzania przedsiębiorstwem*, Wydawnictwo Mifles, Kraków 2011.
- Stander Y. S., *Yield Curve Modeling*, Palgrave Macmillan, New York 2005.
- Stępnia I., J. Zieliński, *Estymacja i interpretacja zerokuponowej krzywej dochodowości*. Materiały i Studia NBP, nr 108, Warszawa 2000.
- Sundaresan S., *Fixed Income Markets and Their Derivatives*. South-Western Thomson Learning, Cincinnati 2002.

- Svensson, L.E.O., *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. NBER Working Paper Series 1994, No. 4871.
- Szreder M., *Metody i techniki sondażowych badań opinii*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2004.
- Świętoń M., *Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001*. Materiały i Studia NBP, nr 150, Warszawa 2002.
- Taylor J. B., *Monetary Policy Rules*. NBER Business Cycles Series, Volume 31, The University of Chicago Press, Chicago 1999.
- Vasicek O.A., H. G. Fong, *Term structure modeling using exponential splines*. "Journal of Finance" 1982, 37, s. 339-348.
- Waggoner D. F., *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 1997, no 97-10.
- Walesiak M., E. Gatnar (red.), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- Waluś W., *Nota o interpolacji czynników dyskontowych*, „Rynek Terminowy” 2001 nr 1(7).
- Wędzki D., *Analiza wskaźnikowa sprawozdania finansowego: Tom 2. Wskaźniki finansowe*. Wolters Kluwer Polska sp. z o.o. , Warszawa, Kraków 2009, s. 469.
- Wróbel E., M. Pawłowska, *Monetary transmission in Poland: some evidence on interest rate and credit channels*. Materiały i Studia NBP, Paper no 24, Warszawa 2002.
- Wu L., *Interest Rate Modeling. Theory and Practice*. CRC Press, London 2009.
- Ziarko-Siwiek U., *Ocena efektywności informacyjnej wybranych segmentów rynku finansowego w Polsce*. Materiały i Studia NBP nr 178, Warszawa 2004.

Indeksy i spisy

Spis rysunków

Rys. 1	Charakterystyczne typy krzywej dochodowości	16
Rys. 2	Procedura szacowania struktury terminowej dla modeli parametrycznych	31
Rys. 3	Funkcja rocznej zmienności zmian implikowanej dla stóp WIBOR.....	41
Rys. 4	Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp FRA 3M.....	42
Rys. 5	Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp FRA 6M.....	42
Rys. 6	Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp SWAP.....	42
Rys. 7	Optymalna powierzchnia korelacji implikowanych stóp forward.....	45
Rys. 8	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki WIBOR i model Nelsona-Siegela.....	46
Rys. 9	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki WIBOR i model Svenssona.....	47
Rys. 10	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 3M i model Nelsona-Siegela.....	48
Rys. 11	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 3M i model Svenssona.....	49
Rys. 12	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 6M i model Nelsona-Siegela.....	50
Rys. 13	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki FRA 6M i model Svenssona.....	51
Rys. 14	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki SWAP i model Nelsona-Siegela.....	52
Rys. 15	Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych w oparciu o stawki SWAP i model Svenssona.....	53
Rys. 16	Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań WIBOR i SWAP na 14 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2021). 58	
Rys. 17	Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań WIBOR i SWAP na 7 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2012). . 58	
Rys. 18	Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań FRA 3M FRA 6M na 14 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2012).	59
Rys. 19	Premia za ryzyko generowana przez implikowaną stopę forward wyznaczoną z kwotowań FRA 3M FRA 6M na 7 dni przed komunikatem NBP (lata 2009-2012). 59	

Spis tabel

Tabela 1 Statystyki MAE_r - miary przeciętnego odchylenia stóp teoretycznych konstruowanych na podstawie modeli parametrycznych od stóp rzeczywistych w latach 2009-2012.	35
Tabela 2 Statystyki MSE_r - miary średniego błędu kwadratowego stóp teoretycznych konstruowanych na podstawie modeli parametrycznych od stóp rzeczywistych w latach 2009-2012.	35
Tabela 3 Poziom wskaźnika krótkoterminowej zmienności implikowanej 7-dniowej stopy forward.....	43
Tabela 4 Poziom wskaźnika adekwatności powierzchni korelacji implikowanej 7-dniowej stopy forward.....	54
Tabela 5 Poziom wskaźnika premii za ryzyko w latach 2009-2012	60
Tabela 6 Znormalizowana ocena modeli krzywej dochodowości.....	64
Tabela 7 Macierz korelacji rang Spearmana	65
Tabela 8 Ocena modeli krzywej dochodowości metodą rangowania.....	66
Tabela 9 Pozycjonowanie modeli krzywej dochodowości.....	67

www.nbp.pl

