

Materiały i Studia nr 337 – Załączniki

Mechanizm transmisji polityki pieniężnej w Polsce

Stan wiedzy w 2019 roku

**Tomasz Chmielewski, Andrzej Kocięcki, Tomasz Łyziak, Jan Przystupa,
Ewa Stanisławska, Małgorzata Walerych, Ewa Wróbel**

Redakcja:

Tomasz Łyziak – Narodowy Bank Polski

Ewa Stanisławska – Narodowy Bank Polski

Uwaga:

Raport przedstawia stanowisko jego autorów i nie powinien być interpretowany jako stanowisko Narodowego Banku Polskiego. Autorzy wyrażają podziękowanie Panu Profesorowi Andrzejowi Sławińskiemu oraz anonimowemu Recenzentowi za uwagi zgłoszone do tekstu.

Wydął:

Narodowy Bank Polski

Departament Edukacji i Wydawnictw

ul. Świętokrzyska 11/21

00-919 Warszawa

www.nbp.pl

ISSN 2084-6258

© Copyright Narodowy Bank Polski 2020

Spis treści

Załącznik 1. Model SVAR ze zmiennymi rynku pracy	4
Załącznik 2. Transmisja polityki pieniężnej przez pryzmat klasycznych modeli SVAR	6
Załącznik 3. <i>Time varying structural vector autoregressions: some new perspective</i>	8
Załącznik 4. Mały Model Transmisji Monetarnej	41
Załącznik 5. Mały Model Polityki Pieniężnej	47
Załącznik 6. Wyniki badań transmisji stóp procentowych	58
Załącznik 7. Wpływ kursu walutowego na eksport i import towarów i usług na poziomie zdezagregowanym z uwzględnieniem globalnych łańcuchów produkcji	64
Załącznik 8. Oczekiwania inflacyjne – determinanty i zakotwiczenie	90

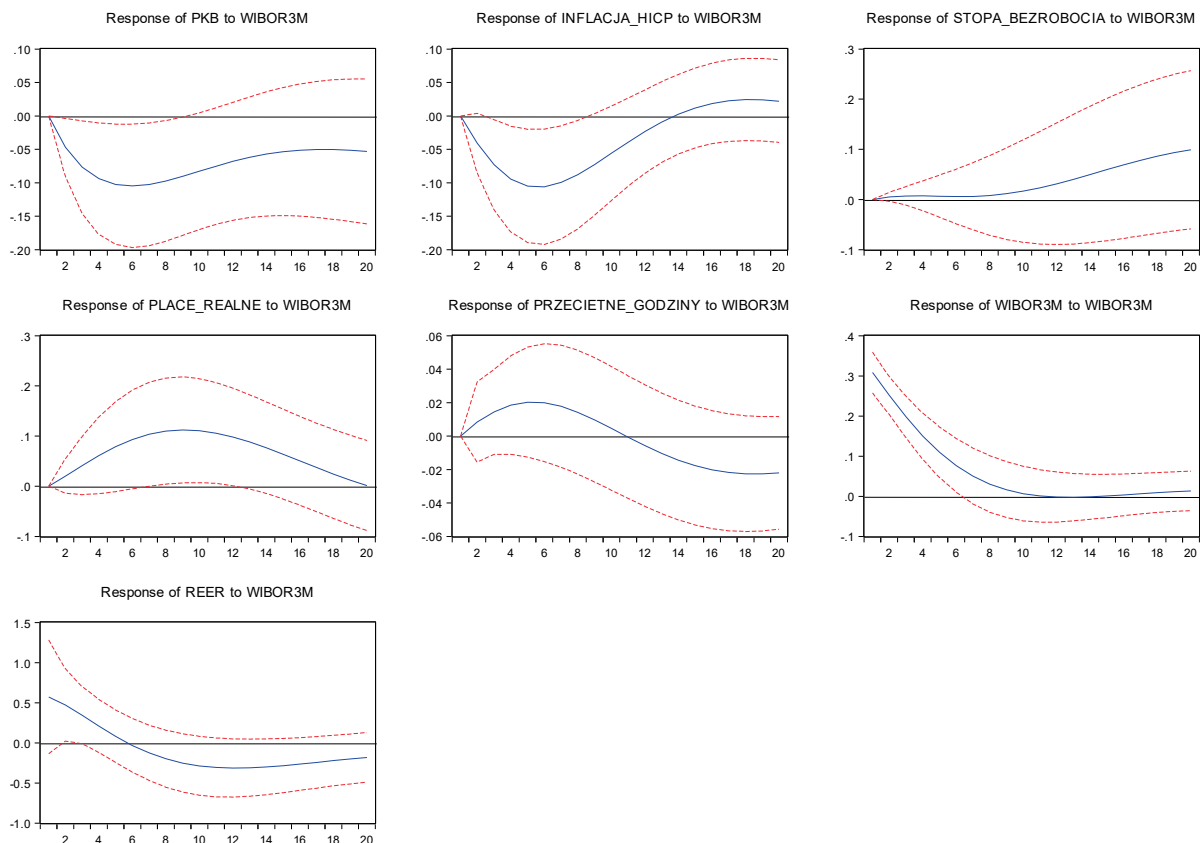
Model SVAR ze zmiennymi rynku pracy

Małgorzata Walerych

W celu identyfikacji wpływu impulsów monetarnych na rynek pracy w Polsce, oszacowaliśmy, bazując na specyfikacji zaproponowanej w artykule Kolasy *et al.* (2019), model VAR, w którym oprócz standardowych zmiennych wykorzystywanych w tego typu modelach tj. produkcji (realne PKB), inflacji (inflacja HICP), krótkoterminowej stopy procentowej (WIBOR 3M) i kursu walutowego (realny efektywny kurs walutowy), uwzględniliśmy stopę bezrobocia, realne płace (deflowane indeksem HICP) i przeciętną liczbę przepracowanych godzin. Oprócz deterministycznego trendu liniowego wykorzystanego przez Kolasę *et al.* (2019), zestaw zmiennych egzogenicznych w naszym modelu wzbogaciliśmy o PKB strefy euro. Model oszacowaliśmy na danych kwartalnych z okresu 1 kw. 2001 r. – 1 kw. 2019 r., a szok monetarny zidentyfikowaliśmy za pomocą dekompozycji Choleskiego. Bazując na kryterium informacyjnym Schwarz, w modelu uwzględniliśmy jedno opóźnienie.

Rysunek 1 przedstawia funkcje reakcji zmiennych modelu na szok polityki pieniężnej. Nieoczekiwany wzrost stopy procentowej przyczynia się do spadku produkcji i cen (reakcje istotne statystycznie) oraz aprecjacji kursu walutowego (reakcja na granicy statystycznej istotności). Wpływ na rynek pracy jest raczej ograniczony. Stopa bezrobocia wzrasta z opóźnieniem, ale jej reakcja nie jest istotna statystycznie. W odróżnieniu od gospodarki amerykańskiej (zob. Kolasa *et al.* 2019), gdzie średnia liczba przepracowanych godzin wzrasta po zacieśnieniu polityki pieniężnej, w Polsce reakcja przeciętnych godzin nie jest istotna statystycznie. Realne płace wzrastają, co oznacza, że spadek cen po szoku polityki pieniężnej jest silniejszy od spadku wynagrodzeń nominalnych.

Rysunek 1. Funkcje reakcji zmiennych na szok polityki pieniężnej (nieoczekiwany wzrost stopy procentowej)



Uwagi: Linia ciągła pokazuje reakcję zmiennej na szok (wzrost) stopy procentowej o wielkości 1 odchylenia standardowego, zaś linie przerywane – granice przedziału o szerokości +/- 2 odchyłeń standardowych. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po wystąpieniu szoku.

Źródło: Obliczenia własne.

Literatura:

Kolasa M., Rubaszek M., Walerych M. (2019), *Are flexible working hours helpful in stabilizing unemployment?*, NBP Working Paper No. 319, Narodowy Bank Polski.

Transmisja polityki pieniężnej przez pryzmat klasycznych modeli SVAR

Ewa Wróbel

W (strukturalnych) modelach wektorowej autoregresji, (S)VAR, posługujemy się stosunkowo niedużą liczbą założeń, mniejszą niż w modelach strukturalnych. Pozwalamy więc, by przede wszystkim mówiły dane.

Najważniejszym założeniem, na którym opierają się wyniki z modeli (S)VAR, jest postać reguły polityki pieniężnej oraz opóźnienia w mechanizmie transmisji monetarnej. W ujęciu VAR reguła polityki pieniężnej to zestaw zmiennych makroekonomicznych, które są brane pod uwagę przez ciało podejmujące decyzje o poziomie instrumentu polityki pieniężnej (stopy procentowej). Zakładamy, że w Polsce jest to inflacja (wskaźnik cen towarów i usług konsumpcyjnych) i stan koniunktury. W szczególności zakładamy, że ustalając w czasie t poziom stopy procentowej, bank centralny ma informacje dotyczące aktualnego (tj. w czasie t) kształtowania się wskaźnika inflacji i Produktu Krajowego Brutto. Z uwagi na sztywności w gospodarce, m.in. cen i płac oraz inercję konsumpcji (ang. *habit formation*), zakładamy, że sfera realna i ceny reagują na zmiany stopy procentowej z opóźnieniem. Kryzys finansowy sprawił, że wśród zmiennych makroekonomicznych analizowanych przez banki centralne wzrosła waga kredytu. Uzupełniliśmy w związku z tym podstawowy zestaw zmiennych wykorzystywanych w modelach (S)VAR o kredyty złotowe.

Zaburzenie, czy inaczej szok polityki pieniężnej, otrzymujemy z dekompozycji Choleskiego. Posługujemy się danymi o częstotliwości kwartalnej. Budujemy podstawowy model (S)VAR, w którym występuje 5 zmiennych endogenicznych, przy czym podajemy je w takiej kolejności, w jakiej występują w modelu¹: PKB, ceny (HICP)², kredyty i pożyczki złotowe dla gospodarstw domowych i przedsiębiorstw, stopa procentowa (stopę banku centralnego przybliżamy za pomocą stopy WIBOR 3M)³ oraz realny efektywny kurs walutowy. Jako zmienne egzogeniczne, a więc te, które wpływają na zmienne modelu, lecz same nie kształtują się pod ich wpływem, wykorzystujemy popyt zagraniczny (PKB strefy euro), zagraniczną stopę procentową (EURIBOR 3M i LIBOR3M) oraz ceny ropy naftowej Brent⁴. Zmienne egzogeniczne wprowadzamy jedynie do tych równań, w których ich obecność jest uzasadniona ekonomicznie (np. ceny ropy naftowej

¹ W dekompozycji Choleskiego kolejność zmiennych odzwierciedla założenia, jakie zostały przyjęte w celu identyfikacji szoków.

² Indeks HICP jest też wykorzystywany w modelach strukturalnych. Pozwala to na poprawne oszacowanie realnego kursu walutowego (ceny w strefie euro to indeks HICP). Stylizowane fakty uzyskane z modeli SVAR wykorzystujemy do weryfikacji wyników z modeli strukturalnych, z czego wynikało pojawienie się indeksu HICP w kwartalnych modelach SVAR. W prezentowanych tu modelach (S)VAR PKB, HICP, kredyty i pożyczki złotowe, stopa WIBOR oraz kurs walutowy występują w poziomach.

³ Stopa banku centralnego to stopa referencyjna, jednak ze względu na niską zmienność nie może być wykorzystana w modelach. Stopa POLONIA, która jest stopą transakcyjną i jednocześnie jest najbliższa stopie banku centralnego jest obliczana od 2005 r., a zatem jej szereg jest zbyt krótki, by mógł być użyty w modelach (S)VAR. Wykorzystujemy zatem stopę WIBOR 3M, kwotowaną na rynku pieniężnym, która – jak pokazujemy w rozdziale 2.3.2 w pełni dostosowuje się do stopy referencyjnej NBP.

⁴ Wszystkie zmienne oprócz stóp procentowych zostały zlogarytmowane.

wyeliminowane są z równania PKB, kredytów i stopy procentowej). Posługujemy się także zestawem zmiennych zero-jedynkowych w celu wyeliminowania obserwacji nietypowych (np. gwałtownego wzrostu stopy procentowej z powodu tzw. problemu roku 2000) oraz w celu wyeliminowania z danych resztek sezonowości. Próba obejmuje okres od 2. kw. 1999 r. do 1. kw. 2019 r. W celu ustalenia liczby opóźnień wykorzystujemy kryteria informacyjne. Kryterium Schwarzera wskazywało na 2 opóźnienia, lecz znacznie lepsze rozkłady reszt uzyskiwaliśmy w modelach, gdzie zgodnie z kryterium Akaike wykorzystaliśmy 4 opóźnienia. W przypadku niektórych równań, gdzie 3 i 4 opóźnienia zmiennych objaśniających okazywały się nieistotne, były one eliminowane (nakładaliśmy na nie restrykcje, że są one równe zero). W ten sposób zmniejszaliśmy problem szybkiej utraty stopni swobody.

W celu uszczegółowienia analizy stylizowanych faktów i ustalenia, jak zachowują się najważniejsze składniki PKB, do modelu podstawowego w miejsce PKB wstawiamy konsumpcję indywidualną lub inwestycje. Z kolei w modelu, którego celem było pokazanie wpływu stopy procentowej i kursu walutowego na bieżący wskaźnik ufności konsumentów, jako tzw. zmienna szybko reagująca, był on wprowadzany do modelu na ostatnim miejscu (w modelu tym nie występuje kredyt, ponieważ model byłby zbyt duży).

Z uwagi na to, że w dekompozycji Choleskiego zawarte jest założenie sekwencyjnego dostosowywania się zmiennych do szoku stopy procentowej⁵, w celu sprawdzenia odporności uzyskanych wyników sprawdziliśmy, czy funkcje reakcji na impuls różnią się zasadniczo, jeśli zastosujemy inną niż w modelu wyjściowym, kolejność zmiennych. Sprawdziliśmy następujące dwa warianty: (i) kredyty usytuowane za stopą procentową, potraktowane jak zmienna szybko reagująca; (ii) postawienie stopy procentowej na pierwszym miejscu, czyli potraktowanie stopy procentowej jako zmiennej najbardziej egzogenicznej, co może być uzasadnione faktem, iż od marca 2015 r. pozostaje ona na stałym poziomie, podczas gdy inne zmienne (inflacja, tempo wzrostu PKB) wykazywały wahania (np. w 1. kw. 2015 r. inflacja mierzona HICP wyniosła ok. -1,2% r/r, a w 1. kw. 2019 wyniosła +1,2%). Wyniki okazały się odporne na opisane zmiany i nie wykazały większych różnic w stosunku do modelu wyjściowego.

⁵ Inflacja i sfera realna reagują z opóźnieniem na impuls stopy procentowej, podczas gdy stopa procentowa ma natychmiastowy wpływ na kurs. Z kolei stopa procentowa reaguje na szoki kursowe z opóźnieniem.

Załącznik 3

Time varying structural vector autoregressions: some new perspective

Andrzej Kocięcki

TIME VARYING STRUCTURAL VECTOR AUTOREGRESSIONS: SOME NEW PERSPECTIVE

Andrzej Kocięcki

Narodowy Bank Polski

e-mail: andrzej.kociecki@nbp.pl

First version: February 2017

This version: January 2018

Abstract: We propose a new model framework to deal with time varying parameters in Structural Vector Autoregressions. Our analysis is comprehensive: we tackle the identification problem and come up with Bayesian algorithm to sample from the posterior. Our contributions are twofold. First, we show that due to non-Gaussianity of the sampling distribution, essentially there is no identification problem. Hence analogy between time-invariant and time varying Structural Vector Autoregressions, which was taken for granted, is very weak as far as identifiability is concerned. Second, we propose efficient Bayesian sampling procedure. What distinguishes our sampling from e.g. Primiceri (2005), which is the main benchmark in the literature, is that drawings in all steps of our Gibbs sampling can be made exactly. Moreover efficient sampling under general short-run restrictions that do not conform to the recursive (Cholesky) identification scheme still poses the challenge. Our algorithm makes it very easy provided that the short-run restrictions are imposed on instantaneous impulse response matrix, which is the inverse of the contemporaneous relations matrix in Structural Vector Autoregression.

I. INTRODUCTION

Time-invariant Structural Vector Autoregressions (SVARs) have proved to be indispensable in many areas of applied macro. Hence its generalization to time varying version was only the matter of time. Many successful attempts in this respect were made. Two works have been particularly influential. These were Cogley and Sargent (2005) and Primiceri (2005). Since then, Structural Vector Autoregressions with time varying parameters (TVP-SVARs) have become very popular tool to investigate changing economic relationships in the changing environment.

However the literature on TVP–SVARs methodology is far from being complete. First of all, the literature is silent on identification issues in TVP–SVARs. Before estimation of any econometric model it is good to know what the specific identification problems you may encounter (if any) since sooner or later they will manifest themselves with problematic output from estimation procedure. Although important works on the identification issues in time varying coefficients models were published in 80’s, see e.g. Pagan (1980) and in particular Wall (1987), TVP–SVARs are very specific and require completely different apparatus to establish identification. Second, although Canova and Pérez Forero (2015) made it possible to deal with nonrecursive short–run identifying schemes in TVP–SVARs, their algorithm may be inefficient since it requires Metropolis–Hastings (MH) step within Gibbs sampling and its efficiency crucially depends on the properties of neglected Jacobian term. The situation is perfectly analogous to that in the early stage of algorithms development for SVARs. Demonstrating pitfalls of ignoring the Jacobian term using MH, Waggoner and Zha (2003) proposed extremely efficient Gibbs sampling algorithm that treats the Jacobian term “with the highest care”. Third, dealing with even medium scale models is very difficult from computational point of view and requires some shrinkage to obtain reliable results. Our paper deals with the first two aspects of TVP–SVARs methodology.

As an empirical illustration we will estimate our model using the U.S. data that includes real GDP, GDP deflator, unemployment rate, M2 money stock, Commodity price index and the Federal funds rate.

II. IDENTIFICATION AND GAUSSIANTY ASSUMPTION

The fact that Gaussian assumption is in some sense peculiar has been known for many years, see e.g. Reiersøl (1950). On the one hand, Gaussian assumption allows for many “easy–to–obtain” analytical results, but on the other hand this assumption largely restricts what can be potentially identified with the given model structure had we omitted the Gaussian assumption. In fact the latter insight must have been a basis for many non–Gaussian models that appeared in the literature. The relevant list would be very long. We shall only mention a few recent works that stay within VAR framework and are closest to our approach. One strand of the literature represented by e.g. Gouriéroux and Monfort (2015) and Lanne et al. (2017), just deals with the non–Gaussian disturbances in VARs. The other one identifies models through heteroskedasticity of disturbances, see e.g. Rigobon (2003), Lanne and Lütkepohl (2008) or Lanne et al. (2010).

When the sampling distribution is Gaussian then the first two moments carry all information concerning identifiability. For example, suppose $y \in \mathbb{R}$ and consider the *model 1*: $y = \alpha + \beta$, where $\alpha \sim N(\lambda, \tau^2)$, $\beta \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\tau^2 > 0$, $\sigma^2 > 0$, α and β are independent.¹ Then $y \sim N(\lambda + \mu, \tau^2 + \sigma^2)$. In such a case neither of four parameters is identified. Let us introduce some modification into the above model, i.e. *model 2*: $y = \alpha + \beta\varepsilon$, where in addition to the original assumptions we assume $\varepsilon \sim N(0, 1)$ and ε is independent of α, β . Then y no longer possesses the Gaussian distribution. In fact its characteristic function is given by the expression $(1 + z^2\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\{iz\lambda - \frac{1}{2}z^2\tau^2\} \exp\{-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\} \exp\{\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(1 + z^2\sigma^2)^{-1}\}$, where $z \in \mathbb{R}$ and $i^2 = -1$. Expanding the logarithm of the characteristic function for sufficiently small z , one may easily show that

¹ Notation $N(a, b)$ is standard, it denotes Normal distribution with mean a and covariance b .

provided that $\mu \geq 0$, all four parameters are globally identified. The reason why identification is attained is evident i.e. information contained in higher moments of the distribution of y allows us to pin down uniquely all parameters.

Now consider an obvious variant of the *model 2*

$$y_t = \alpha_t + \beta_t \varepsilon_t; \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$\alpha_t = \lambda + u_t$$

$$\beta_t = \mu + \omega_t$$

where $u_t \sim i.i.d. N(0, \tau^2)$, $\omega_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ and $\varepsilon_t, u_k, \omega_s$ are independent of each other for all t, k, s . Then although we arrive at the nonlinear and non-Gaussian state-space model, what is remarkable is that (1) is globally identified. The model presented in the next section is just the multivariate generalization of (1) where α_t and β_t are no longer *i.i.d.* variables but possess random walk structure. However the matters are not so simple. Establishing identification will be more cumbersome and an efficient sampling becomes the challenge.

III. BASIC MODEL STRUCTURE AND NOTATION

In what follows, when referring to TVP-SVAR we mean the following model

$$y_t = c_t + A_{1,t} y_{t-1} + \dots + A_{p,t} y_{t-p} + \Psi_t \varepsilon_t = c_t + x_t B_t + \Psi_t \varepsilon_t; \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

where y_t is an $m \times 1$ observables vector, $x_t = \mathbf{I}_m \otimes (y'_{t-1} \dots y'_{t-p})$; " \otimes " stands for the Kronecker product; \mathbf{I}_m denotes an m dimensional identity matrix; $B_t = \text{vec}[(A_{1,t} \dots A_{p,t})']$; $\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, \mathbf{I}_m)$.

Let us define $\psi_t = \text{vec}(\Psi_t)$. In line with the most of literature, for all time-varying parameters we assume Random Walk (RW) structure

$$\psi_t = \psi_{t-1} + u_t \quad (3)$$

$$c_t = c_{t-1} + \omega_t^c \quad (4)$$

$$B_t = B_{t-1} + \omega_t^B \quad (5)$$

Disturbances are characterized by the following set of assumptions

$$\begin{pmatrix} \omega_t^c \\ \omega_t^B \end{pmatrix} \sim i.i.d. N(0, \Omega), \text{ where } \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_c & \Omega_{cB} \\ \Omega_{cB}' & \Omega_B \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$u_t \sim i.i.d. N(0, \Sigma), \text{ and } u_k \text{ is independent of } (\omega_t^c' \omega_t^{B'})' \text{ for all } k, t$$

In the sequel we will need more structured notation in the context of Σ . Let us write $u_t = [u_{1,t}' u_{2,t}' \dots u_{m,t}']'$, where $u_{i,t}$ is an $m \times 1$ disturbance corresponding to the i -th column of Ψ_t . Further, define Σ_{ij} as the (i, j) block of Σ corresponding to $E(u_{i,t} u_{j,t}')$.

We assume the following priors for initial conditions

$$\underline{\psi}_0 \sim N(\underline{\psi}_0, \underline{V}_{\psi_0}); B_0 \sim N(\underline{B}_0, \underline{V}_{B_0}); c_0 \sim N(\underline{c}_0, \underline{V}_{c_0}) \quad (7)$$

Underlined letters will always signify hyperparameters (i.e. must be set prior to any inference). In particular, defining $\underline{\Psi}_0$ through the relation $vec(\underline{\Psi}_0) = \underline{\psi}_0$, let us decompose it as $\underline{\Psi}_0 = [\underline{\psi}_{1,0} \underline{\psi}_{2,0} \dots \underline{\psi}_{m,0}]$. Using this notation, let $(\underline{V}_{\psi_0})_{ij}$ be the (i, j) block of \underline{V}_{ψ_0} corresponding to prior covariance between $\underline{\psi}_{i,0}$ and $\underline{\psi}_{j,0}$.

Clearly what distinguishes our model framework from that of Primiceri (2005) and many others (to be referred to as the classic setup) are three things: 1) time variability is introduced in the context of impulse response matrix Ψ_t , whereas in the classic setup it is modeled through time-varying entries in the contemporaneous relation matrix i.e. Ψ_t^{-1} ; 2) lack of triangular (Cholesky) structure imposed on Ψ_t (or Ψ_t^{-1} , which would be equivalent assumption); and 3) no special treatment of variances of the structural shocks i.e. Ψ_t is treated *en bloc*, whereas in the classic setup structural shocks volatilities and contemporaneous relations are modeled separately. Concerning 1), it turns out that this specification choice extremely simplifies many analytical formulas and allows for the design of very efficient sampling from the posterior. Moreover such a setup allows for relatively easy identification analysis, which is not the case when considering the classic setup. As for 2), this is the most distinctive feature of our approach and definitely our most important contribution to the literature. Not only do we avoid Cholesky identification scheme but we also do not need any other one. We will show that essentially there is no identification problem using our model framework, so we do not need any built-in linear restrictions imposed on Ψ_t . However we are aware that in many circumstances some “zeros” imposed on Ψ_t may be uncontroversial and could potentially diminish uncertainty of model estimates. In this context our model framework may be useful since it allows for any linear restrictions provided that they are imposed on elements of Ψ_t . This may be thought as another contribution of our paper, since in contrast to Canova and Pérez Forero (2015), we do not need MH step within Gibbs sampling to draw $\{\Psi_t\}_{t=1}^T$ from the posterior. Lastly as far as 3) is concerned, avoiding distinction between structural shocks variances and contemporaneous relations allowed us to avoid approxi-

mation method of the likelihood function due to Kim et al. (1998), which is needed in the classic setup to draw structural shocks volatilities. In general in our approach, no approximation and no MH steps are needed and our all Gibbs sampling steps use exact sampling from the full posteriors.

Additional notation used in the paper is as follows. All model parameters will be denoted as θ i.e. $\theta = (\Sigma, \Omega)$. We will frequently use compact notation for a time sequence of variables or states i.e. $x^t = (x_1, \dots, x_t)$. We will use $p(x)$ as a generic notation for a probability density function (pdf) connected with distribution of some variable(s) x . Needless to say, $p(x | z)$ denotes a pdf of the conditional distribution of x given z . When $p(x)$ or $p(x | z)$ will be the pdf of Normal distribution i.e. $N(a, b)$, we will sometimes signify this by writing $p(x) \equiv N(a, b)$.

IV. PROBABILITY MODEL AND MODIFIED MODEL STRUCTURE

We derive our probability model from scratch, since it involves one nonstandard step that is crucial for computational reasons. Due to assumptions concerning disturbances we arrive at the joint “basis” distribution

$$p(B_0)p(c_0)p(\psi_0)\prod_{t=1}^T p(\varepsilon_t)p(\omega_t^c, \omega_t^B)p(u_t) \quad (8)$$

where all pdf's are those of a Normal distribution. In order to “insert” the data into the probability model the usual practice is to change variables from $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$ to y_1, \dots, y_T , according to expression (2). In our case, due to the underlying Jacobian term, this route would not be beneficial since it will make the sampling procedure very difficult. Instead consider changing variables from $\omega_1^c, \dots, \omega_T^c$ to y_1, \dots, y_T . In fact this will be a composite change from $\omega_1^c, \dots, \omega_T^c$ to c_1, \dots, c_T and then to y_1, \dots, y_T with the overall Jacobian equal to 1. Essentially this strategy amounts to replacing (2) and (4) with the new law of motion

$$y_1 = c_0 + x_1 B_1 + \Psi_1 \varepsilon_1 + \omega_1^c; \quad \text{for } t = 1 \quad (9)$$

$$y_t = y_{t-1} + x_t B_t - x_{t-1} B_{t-1} + \Psi_t \varepsilon_t - \Psi_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \omega_t^c; \quad \text{for } t = 2, \dots, T \quad (10)$$

Further, let us change variables from u_1, \dots, u_T to ψ_1, \dots, ψ_T and from $\omega_1^B, \dots, \omega_T^B$ to B_1, \dots, B_T (all Jacobians are 1's). Then we arrive at the joint pdf of the data, unobserved (latent) random variables and initial conditions given the model parameters and initial observations

$$p(c_0, B_0, \psi_0, y^T, B^T, \varepsilon^T, \psi^T | \theta, y^0) = p(B_0)p(c_0)p(\psi_0)\prod_{t=1}^T p(\varepsilon_t)p(y_t, B_t)p(\psi_t | \psi_{t-1}) \quad (11)$$

where $y^0 = (y_0, \dots, y_{-p+1})$ and pdf's conform to $\psi_t | \psi_{t-1} \sim N(\psi_{t-1}, \Sigma)$ and

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} c_0 + x_1 B_0 + \Psi_1 \varepsilon_1 \\ B_0 \end{bmatrix}, \Omega_1\right); \quad \text{for } t = 1 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ B_t \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} y_{t-1} + (x_t - x_{t-1})B_{t-1} + \Psi_t \varepsilon_t - \Psi_{t-1} \varepsilon_{t-1} \\ B_{t-1} \end{bmatrix}, \Omega_t\right); \quad \text{for } t = 2, \dots, T \quad (13)$$

$$\text{where } \Omega_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & x_t \\ 0 & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ x_t' & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix}, \text{ in particular } \Omega_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & x_1 \\ 0 & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ x_1' & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix}$$

Hence $p(y_t, B_t)$ in (11) is the pdf of a Normal conditional distribution that may be read off from (12) and (13) (we omitted the obvious conditioning set to save the space).²

We think that a few remarks will be useful. First, we emphasize that instead of the basic model structure we consider the new (modified) structure described by (9)–(10), (3), (5), (6) and (7). However these are equivalent model descriptions since they both may be obtained from (8) using probability rules and basic model structure. Second, it should be understood that the source of randomness in (9)–(10) is ω_t^c (compare it with the basic model i.e. (2), in which it is ε_t that drives the probability mechanism). Since disturbances in our modified model i.e. ω_t^c , are correlated with those from the state equation (5) i.e. ω_t^B , our workhorse will be the state–space model with correlated transition and measurement noises (see appendix 3). However we think this is a low price for staying in Gaussian environment. Third, what distinguishes our model setup from the traditional one is that structural shocks i.e. ε_t , become latent random variables and must be treated on the same footing as e.g. B_t . At the same time, c^T disappears from the set of latent variables. Moreover, the fact that distribution for initial observation (9) is a little bit different from (10) has obvious consequences i.e. when designing sampling algorithm we should pay special attention to initial conditions, see appendix 4.

V. IDENTIFICATION

Identification is inherently related to distribution function of the underlying model. Since the specification of our TVP-SVAR model implies non–stationarity, we work with the conditional pdf $p(y^T \mid \theta, y^0)$ (recall the convention $y^0 = (y_0, \dots, y_{-p+1})$), where y^0 is fixed. Of course $p(y^T \mid \theta, y^0)$ is just (11) integrated out with respect to all latent variables including initial conditions i.e. $c_0, B_0, \psi_0, B^T, \varepsilon^T, \psi^T$

² In order to derive (12) and (13), we plugged $B_t = B_{t-1} + \omega_t^B$ into (9) and (10). In general, on several occasions we will use informal technique to insert terms from one equation into the other one. However, each time, this goal may be formally justified by the permissible algebraic manipulations inside the underlying pdf's.

Definition: A TVP–SVAR is globally identified at θ iff $p(y^T | \theta, y^0) = p(y^T | \bar{\theta}, y^0)$ for all $y^T \in \mathbb{R}^{m \times T}$ implies $\theta = \bar{\theta}$

The main difficulty in getting identification results for TVP–SVAR is concerned with derivation of $p(y^T | \theta, y^0)$. To get around this problem we divided analysis into two steps. First we obtained the characteristic function for the first observation only (corresponding to the conditional pdf $p(y_1 | \theta, y^0)$). Noting that $p(y^T | \theta, y^0) = p(y^T | \bar{\theta}, y^0)$ for all $y^T \in \mathbb{R}^{m \times T}$ implies $p(y_1 | \theta, y^0) = p(y_1 | \bar{\theta}, y^0)$ for all $y_1 \in \mathbb{R}^m$, if we manage to demonstrate global identification using model confined to the first observation only, this implies the identification for the full sample model. This turned out sufficient to get identification conditions for Σ . In the second step we obtained identification results for Ω , exploiting the fact that moments of the distribution function are (uniformly) globally identified. To this end we derived analytically (selected) first two moments for the first few observations.

Evidently, $p(y_1 | \theta, y^0) = p(y_1 | \bar{\theta}, y^0)$ for all $y_1 \in \mathbb{R}^m$ (with fixed $y^0 \in \mathbb{R}^{m \times p}$) is equivalent to equality of the corresponding characteristic functions. Hence our next step is to derive the characteristic function (CF) of y_1 (keeping fixed y^0), denoted as $\phi_{y_1}(z)$

Proposition 1: The characteristic function of y_1 for fixed y^0 is:

$$\phi_{y_1}(z) = \exp\{\iota z'(\underline{c}_0 + x_1 \underline{B}_0) - \frac{1}{2} z'(\underline{V}_{c_0} + x_1 \underline{V}_{B_0} x_1' + [\mathbf{I}_m \vdots x_1] \Omega [\mathbf{I}_m \vdots x_1]') z\} \cdot \det(Q)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} z' \underline{\Psi}_0 Q^{-1} \underline{\Psi}_0' z\}$$

where $\iota^2 = -1$, $z \in \mathbb{R}^m$ (a column vector) and

$$Q = \begin{bmatrix} 1 + z'[\Sigma_{11} + (\underline{V}_{y_0})_{11}]z & z'[\Sigma_{12} + (\underline{V}_{y_0})_{12}]z & \dots & z'[\Sigma_{1m} + (\underline{V}_{y_0})_{1m}]z \\ z'[\Sigma_{21} + (\underline{V}_{y_0})_{21}]z & 1 + z'[\Sigma_{22} + (\underline{V}_{y_0})_{22}]z & \dots & z'[\Sigma_{2m} + (\underline{V}_{y_0})_{2m}]z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z'[\Sigma_{m1} + (\underline{V}_{y_0})_{m1}]z & z'[\Sigma_{m2} + (\underline{V}_{y_0})_{m2}]z & \dots & 1 + z'[\Sigma_{mm} + (\underline{V}_{y_0})_{mm}]z \end{bmatrix}$$

Now we are in a position to challenge the identification problem of our TVP–SVAR model. Two things are worth emphasizing. First, establishing identification for general Σ appears to be difficult (but not infeasible). The reason is that the proof will be tantamount to proving that the set of polynomial equations possesses a unique solution. When Σ is unrestricted, the underlying polynomials become more complicated. Second, each dimension of a model, i.e. m , will require separate proof. It is so because as m increases the number of “unknowns” in polynomial equations increases and the pattern of polynomial equations proper

changes which makes the whole analysis even more cumbersome. Fortunately some pattern of polynomials is common for all m , which allows for general conclusions. For these reasons our identification results are based on one simplification: we assume that Σ and \underline{V}_{i_0} are block diagonal (i.e. Σ_{ij} and $(\underline{V}_{i_0})_{ij}$ equal 0 for all $i \neq j$).³ In addition it turns out that without some restrictions imposed on Ω , the latter will not be globally identified. Hence some restrictions involving Ω are a must.

Now we are in a position to present the key results in our paper. We divided them into two theorems: the first one concerns identification of Σ and second one that of Ω

Theorem 1: Let Σ and \underline{V}_{i_0} be block diagonal and $\underline{\Psi}_0$ nonsingular.

a) Let $m = 2$. The TVP-SVAR is globally identified at almost all [Lebesgue] Σ

b) Let $m \geq 3$. Let us denote the i -th row of $\underline{\Psi}_0^{-1}$ as l_i . Provided that

$$l_1(\Sigma_{22} + (\underline{V}_{i_0})_{22})l_1' > l_1(\Sigma_{33} + (\underline{V}_{i_0})_{33})l_1' > \dots > l_1(\Sigma_{mm} + (\underline{V}_{i_0})_{mm})l_1'$$

$$l_2(\Sigma_{11} + (\underline{V}_{i_0})_{11})l_2' > l_2(\Sigma_{33} + (\underline{V}_{i_0})_{33})l_2' > \dots > l_2(\Sigma_{mm} + (\underline{V}_{i_0})_{mm})l_2'$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$l_m(\Sigma_{11} + (\underline{V}_{i_0})_{11})l_m' > l_m(\Sigma_{22} + (\underline{V}_{i_0})_{22})l_m' > \dots > l_m(\Sigma_{m-1m-1} + (\underline{V}_{i_0})_{m-1m-1})l_m'$$

the TVP-SVAR is globally identified at almost all [Lebesgue] Σ

Theorem 2: Assume $p = 2$ and $m \leq 5$. Let $\Omega_{cB} = 0$, Ω_B be (purely) diagonal but $\Omega_c > 0$ (i.e. positive definite). Then for almost all \underline{B}_0 , \underline{V}_{B_0} and $y^0 = (y_0, y_{-1})$ the TVP-SVAR is globally identified at all Ω i.e. uniformly.

We comment on these theorems. It is clear that proving Theorem 1 a) does not require any identification restrictions involving Σ (except those listed in premises of Theorem). In contrast, identification in case $m \geq 3$ require some further inequality constraints. In this respect the key role play the hyperparameters $\underline{\Psi}_0$ and \underline{V}_{i_0} . Note that provided that $\underline{\Psi}_0$ is diagonal and $(\underline{V}_{i_0})_{ii} = (\underline{V}_{i_0})_{jj}$ for all i, j , the inequalities

³ We note that block diagonality of Σ is analogues to the standard assumption in the literature concerning independence between coefficients in contemporaneous relations belonging to separate equations that stems from the seminal contribution by Primiceri (2005). Of course Primiceri (2005) accommodated the general case at the cost of computational burden, but most of followers imposed independence assumption. See however Canova and Pérez Forero (2015) for a critique and some remedy.

stated in Theorem 1 could be written in terms of just diagonal elements of Σ_{ii} (i.e. variances). Moreover, Theorem 1 is instrumental in getting Theorem 2. It is so since knowing that Σ is identified extremely simplifies identification problem for Ω . However we emphasize that we established Theorem 2 only for two lags TVP-SVAR and $m \leq 5$. The reason is that the whole problem boils to the identification of polynomial equations whose number and degree raises with p and m . In fact even the leading case met in the literature i.e. $p = 2$, still posed a very involved task to deal with. However we conjecture that the result holds true for $m > 5$ (but $p = 2$). The “almost all” clause means in practice that we should avoid “zeros” among $E(B_0) = \underline{B}_0$, $E(B_0 B_0') = \underline{V}_{B_0} + \underline{B}_0 \underline{B}_0'$ and $y^0 = (y_0, y_{-1})$ (and entries in the latter should be distinct from each other). The reason why this may be devastating for identification is that the coefficients in the polynomial equations being moments of the data, are function of those parameters and too many zeros among $E(B_0)$, $E(B_0 B_0')$ and y^0 can make some variables just disappear from the underlying polynomial system. In general using standard training sample technique to form the prior for B_0 and conditioning on the first p observations overcomes these potential pitfalls.

Intuition why identification is achieved is as follows. Having only second moments we cannot uniquely retrieve both Σ and Ω , hence if the conditional distribution function of y_1 given y^0 were Gaussian we would have nonidentified model. Since the conditional distribution function of y_1 given y^0 corresponding to $\phi_{y_1}(z)$ is non-Gaussian, higher moments convey additional information concerning identifiability. Importantly only Σ enters higher moments. Hence provided that we can identify Σ (from higher moments), we can also identify Ω from the second moments. On the other hand, if one looks carefully at the TVP-SVAR model setup one will immediately realize that the implicit analogy to identification of SVARs is at best misleading. Indeed, omitting what is inessential, consider two models $y_t = \Psi \varepsilon_t$ and $y_t = \Psi_t \varepsilon_t$. In the first one, Ψ is unknown parameter and the usual identification conditions for SVARs hold. In the second case, Ψ_t is just an element of the latent random variable process i.e. $\{\Psi_t\}_{t=1}^T$. Since the latter possesses the RW structure it is fully characterized by its initial conditions, which in our case is the prior $\psi_0 \sim N(\underline{\psi}_0, \underline{V}_{\psi_0})$. Putting it other way, the sampling density, which carries all information concerning identifiability, is obtained when integrating out with respect to all latent variables including $\{\Psi_t\}_{t=1}^T$. Hence, by definition, the sampling distribution cannot be a function of $\{\Psi_t\}_{t=1}^T$, thus it is necessarily silent on identification of Ψ_t *per se*.

By no means the above identification exploration is complete. For example, from economic point of view it would be useful to have a variant of TVP-SVAR in which (3) would be replaced by $\psi_t = \mu + G(\psi_{t-1} - \mu) + u_t$ i.e. stationary VAR process, so that μ could be interpreted as the long-run contemporaneous relations. Such a specification would also make it easier to elicit the prior for initial conditions. Extension of our algorithm from appendix 4 to this case is straightforward (actually it has been worked out in full details by the author). However we do not know yet whether μ and G are identified or what the extra conditions for their identification are. Actually we made some efforts to check this but it turned out that in stationary case $\phi_{y_1}(z)$ does not depend on either G or Σ but only on the steady state covariance Λ defined through $\Lambda = G\Lambda G' + \Sigma$. In order to establish identifiability of G , which would

entail identifiability of Σ , first we should obtain the CF for at least two observations i.e. $\phi_{y_1, y_2}(z)$ (which is not an easy task), and then expand CF and find out whether G is identified (which is another not easy task). These and some other considerations are subject to the ongoing research by the author.

VI. INFERENCE

We shall make one thing clear at the outset. Our inference procedure is conditioned on the identification findings from the previous section so we fully commit to the statement "estimate what you know is identified". We think that this is the sound imperative since we suspect (but do not have proof yet) that many results that appeared in the literature on TVP-SVARs may be artefacts originated in identification failures, see e.g. Lubik et al. (2014) for the striking example. Anyway although assuming that Σ and/or Ω is general positive definite would be immediately "swallowed" by our sampling algorithm, since we do not have identification conditions in such a case, we do not consider this case at all.

In order to estimate our TVP-SVAR we resort to Bayesian techniques. We propose the "pure" Gibbs sampling algorithm, meaning that all Gibbs steps use exact sampling. Assuming mutually independent Inverted-Wishart priors for all diagonal blocks Σ_{ii} , for $i = 1, \dots, m$; and Ω_c , independent inverted gamma for diagonal entries in Ω_B , the algorithm is schematically characterized by the following steps of

Gibbs Sampling

1. Draw B_0, B^T from $p(B_0, B^T \mid \psi_0, \psi^T, \varepsilon^T, \theta, c_0, y^T)$
2. Draw ψ_0, ψ^T from $p(\psi_0, \psi^T \mid B_0, B^T, \varepsilon^T, \theta, c_0, y^T)$
3. Draw ε^T from $p(\varepsilon^T \mid B_0, B^T, \psi_0, \psi^T, \theta, c_0, y^T)$
4. Draw Ω from $p(\Omega \mid B_0, B^T, \psi_0, \psi^T, \Sigma, \varepsilon^T, c_0, y^T)$
5. Draw Σ_{ii} from $p(\Sigma_{ii} \mid B_0, B^T, \psi_0, \psi^T, \Omega, \varepsilon^T, c_0, y^T)$, for $i = 1, \dots, m$
6. Draw c_0 from $p(c_0 \mid B_0, B^T, \psi_0, \psi^T, \theta, \varepsilon^T, y^T)$

All details are available in appendix 4. We shall only briefly comment on the Gibbs sampling focusing on its nonstandard aspects. The first 3 steps require running Kalman filter recursions that take into account the fact that measurement and transition equation noises are correlated. Although such a modified Kalman filter is seldom met in published papers within economics literature (see however Cogley and Sargent (2002)), its all details were worked out by Kalman himself and are readily available in the classic engineering textbooks. Moreover, essentially due to this noises correlation, standard multi-move sampling formulas to sample the states (see e.g. Carter and Kohn (1994) or Frühwirth-Schnatter (1994)), are not valid. Fortu-

nately we need only minor modifications.⁴ We note that extension of step 2 that takes into account possible linear (either homogenous or nonhomogenous) restrictions imposed on ψ_t is given in appendix 4. Lastly we should draw the reader's attention to the fact that structural shocks are subject to sampling (i.e. step 3) replacing the time varying constants that are drawn in the traditional approaches. See section IV for some clarification. The last 3 steps are standard.

VII. EMPIRICAL ILLUSTRATION

Having outlined the methodology we are ready to apply it to the U.S. data. To this end we use 6 variables TVP-SVAR. The data were obtained from the Federal Reserve Bank of St. Louis database (FRED) and consist of real GDP (code: GDPC1), civilian unemployment rate (code: UNRATE), GDP deflator (code: GDPDEF), M2 money stock (code: M2SL), federal funds rate (code: FEDFUNDS) and commodity price index (code: PPIACO). The ordering of variables in y_t conforms to the above listing. We transformed the data as follows. GDP deflator and real GDP were transformed into year-on-year growth rates by using log yearly differences multiplied by 100. The same procedure was applied to M2 and commodity price index except that first we had to define quarterly series (since M2SL and PPIACO are monthly data) by taking the average over the quarter. Similarly, quarterly data on unemployment rate and federal funds rate were obtained by taking the average of monthly series over the quarter.⁵ As a result we arrived at the quarterly data that span the period 1960:Q1–2018:Q2.

In line with the most of literature we used the training sample technique. To this end we sacrificed the first 7 years of observations (up to 1966:Q4) to inform our prior. Priors for initial conditions i.e. (7), were chosen by using the following hyperparameters: $\psi_0 = \text{vec}(\text{chol}(\hat{\Sigma}_{OLS}))$, $\hat{\Sigma}_{OLS}$ is the OLS estimator of disturbances covariance matrix in time invariant VAR using the training sample, $\text{chol}(\hat{\Sigma}_{OLS})$ is the lower triangular "square root" of $\hat{\Sigma}_{OLS}$ (derived by the Choleski decomposition), $V_{\psi_0} = 0.005 \cdot I_{m^2}$, $\underline{c}_0, \underline{B}_0$ are conditional posterior means of the corresponding coefficients in time invariant VAR (given $\hat{\Sigma}_{OLS}$) obtained from the training sample with a flat prior whereas V_{c_0}, V_{B_0} are conditional posterior covariances (given $\hat{\Sigma}_{OLS}$) of the corresponding coefficients in time invariant VAR (given $\hat{\Sigma}_{OLS}$) obtained from the training sample with a flat prior. Of course we force the off-diagonal blocks of V_{B_0} to be zero due to identification requirements. Further we set the independent inverted-Wishart prior for each block Σ_{ii} ($i = 1, \dots, m$) so as the prior expectation is $E(\Sigma_{ii}) = 0.0004 \cdot \hat{\Sigma}_{OLS}$ for each i , but all higher order moments do not exist (i.e. low prior degrees of freedom). Lastly the prior expectation in inverted-Wishart prior for Ω is set to $E(\Omega) = 0.0004 \cdot \text{diag}(V_{c_0}, V_{B_0})$ (which means that Ω is block-diagonal) and all

⁴ This means that Cogley and Sargent (2002), who applied Carter and Kohn (1994) conceptual framework in the context of correlated state-space model, made a methodological mistake.

⁵ For the period between January 2009 and November 2015 we replaced the federal funds rate with the shadow rate following Wu and Xia (2016).

higher order moments do not exist.⁶ Estimation results are based on 120 000 draws from the posterior (burn-in period was also set to 120 000) with the qualification that only those B_t that resulted in VAR stability were accepted.

One of the key empirical questions using a model that allows for both time varying coefficients in linear relations between variables and time varying elements in covariance matrix is how these two sources of time variation contribute to the volatility of the main macroeconomic variables. Hence it should not be surprising that TVP-SVAR framework played a key role in debate on “good luck/good policy” in the context of “Great Moderation” (i.e. large reduction in the volatility of U.S. output growth as well as other macroeconomic indicators from early 80’s to around 2007), see e.g. Cogley and Sargent (2005), Primiceri (2005), Canova and Gambetti (2009). However to do this unambiguously we have to be sure that identification of parameters is attained. That is that the model structure allows for distinguishing between Σ and Ω for all possible data. To our knowledge nobody has demonstrated it yet in the context of Primiceri’s (2005) model setup. Since we proposed the first identified TVP-SVAR framework, confronting it with the U.S. data is particularly interesting.⁷ To this end we rewrite the model (1) as

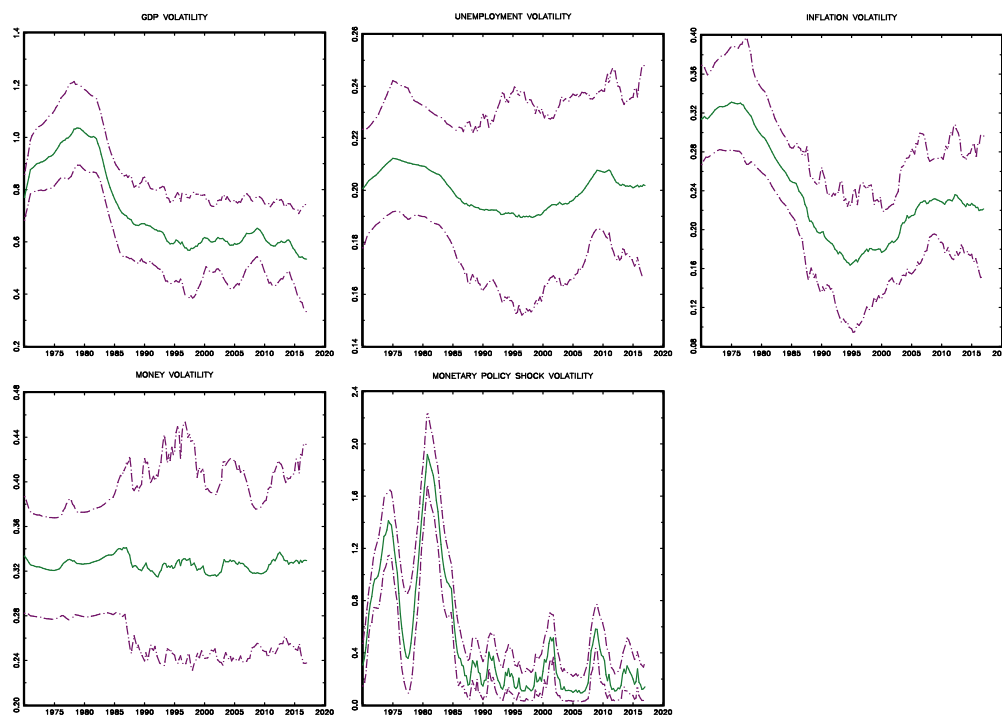
$$A_t y_t = A_t c_t + F_{1,t} y_{t-1} + \dots + F_{p,t} y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (14)$$

where $A_t = \Psi_t^{-1}$ and $F_{i,t} = \Psi_t^{-1} A_{i,t}$. Let us define the time-varying volatilities as reciprocals of diagonal elements in A_t . On the other hand, let us decompose $A_t = P_t L_t$, where P_t is orthogonal matrix and L_t is lower triangular (with positive diagonal elements). If $P_t = I_m$ we arrive at the Primiceri’s (2005) recursive model setup. So let us define the forced time-varying volatilities as reciprocals of diagonal elements in L_t . These are possibly misspecified volatilities in the situation when we force lower triangular identifying scheme for A_t (but $A_{i,t}$ are not misspecified). Figure 1 and Figure 2 contain all these volatilities.

⁶ Small prior expectations for model parameters Σ and Ω are inevitable consequences of the TVP-SVAR setup like ours or that of Primiceri (2005). On the one hand, the random walk structure (3)–(5), allows for parsimonious parameterization. On the other hand, it shrinks allowable Σ and Ω towards zero because otherwise the model would explode immediately.

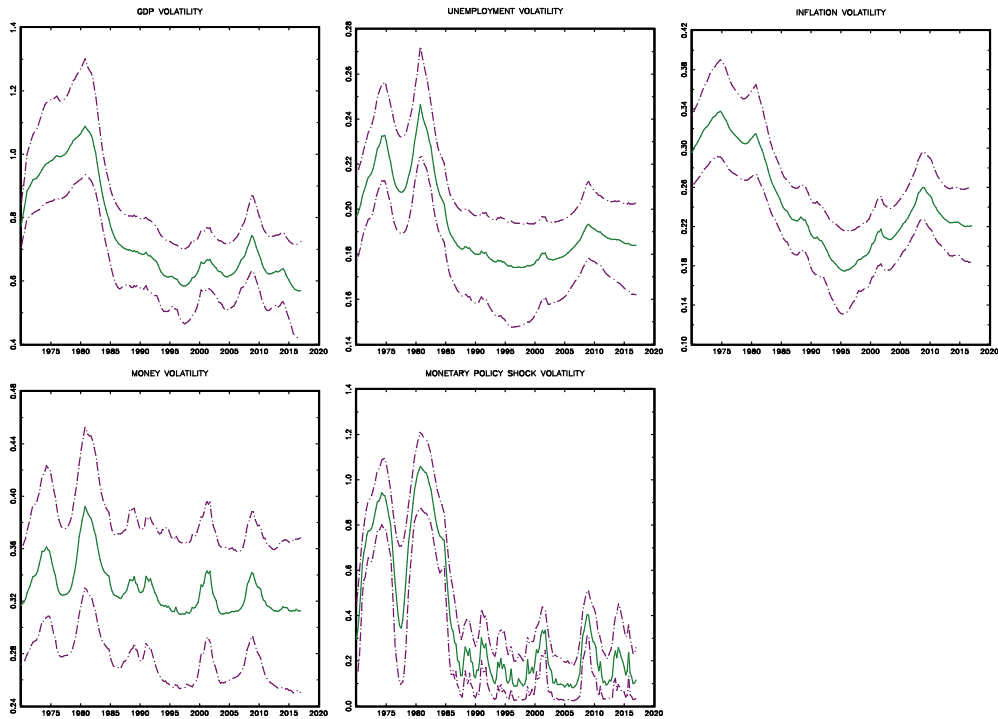
⁷ The reader is reminded that lower triangular assumption for contemporaneous relations matrix in Primiceri’s (2005) setup does not imply that his model is identified. The latter is still an open problem.

Figure 1: Time-varying volatilities. Posterior medians and 68% error bands (pointwise).



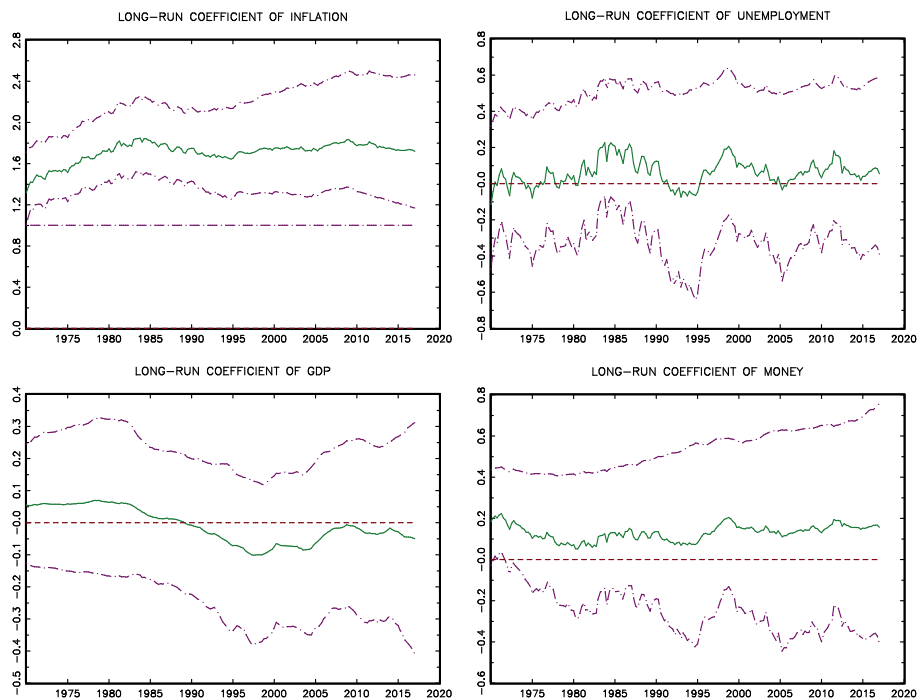
It is clear that forced “triangularization” is not neutral for the obtained results. Although it is relatively harmless for GDP and inflation volatilities, it affects the other ones. In particular forced unemployment and money volatilities are highly exaggerated in 1970’s. On the other hand, forced monetary policy shock volatility underestimates the “true” volatility from 1970’s.

Figure 2: Forced time-varying volatilities. Posterior medians and 68% error bands (pointwise).



Let us focus on the last (the m – th) equation from (14), which has unambiguous interpretation as the monetary policy equation (since we work with identified model). One of the most interesting aspects of this equation relates to its long-run coefficients, see e.g. Sims and Zha (2006), whose changes in time are depicted in Figure 3.

Figure 3: Long-run coefficients of the monetary policy equation. Posterior medians and 68% error bands (pointwise).



There are no substantial time-variation in all long-run coefficients. In addition, long-run coefficients of GDP and unemployment seem to oscillate around zero and are statistically insignificant. Long-run coefficient of money, although uniformly positive, was only statistically significant in the first few years of 1970's. This is consistent with a common view that the FED chair Arthur F. Burns paid more attention to money growth at the beginning of his tenure than in later years, see e.g. Sims and Zha (2006). On the other hand, estimates of the long-run coefficient of inflation are above one in the whole sample period, and importantly their 68% error bands are uniformly above one too. To the extent that long-run coefficients are most reasonable counterparts of the corresponding parameters in the New Keynesian models, we do not confirm "indeterminate equilibrium in 1970's" hypothesis. All in all, using our methodology we find no evidence for changing coefficients in the policy rule in which only coefficient of inflation played a role. Juxtaposing this with the fact alone that monetary policy shock volatility drastically decreased in early 1980's, our results lean towards "good luck" explanation for "Great Moderation". However Forecast Error Variance Decompositions (FEVDs) of the monetary policy shock presented in Figure 4, shake this conclusion. They suggest that nonsystematic monetary policy behavior (interpreted as an unexpected interest rates movements or as policy mistakes) account for large part of business fluctuations and inflation in 1970's, and the significant one at the beginning of 2000's and during the Financial Crisis. So although the monetary policy was conducted in a systematic way during the whole period, the discrepancies from the systematic monetary policy action, whenever they appeared, did had a strong impact on the economy. This leads to the conclusion that high inflation and unemployment in 1970's and early 1980's was a consequence of the "bad policy" that did not stick sufficiently to the systematic policy actions. In addition Taylor's (2009) arguments that discretionary policy actions (i.e. persistent deviation from policy rules) between 2000 and 2007 have added some fuel to the Great Recession, find some support in our results. Indeed, the nonsystematic policy actions in those times accounted for peaks in all variables FEVDs in the period 2008–2010.

Figure 4: Long-run FEVDs (evaluated for 10 years) due to a monetary policy shock. Posterior medians and 68% error bands (pointwise).

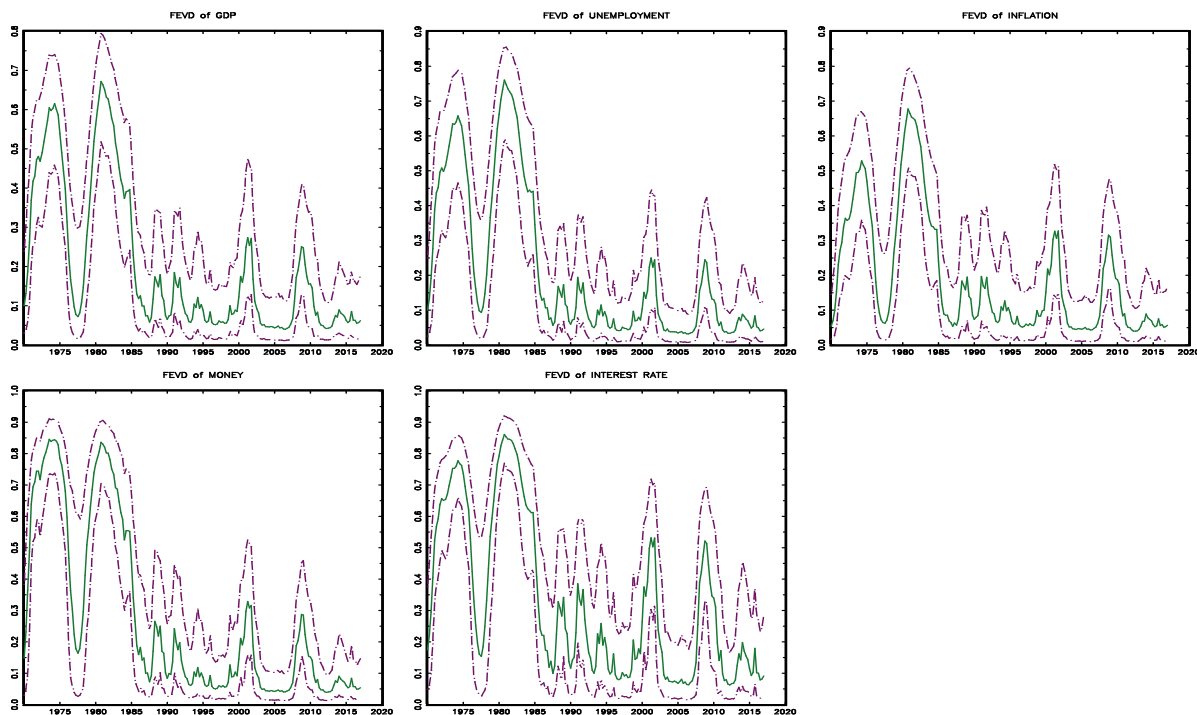
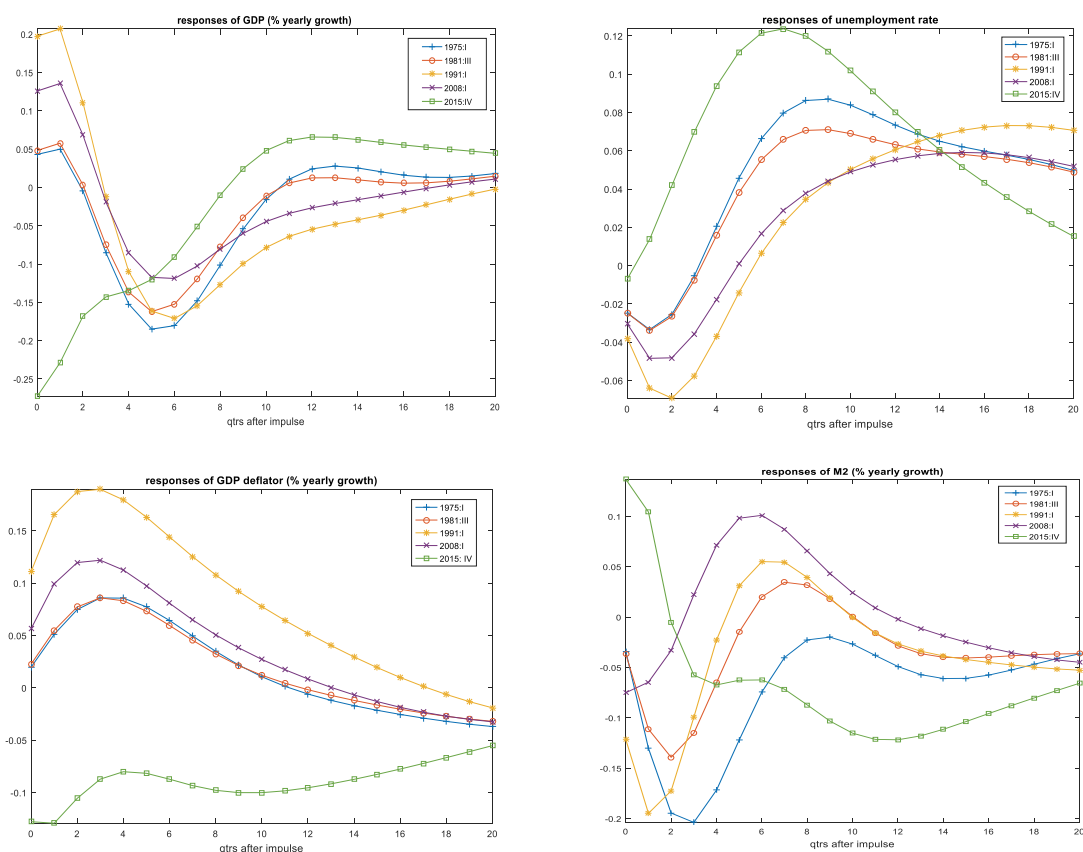
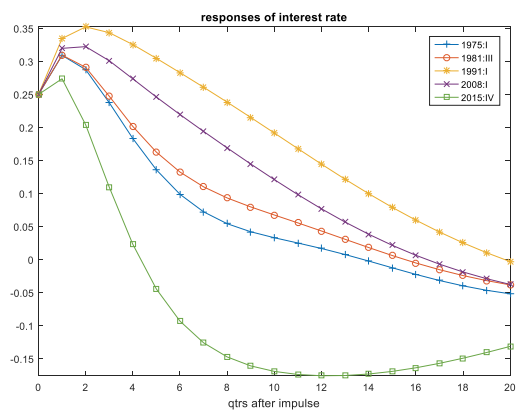


Figure 5 shows IRF's to monetary policy shock for five periods. The first two are taken from Primiceri (2005). The period 1991:I represents "normal times" from Greenspan's appointment as the FED chair. The period 2008:I marks the beginning of Financial Crisis and 2015:IV – the end of using the shadow rate (instead of the usual federal funds rate). Let us discuss main findings. The output puzzle i.e. the increase in GDP after monetary policy tightening, is present in all periods except for 2015:IV. The unemployment rate also exhibits some negative responses in the first few quarters after the contractionary monetary policy shock for all periods but 2015:IV. Further the liquidity effect in money responses is well manifested (once again except in 2015:IV period). However what draws most attention is the surprising response of GDP deflator growth rates to positive monetary policy shocks (for all periods but 2015:IV). If the term "prize puzzle" was coined to describe the temporary increase in prices in response to monetary policy tightening, then our results don't conform to this situation. In fact we face uniformly positive response of prices to contractionary monetary policy shock. If we treat it as a genuine statement about monetary policy effects this is in line with the recent theoretical work of Cochrane (2017).

[MORE ON THIS TO COME]

Figure 5: IRF's to a monetary policy shock (normalized to 25 basis points on impact). Posterior means (pointwise).





VIII. CONCLUSIONS

We built a new framework of time-varying Structural VAR and analyzed its main inferential aspects. We proved global identification and proposed sampling procedure to draw from the posterior. As for the former, to our best knowledge, this is the first time that identification of time-varying Structural VAR model is seriously tackled. As far as the latter is concerned, we managed to come up with pure Gibbs sampling, meaning that all steps use drawing from the standard distributions and no approximation is needed, which is not the case using Primiceri’s (2005) model setup.

APPENDIX:

Appendix 1 (proof of proposition 1)

Our goal is to derive characteristic function (CF) of the distribution of y_1 keeping fixed $y^0 = (y_0, \dots, y_{-p+1})$ i.e. $\phi_{y_1}(z) = E[\exp(\iota z' y_1) | y^0]$, where $z \in \mathbb{R}^m$ (a column vector) and $\iota^2 = -1$. Let us recall and introduce some new notation. Let $\Psi_t = [\psi_{1,t} \psi_{2,t} \dots \psi_{m,t}]$, so that $\psi_{i,t}$ is the i -th column of Ψ_t and $vec(\Psi_t) = \psi_t$, $u_t = [u'_{1,t} u'_{2,t} \dots u'_{m,t}]'$, $\underline{\Psi}_0 = [\underline{\psi}_{1,0} \underline{\psi}_{2,0} \dots \underline{\psi}_{m,0}]$ so that $vec(\underline{\Psi}_0) = \underline{\psi}_0$, $\varepsilon_t = [\varepsilon_{1,t} \varepsilon_{2,t} \dots \varepsilon_{m,t}]'$, Σ_{ij} is the (i, j) block of Σ corresponding to $E(u_{i,t} u'_{j,t})$, $(\underline{V}_{\psi_0})_{ij}$ is the (i, j) block of \underline{V}_{ψ_0} corresponding to prior covariance between $\underline{\psi}_{i,0}$ and $\underline{\psi}_{j,0}$, and $\mathbf{1}_{i=j}$ is the indicator function which is equal to 1 when $i = j$ and zero otherwise. Keeping in mind (9) (or alternatively what amounts to the same thing (2)), the CF reads

$$\phi_{y_1}(z) = \int \exp\{\iota z' y_1\} p(c_0) p(B_0) p(\omega_1^c, \omega_1^B) p(\psi_0) p(u_1) p(\varepsilon_1) dc_0 dB_0 d\omega_1^c d\omega_1^B d\psi_0 du_1 d\varepsilon_1$$

where

$$y_1 = c_0 + x_1 B_1 + \Psi_1 \varepsilon_1 + \omega_1^c = c_0 + x_1 B_0 + [\mathbf{I}_m : x_1] [\omega_1^c \omega_1^B]' + [\psi_{1,1} \psi_{2,1} \dots \psi_{m,1}] \varepsilon_1$$

Due to independence assumptions we get

$$\phi_{y_1}(z) = \phi_{c_0}(z) \cdot \phi_{B_0}(x_1' z) \cdot \phi_{[\omega_1^c \omega_1^B]'}([\mathbf{I}_m : x_1]' z) \cdot \phi_{\psi_0, u_1, \varepsilon_1}(z^*)$$

where $\phi_{\psi_0, u_1, \varepsilon_1}(z^*) = \int \exp\{\iota z' [\psi_{1,1} \psi_{2,1} \dots \psi_{m,1}] \varepsilon_1\} p(\psi_0) p(u_1) p(\varepsilon_1) d\psi_0 du_1 d\varepsilon_1$, and by assumptions (6) and (7)

$$\phi_{c_0}(z) = \exp\{\iota z' \underline{c}_0 - \frac{1}{2} z' \underline{V}_{c_0} z\}; \quad \phi_{B_0}(x_1' z) = \exp\{\iota z' x_1 \underline{B}_0 - \frac{1}{2} z' x_1 \underline{V}_{B_0} x_1' z\};$$

$$\phi_{[\omega_1^c \omega_1^B]'}([\mathbf{I}_m : x_1]' z) = \exp\{-\frac{1}{2} z' [\mathbf{I}_m : x_1] \Omega [\mathbf{I}_m : x_1]' z\}$$

Now since

$$[\psi_{1,1} \psi_{2,1} \dots \psi_{m,1}] \varepsilon_1 = [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m] \psi_0 + \varepsilon_{1,1} u_{1,1} + \varepsilon_{2,1} u_{2,1} + \dots + \varepsilon_{m,1} u_{m,1}$$

$$\text{Using } \int \exp\{\iota z' [\varepsilon_{1,1} u_{1,1} + \varepsilon_{2,1} u_{2,1} + \dots + \varepsilon_{m,1} u_{m,1}] p(u_1) du_1 = \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varepsilon_{i,1} \varepsilon_{j,1} z' \Sigma_{ij} z\}$$

$$\text{and } \int \exp\{\iota z' [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m] \psi_0\} p(\psi_0) d\psi_0 =$$

$$= \exp\{\iota z' [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m] \underline{\psi}_0 - \frac{1}{2} z' [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m] \underline{V}_{\psi_0} [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m]' z\}$$

and noting that

$$z' [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m] \underline{V}_{\psi_0} [\varepsilon_{1,1} \mathbf{I}_m : \varepsilon_{2,1} \mathbf{I}_m : \dots : \varepsilon_{m,1} \mathbf{I}_m]' z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varepsilon_{i,1} \varepsilon_{j,1} z' (\underline{V}_{\psi_0})_{ij} z, \text{ we get}$$

$$\phi_{\psi_0, u_1, \varepsilon_1}(z^*) = \int \exp\{\iota z' \sum_{i=1}^m \varepsilon_{i,1} \underline{\psi}_{i,0} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varepsilon_{i,1} \varepsilon_{j,1} z' [\Sigma_{ij} + (\underline{V}_{\psi_0})_{ij}] z\} p(\varepsilon_1) d\varepsilon_1$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}m} \int \exp\{\iota z' \sum_{i=1}^m \varepsilon_{i,1} \underline{\psi}_{i,0} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varepsilon_{i,1} \varepsilon_{j,1} (z' [\Sigma_{ij} + (\underline{V}_{\psi_0})_{ij}] z + \mathbf{1}_{i=j})\} d\varepsilon_1$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}m} \int \exp\{\iota z' [\psi_{1,0} \psi_{2,0} \dots \psi_{m,0}] \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1' Q \varepsilon_1\} d\varepsilon_1$$

$$= \det(Q)^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}m} \det(Q)^{\frac{1}{2}} \int \exp\{\iota z' \underline{\Psi}_0 \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1' Q \varepsilon_1\} d\varepsilon_1 = \det(Q)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} z' \underline{\Psi}_0 Q^{-1} \underline{\Psi}_0' z\}$$

$$\text{where } Q = \begin{bmatrix} 1 + z'[\Sigma_{11} + (V_{i_0})_{11}]z & z'[\Sigma_{12} + (V_{i_0})_{12}]z & \dots & z'[\Sigma_{1m} + (V_{i_0})_{1m}]z \\ z'[\Sigma_{21} + (V_{i_0})_{21}]z & 1 + z'[\Sigma_{22} + (V_{i_0})_{22}]z & \dots & z'[\Sigma_{2m} + (V_{i_0})_{2m}]z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z'[\Sigma_{m1} + (V_{i_0})_{m1}]z & z'[\Sigma_{m2} + (V_{i_0})_{m2}]z & \dots & 1 + z'[\Sigma_{mm} + (V_{i_0})_{mm}]z \end{bmatrix}$$

Thus ultimately $\phi_{y_1}(z) = \exp\{z'(\underline{c}_0 + x_1\underline{B}_0) - \frac{1}{2}z'(V_{c_0} + x_1V_{B_0}x_1' + [I_m : x_1]\Omega[I_m : x_1]')z\} \cdot \det(Q)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}z'\underline{\Psi}_0Q^{-1}\underline{\Psi}_0'z\}$.

Appendix 2 (proof of Theorem 1)

Assuming that Σ and V_{i_0} are block diagonal (so as Σ_{ij} and $(V_{i_0})_{ij}$ are equal to 0 for all $i \neq j$), Q as defined in proposition 1 is diagonal matrix. Let us put $z^{*'} = z'\underline{\Psi}_0$. Assuming $\underline{\Psi}_0$ is nonsingular, correspondence between z^* and z is 1-1. With abuse to notation let us write $z^* = z$. Then the characteristic function (CF) from proposition 1 reads

$$\phi_{y_1}(z) = \exp\{z'z'\underline{\Psi}_0^{-1}(\underline{c}_0 + x_1\underline{B}_0) - \frac{1}{2}z'\underline{\Psi}_0^{-1}(V_{c_0} + x_1V_{B_0}x_1' + [I_m : x_1]\Omega[I_m : x_1]')\underline{\Psi}_0^{-1}z\} \cdot \prod_{i=1}^m (1 + z'\underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{ii} + (V_{i_0})_{ii}]\underline{\Psi}_0^{-1}z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m z_i^2(1 + z'\underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{ii} + (V_{i_0})_{ii}]\underline{\Psi}_0^{-1}z)^{-1}\}$$

Expanding the log of $\phi_{y_1}(z)$ for sufficiently small $|z|$, we get the polynomial in z . Let us write explicitly elements of $z \in \mathbb{R}^m$ as $z = (z_1, \dots, z_m)'$. Then multiplying out each term in the expansion, we can derive coefficients of $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_m^{\alpha_m}$ (i.e. monomial) such that $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k$, where k denotes the degree of the underlying monomial and $k = 1, 2, 3, 4, \dots$. Each coefficient of $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_m^{\alpha_m}$ will be a function of model parameters (and known constants). Equality of two CF's is equivalent to equality of their coefficients of each corresponding $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_m^{\alpha_m}$. We note that due to model structure, coefficients of odd degree monomials, except the first one, are identically equal to zero.

Our proof strategy will be as follows. We give fairly detailed proof for two dimensional case i.e. $m = 2$, then we sketch the proof for larger dimensions. So let us assume $m = 2$. Let us put $\Lambda = \underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{11} + (V_{i_0})_{11}]\underline{\Psi}_0^{-1}$ and $\Gamma = \underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{22} + (V_{i_0})_{22}]\underline{\Psi}_0^{-1}$. Since $\underline{\Psi}_0$ is nonsingular $\Lambda = \underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{11} + (V_{i_0})_{11}]\underline{\Psi}_0^{-1} = \underline{\Psi}_0^{-1}[\bar{\Sigma}_{11} + (V_{i_0})_{11}]\underline{\Psi}_0^{-1} = \bar{\Lambda}$ iff $\Sigma_{11} = \bar{\Sigma}_{11}$. Analogous statement holds for Γ i.e. $\Gamma = \bar{\Gamma}$ iff $\Sigma_{22} = \bar{\Sigma}_{22}$. Hence w.l.o.g. we can work with Λ and Γ since identifiability of the latter is equivalent to identifiability of Σ_{11} and Σ_{22} . Let us denote the (i, j) entry in Λ (Γ) as λ_{ij} (γ_{ij}). Let us group terms in the expansion of log CF according to their degree. Hence

2-nd degree terms:

$$-\frac{1}{2}z'[\underline{\Psi}_0^{-1}(V_{c_0} + x_1V_{B_0}x_1' + [I_2 : x_1]\Omega[I_2 : x_1]')\underline{\Psi}_0^{-1} + \Lambda + \Gamma + I_2]z$$

4-th degree terms

$$\frac{1}{4}(z'\Lambda z)^2 + \frac{1}{4}(z'\Gamma z)^2 + \frac{1}{2}z_1^2 z' \Lambda z + \frac{1}{2}z_2^2 z' \Gamma z$$

6-th degree terms

$$-\frac{1}{6}(z'\Lambda z)^3 - \frac{1}{6}(z'\Gamma z)^3 - \frac{1}{2}z_1^2(z'\Lambda z)^2 - \frac{1}{2}z_2^2(z'\Gamma z)^2$$

8-th degree terms

$$\frac{1}{8}(z'\Lambda z)^4 + \frac{1}{8}(z'\Gamma z)^4 + \frac{1}{2}z_1^2(z'\Lambda z)^3 + \frac{1}{2}z_2^2(z'\Gamma z)^3$$

12-th degree terms

$$\frac{1}{12}(z'\Lambda z)^6 + \frac{1}{12}(z'\Gamma z)^6 + \frac{1}{2}z_1^2(z'\Lambda z)^5 + \frac{1}{2}z_2^2(z'\Gamma z)^5$$

w.l.o.g. we can multiply the 4-th degree terms by 4, 6-th degree terms by -6 , the 8-th degree terms by 8 and the 12-th degree terms by 12. As a result we derive coefficients of (selected) monomials:

$$\lambda_{11}^2 + \gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11} \text{ (coefficient of } z_1^4),$$

$$4\lambda_{11}\lambda_{12} + 4\lambda_{12} + 4\gamma_{11}\gamma_{12} \text{ (coefficient of } z_1^3z_2),$$

$$2\lambda_{11}\lambda_{22} + 4\lambda_{12}^2 + 2\lambda_{22} + 2\gamma_{11}\gamma_{22} + 4\gamma_{12}^2 + 2\gamma_{11} \text{ (coefficient of } z_1^2z_2^2),$$

$$4\lambda_{12}\lambda_{22} + 4\gamma_{12}\gamma_{22} + 4\gamma_{12} \text{ (coefficient of } z_1z_2^3), \lambda_{22}^2 + \gamma_{22}^2 + 2\gamma_{22} \text{ (coefficient of } z_2^4),$$

$$\lambda_{11}^3 + \gamma_{11}^3 + 3\lambda_{11}^2 \text{ (coefficient of } z_1^6), \lambda_{22}^3 + \gamma_{22}^3 + 3\gamma_{22}^2 \text{ (coefficient of } z_2^6),$$

$$\lambda_{11}^4 + \gamma_{11}^4 + 4\lambda_{11}^3 \text{ (coefficient of } z_1^8), \lambda_{22}^4 + \gamma_{22}^4 + 4\gamma_{22}^3 \text{ (coefficient of } z_2^8)$$

$$\lambda_{11}^6 + \gamma_{11}^6 + 6\lambda_{11}^5 \text{ (coefficient of } z_1^{12}), \lambda_{22}^6 + \gamma_{22}^6 + 6\gamma_{22}^5 \text{ (coefficient of } z_2^{12})$$

Suppose that the same CF is obtained with $\theta = (\Sigma, \Omega) \neq \theta = (\bar{\Sigma}, \bar{\Omega})$. It implies

$$\lambda_{11}^2 + \gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 + \bar{\gamma}_{11}^2 + 2\bar{\lambda}_{11} \tag{A1}$$

$$\lambda_{11}^4 + \gamma_{11}^4 + 4\lambda_{11}^3 = \bar{\lambda}_{11}^4 + \bar{\gamma}_{11}^4 + 4\bar{\lambda}_{11}^3 \tag{A2}$$

Substituting for $\bar{\gamma}_{11}^4$ from (A1) into (A2) we get the quartic equation in one unknown $\bar{\lambda}_{11}$ i.e.

$$\bar{\lambda}_{11}^4 + 4\bar{\lambda}_{11}^3 + (2 - \lambda_{11}^2 - \gamma_{11}^2 - 2\lambda_{11})\bar{\lambda}_{11}^2 - 2(\lambda_{11}^2 + \gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11})\bar{\lambda}_{11} + \lambda_{11}^2\gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11}\gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11}^2 = 0$$

since we know that one root of polynomial is $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$ we can factorize it to get

$$(\lambda_{11} - \bar{\lambda}_{11})(-\bar{\lambda}_{11}^3 - (4 + \lambda_{11})\bar{\lambda}_{11}^2 + (\gamma_{11}^2 - 2\lambda_{11} - 2)\bar{\lambda}_{11} + \lambda_{11}\gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11} + 2\gamma_{11}^2) = 0$$

On the other hand we have another set of equations

$$\lambda_{11}^3 + \gamma_{11}^3 + 3\lambda_{11}^2 = \bar{\lambda}_{11}^3 + \bar{\gamma}_{11}^3 + 3\bar{\lambda}_{11}^2 \tag{A3}$$

$$\lambda_{11}^6 + \gamma_{11}^6 + 6\lambda_{11}^5 = \bar{\lambda}_{11}^6 + \bar{\gamma}_{11}^6 + 6\bar{\lambda}_{11}^5 \tag{A4}$$

Substituting for $\bar{\gamma}_{11}^6$ from (A3) into (A4) we get the polynomial equation in one unknown $\bar{\lambda}_{11}$ i.e.

$$2\bar{\lambda}_{11}^6 + 12\bar{\lambda}_{11}^5 + 9\bar{\lambda}_{11}^4 - 2(\lambda_{11}^3 + \gamma_{11}^3 + 3\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11}^3 - 6(\lambda_{11}^3 + \gamma_{11}^3 + 3\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11}^2 + 2\lambda_{11}^3\gamma_{11}^3 + 6\lambda_{11}^2\gamma_{11}^3 + 9\lambda_{11}^4 = 0$$

since we know that one root of this polynomial is $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$ we can factorize it to get

$$(\lambda_{11} - \bar{\lambda}_{11})(-2\bar{\lambda}_{11}^5 - (12 + 2\lambda_{11})\bar{\lambda}_{11}^4 - (9 + 12\lambda_{11} + 2\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11}^3 + (2\gamma_{11}^3 - 9\lambda_{11} - 6\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11}^2 + (6\gamma_{11}^3 + 2\lambda_{11}\gamma_{11}^3 + 9\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11} + 9\lambda_{11}^3 + 2\lambda_{11}^2\gamma_{11}^3 + 6\lambda_{11}\gamma_{11}^3) = 0$$

Now the whole problem boils down to the question whether two polynomials in one variable i.e.

$$f(\bar{\lambda}_{11}) = -\bar{\lambda}_{11}^3 - (4 + \lambda_{11})\bar{\lambda}_{11}^2 + (\gamma_{11}^2 - 2\lambda_{11} - 2)\bar{\lambda}_{11} + \lambda_{11}\gamma_{11}^2 + 2\lambda_{11} + 2\gamma_{11}^2$$

$$g(\bar{\lambda}_{11}) = -2\bar{\lambda}_{11}^5 - (12 + 2\lambda_{11})\bar{\lambda}_{11}^4 - (9 + 12\lambda_{11} + 2\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11}^3 + (2\gamma_{11}^3 - 9\lambda_{11} - 6\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11}^2 + (6\gamma_{11}^3 + 2\lambda_{11}\gamma_{11}^3 + 9\lambda_{11}^2)\bar{\lambda}_{11} + 9\lambda_{11}^3 + 2\lambda_{11}^2\gamma_{11}^3 + 6\lambda_{11}\gamma_{11}^3$$

possess a common root. This is the case if and only if their resultant is equal to zero, see e.g. Cox et al. (1997) for definition and properties of resultants. In our case the resultant is just the determinant of the 8×8 matrix whose entries are either zeros or coefficients of two univariate polynomials $f(\bar{\lambda}_{11})$ and $g(\bar{\lambda}_{11})$. It is easy to check that our resultant is not identically equal to zero. Hence for almost all [Lebesgue] λ_{11} and γ_{11} , there will be the only one solution $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$. This implies $\bar{\gamma}_{11}^2 = \gamma_{11}^2$ and since Γ is positive definite we also deduce $\bar{\gamma}_{11} = \gamma_{11}$. The analogous analysis applied in the context of $\bar{\gamma}_{22}$ (taking into account coefficients of z_2^4 and z_2^8) leads to the conclusion that for almost all [Lebesgue] λ_{22} and γ_{22} , the only solution is $\bar{\gamma}_{22} = \gamma_{22}$, which also implies $\bar{\lambda}_{22} = \lambda_{22}$. But then using coefficients of $z_1^3 z_2$ and $z_1 z_2^3$, we have

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} + 1 & \gamma_{11} \\ \lambda_{22} & \gamma_{22} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{12} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{12} + \gamma_{11}\gamma_{12} \\ \lambda_{12}\lambda_{22} + \gamma_{12}\gamma_{22} + \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Provided that $(\lambda_{11} + 1)(\gamma_{22} + 1) - \gamma_{11}\lambda_{22} \neq 0$, the only solution will be $\bar{\lambda}_{12} = \lambda_{12}$ and $\bar{\gamma}_{12} = \gamma_{12}$. Hence we showed that Σ is globally identified almost everywhere.

The proof in the case $m > 2$ is analogous but necessarily involves more tedious algebra and requires some basic tools from computational algebraic geometry. Hence we give only its sketch for $m = 3$. Assume $m = 3$. Suppose that in addition to Λ and Γ we also define $\Pi = \underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{33} + (V_{\neq 0})_{33}]\underline{\Psi}_0^{-1}$, with generic entries denoted as π_{ij} . Then the proof goes as follows. First we prove identification of diagonal elements in Λ, Γ and Π . Let us confine to the first diagonal elements in Λ, Γ and Π . To this end looking at the expansion of log CF, we have the general equation coming from coefficient of z_1^{2k}

$$\lambda_{11}^k + \gamma_{11}^k + \pi_{11}^k + k\lambda_{11}^{k-1} = \bar{\lambda}_{11}^k + \bar{\gamma}_{11}^k + \bar{\pi}_{11}^k + k\bar{\lambda}_{11}^{k-1}; \text{ for } k = 2, 3, 4, \dots \tag{A5}$$

Let us refer to (A5) for fixed k as $GE(k)$. First we have to be sure that there is a finite number of solutions to (A5). Fortunately this is a quite standard problem (see e.g. theorem 6 in Cox et al. (1997), p. 230). We checked this for the subset of the first three equations (in three unknowns) i.e. $GE(2)$, $GE(3)$ and $GE(4)$, using SINGULAR (a computer algebra system for polynomial computations), by computing the dimension of the underlying Gröbner basis. The conclusion is that there is a finite number of $\bar{\lambda}_{11}, \bar{\gamma}_{11}, \bar{\pi}_{11}$ that fulfill general equation (A5). In order to make the problem manageable we eliminate $\bar{\pi}_{11}$ from $GE(k)$. We can substitute for $\bar{\pi}_{11}$ from $GE(2)$ into $GE(4)$, from $GE(4)$ into $GE(8)$ and from $GE(8)$ into $GE(16)$.⁸ As a result we have 3 polynomials of degree 4, 8 and 16 in two unknowns $\bar{\lambda}_{11}, \bar{\gamma}_{11}$. Then using “hiding $\bar{\lambda}_{11}$ in the coefficients” technique i.e. treating $\bar{\lambda}_{11}$ as given, see e.g. Dickenstein and Emiris (2005), pp. 21–22, we computed two resultants with respect to $\bar{\gamma}_{11}$: one using polynomials of degree 4, 8 and the other one using polynomials of degree 8, 16. Hence we obtained two univariate polynomials in $\bar{\lambda}_{11}$. Since we know that all solutions of the original $GE(k)$ are among the solutions of the latter two polynomials we know that $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$ is one solution. Hence we factorized these two polynomials to get rid of

⁸ Evidently we could work with lower dimensional polynomials, but it turns out that such a substitution pattern allows for rapid (symbolic) computation, whereas with other substitution choices we could get stuck ...

the factor $(\bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11})$. Lastly computing (symbolic) resultant of two univariate polynomials in $\bar{\lambda}_{11}$ (leaving aside the factor $(\bar{\lambda}_{11} - \lambda_{11})$), it turns out that this is not identically equal to 0. Hence there are no other common roots. So we conclude that for almost all $\lambda_{11}, \gamma_{11}, \pi_{11}$, the only solution of $GE(k)$ with respect to $\bar{\lambda}_{11}$ is $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$. Given this fact we arrive at the general equation $\gamma_{11}^k + \pi_{11}^k = \bar{\gamma}_{11}^k + \bar{\pi}_{11}^k$, $k = 2, 3, 4, \dots$. Clearly due to symmetry, provided that $\gamma_{11} \neq \pi_{11}$ the latter possess exactly two solutions i.e. $(\bar{\gamma}_{11}, \bar{\pi}_{11}) = (\gamma_{11}, \pi_{11})$ and $(\bar{\gamma}_{11}, \bar{\pi}_{11}) = (\pi_{11}, \gamma_{11})$. Imposing the inequality restrictions e.g. $\bar{\gamma}_{11} > \bar{\pi}_{11}$ and $\gamma_{11} > \pi_{11}$ would suffice to avoid the identification (permutation) problem. Hence we must constraint the support in our model to $\gamma_{11} > \pi_{11}$. The same analysis may be applied to other diagonal elements in Λ, Γ and Π . In particular the counterpart general equation for the second diagonal elements would be (coming from the coefficient of z_2^{2k})

$$\lambda_{22}^k + \gamma_{22}^k + \pi_{22}^k + k\gamma_{22}^{k-1} = \bar{\lambda}_{22}^k + \bar{\gamma}_{22}^k + \bar{\pi}_{22}^k + k\bar{\gamma}_{22}^{k-1}; \text{ for } k = 2, 3, 4, \dots$$

Repeating all the above steps we can show that the only solution with respect to $\bar{\gamma}_{22}$ is $\bar{\gamma}_{22} = \gamma_{22}$. So by analogy, what we have to do to reach the complete identification for the second diagonal elements is to restrict the support so as $\lambda_{22} > \pi_{22}$ (in that case γ_{22} is identified without any further inequality restrictions). Lastly, for the third diagonal elements the general equation reads

$$\lambda_{33}^k + \gamma_{33}^k + \pi_{33}^k + k\pi_{33}^{k-1} = \bar{\lambda}_{33}^k + \bar{\gamma}_{33}^k + \bar{\pi}_{33}^k + k\bar{\pi}_{33}^{k-1}; \text{ for } k = 2, 3, 4, \dots$$

In this case the analogous restriction should be $\lambda_{33} > \gamma_{33}$ (now π_{33} is identified without any further inequality restrictions). Given that diagonal elements in Λ, Γ and Π are identified we can find among coefficients of $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}$ (of degree 4 and 6) sufficient number of equations that are linear in all non-diagonal elements of Λ, Γ and Π so as for almost all Σ they imply identification of all non-diagonal elements in Λ, Γ and Π . Lastly provided that Λ, Γ and Π are identified, taking into account the 2-nd degree terms from expansion of log CF, we can show that Ω is identified too. Proof for $m \geq 4$ may be given along the above lines since we face the same pattern of the general equation for all $m \geq 4$. For example when $m = 4$, denoting $\Upsilon = \underline{\Psi}_0^{-1}[\Sigma_{44} + (\underline{V}_{\lambda_0})_{44}]\underline{\Psi}_0'^{-1}$ with generic entries v_{ij} , it is easy to realize that the coefficient of z_1^{2k} lead to the following general equation

$$\lambda_{11}^k + \gamma_{11}^k + \pi_{11}^k + v_{11}^k + k\lambda_{11}^{k-1} = \bar{\lambda}_{11}^k + \bar{\gamma}_{11}^k + \bar{\pi}_{11}^k + \bar{v}_{11}^k + k\bar{\lambda}_{11}^{k-1}; \text{ for } k = 2, 3, 4, \dots$$

Since it may be shown that the only solution with respect to $\bar{\lambda}_{11}$ is $\bar{\lambda}_{11} = \lambda_{11}$, the remaining variables are identified up to permutation. Hence introducing inequality $\gamma_{11} > \pi_{11} > v_{11}$ is sufficient to attain the identification for first diagonal elements in Λ, Γ, Π and Υ . Then taking into account the coefficient of z_2^{2k} one has

$$\lambda_{22}^k + \gamma_{22}^k + \pi_{22}^k + v_{22}^k + k\gamma_{22}^{k-1} = \bar{\lambda}_{22}^k + \bar{\gamma}_{22}^k + \bar{\pi}_{22}^k + \bar{v}_{22}^k + k\bar{\gamma}_{22}^{k-1}; \text{ for } k = 2, 3, 4, \dots$$

The constraint $\lambda_{22} > \pi_{22} > v_{22}$ is sufficient to attain the identification of the second diagonal elements in Λ, Γ, Π and Υ . Continuing in this fashion (collecting coefficients of z_3^{2k} and z_4^{2k}), provided that analogous inequalities hold, all diagonal elements in Λ, Γ, Π and Υ are globally identified. Given this fact, we can find among coefficients of $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4}$ (of degree 4 and 6) sufficient number of equations that are

linear in all non-diagonal elements of Λ, Γ, Π and Υ .⁹ Hence the latter are globally identified almost everywhere. The proof for $m > 4$ is analogous and goes straightforwardly with obvious modifications.

Appendix 2 (proof of Theorem 2)

First of all consider the second degree terms from the CF expansion. Assume there is $\bar{\Omega}, \bar{\Sigma} \neq \Omega, \Sigma$ that results in the same CF. Using the fact that Σ is identified (so that $\Sigma = \bar{\Sigma}$), it follows

$$\begin{aligned} & z'[\underline{\Psi}_0^{-1}(V_{c_0} + x_1 V_{B_0} x_1' + [I_m : x_1] \Omega [I_m : x_1]') \underline{\Psi}_0'^{-1}] z \\ &= z'[\underline{\Psi}_0^{-1}(V_{c_0} + x_1 V_{B_0} x_1' + [I_m : x_1] \bar{\Omega} [I_m : x_1]') \underline{\Psi}_0'^{-1}] z \end{aligned} \quad (A5)$$

Since by the nature of the CF, equality must be true for all $z \in \mathbb{R}^m$, and expressions in square brackets are symmetric matrices, it implies $[I_m : x_1] \Omega [I_m : x_1]' = [I_m : x_1] \bar{\Omega} [I_m : x_1]'$ or $\Omega_c + x_1 \Omega'_{cB} + \Omega_{cB} x_1' + x_1 \Omega_B x_1' = \bar{\Omega}_c + x_1 \bar{\Omega}'_{cB} + \bar{\Omega}_{cB} x_1' + x_1 \bar{\Omega}_B x_1'$. Let us use our restriction i.e. $\Omega_{cB} = 0$. Then we get

$$(y_0' \dots y_{-p+1}') ((\Omega_B)_{ij} - (\bar{\Omega}_B)_{ij}) (y_0' \dots y_{-p+1}')' = \Omega_{c,ij} - \bar{\Omega}_{c,ij}$$

for all $i, j = 1, \dots, m$, where $(\Omega_B)_{ij}$ ($(\bar{\Omega}_B)_{ij}$) denotes the (i, j) block of Ω_B ($\bar{\Omega}_B$) of equal size $mp \times mp$, and $\Omega_{c,ij}$ ($\bar{\Omega}_{c,ij}$) is the (i, j) element of Ω_c ($\bar{\Omega}_c$). Suppose that Ω_B is "purely" diagonal matrix i.e. $(\Omega_B)_{ij} = 0$, for each $i \neq j$ and $(\Omega_B)_{ii}$ is diagonal. Then $\Omega_{c,ij} = \bar{\Omega}_{c,ij}$ for each $i \neq j$, so that off-diagonal elements in Ω_c are uniformly globally identified. We should emphasize that in contrast to the most of results to follow, this holds for all m and p . Hence the remaining parameters for which we want

to establish identification are diagonal elements in Ω_c and Ω_B , to be denoted as $\sigma_{c,i}^2; i = 1, \dots, m$, and $\sigma_{B,i}^2; i = 1, \dots, 2m^2$, respectively. To this end we exploit the basic fact that moments of the underlying distribution are always uniformly globally identified. So even if we failed to obtain the CF for more than one observation we do can find first and second moments for a few first observations. In particular for every $m \leq 5$ (and keeping $p = 2$) we obtained analytically the following moments: $E(y_2 | \theta, y^0)$, $E(y_3 | \theta, y^0)$, $E(y_4 | \theta, y^0)$, $E(y_2 y_1' | \theta, y^0)$, $E(y_3 y_1' | \theta, y^0)$, $E(y_4 y_1' | \theta, y^0)$, $E(y_2 y_2' | \theta, y^0)$. This gives rise to $3m + 3m^2 + \frac{1}{2}m(m+1)$ equations in $m + 2m^2$ variables. In fact many of them are linear in $\sigma_{c,i}^2$'s and $\sigma_{B,i}^2$'s (unfortunately some of them are linearly dependent), and if not, they are the second degree polynomials (in $\sigma_{c,i}^2, \sigma_{B,i}^2$) only.¹⁰ It turns out that even first two moments involving very first observations may be extremely involved and obtaining them by hand would require very painstaking

⁹ In general, we can collect equations linear in non-diagonal elements among coefficients of higher degree terms than 6, if needed in case $m > 4$.

¹⁰ This explains why establishing identification for general Ω (or even Ω_B) is intrinsically very difficult: we would need many more (second) moments to obtain, which due to very large number of monomials is very time-consuming even for specialized software (like SINGULAR). For example to obtain $E(y_4 y_1' | \theta, y_0)$ we needed about 2 days. The point is that even if we could obtain them, the degree of polynomials in unknown elements of Ω (or Ω_B) rises. This makes the underlying problem out of reach for computer algebra methods.

work. Hence we used SINGULAR, which is a mathematical package that deals with polynomials very swiftly (in a symbolic manner). Doing so we exploited several facts (to make it relatively manageable). First, the terms involving only moments of c_0, B_0 and initial observations may be skipped (since they cancel out in the identification condition, namely that two parameter points $\{\sigma_{c,i}^2\}_{i=1}^m, \{\sigma_{B,i}^2\}_{i=1}^{2m^2} \neq \{\bar{\sigma}_{c,i}^2\}_{i=1}^m, \{\bar{\sigma}_{B,i}^2\}_{i=1}^{2m^2}$ lead to the same distribution moment). Second, by deriving $E(y_2 | \theta, y^0)$ analytically we get the condition (note that we used the first fact)

$$\begin{bmatrix} y_0'[\sigma_{B,1}^2 0 \dots 0]' \\ y_0'[0 \sigma_{B,mp+2}^2 0 \dots 0]' \\ \vdots \\ y_0'[00 \dots 0 \sigma_{B,mp(m-1)+m}^2]' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0'[\bar{\sigma}_{B,1}^2 0 \dots 0]' \\ y_0'[0 \bar{\sigma}_{B,mp+2}^2 0 \dots 0]' \\ \vdots \\ y_0'[00 \dots 0 \bar{\sigma}_{B,mp(m-1)+m}^2]' \end{bmatrix}$$

Hence provided that y_0 does not contain zero, $\sigma_{B,1}^2, \sigma_{B,mp+2}^2, \dots, \sigma_{B,mp(m-1)+m}^2$ are uniformly globally identified (note that it holds for all m, p). For example keeping $p = 2$, when $m = 3$, $\sigma_{B,1}^2, \sigma_{B,8}^2, \sigma_{B,15}^2$ are identified, whereas for $m = 5$, $\sigma_{B,1}^2, \sigma_{B,12}^2, \sigma_{B,23}^2, \sigma_{B,34}^2, \sigma_{B,45}^2$ are identified. Third, Σ and off-diagonal elements in Ω_c are globally identified. Fourth, when applying expectation operator for data, we used assumptions (6) concerning disturbances. Among other things they imply that terms involving odd order moments of the disturbances are identically zeros. In addition, using independence of disturbances laid out in (6) to obtain data moments, is crucial.

Appendix 3 (Kalman filters)

Our sampling procedures entail state-space models with correlated measurement and transition equation noise. Moreover two timing versions for transition equations will be used and each of them requires different Kalman filter recursions, see e.g. Harvey (1989), pp. 112–113. Lastly we will show how to cope with correlated measurement and transition equation noise when, in addition, the state variable is subject to linear restrictions.

Correlated Kalman filter 1 (CKF1)

$$\begin{aligned} y_t^* &= d_t + H_t \alpha_t + e_t; & \text{for } t = 1, \dots, T \\ \alpha_t &= k + G \alpha_{t-1} + v_t \\ e_t &\sim i.i.d. N(0, \begin{bmatrix} R_t & S_t \\ S_t' & Q \end{bmatrix}) \end{aligned} \tag{A6}$$

Let us denote $\hat{\alpha}_{t|k} = E[\alpha_t | y_1^*, \dots, y_k^*]$ and $P_{t|k} = E[(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|k})(\alpha_t - \hat{\alpha}_{t|k})' | y_1^*, \dots, y_k^*]$. Assuming $\alpha_0 | y_0^* \sim N(\hat{\alpha}_{0|0}, P_{0|0})$, α_0 is independent of $(e_i' v_i)'$, one gets $\alpha_t | y_1^*, \dots, y_t^* \sim N(\hat{\alpha}_{t|t}, P_{t|t})$, where updating goes through two steps

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t|t-1} &= k + G\hat{\alpha}_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= GP_{t-1|t-1}G' + Q\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t|t} &= \hat{\alpha}_{t|t-1} + (P_{t|t-1}H_t' + S_t')(H_tP_{t|t-1}H_t' + R_t + H_tS_t' + S_tH_t')^{-1}(y_t^* - d_t - H_t\hat{\alpha}_{t|t-1}) \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - (P_{t|t-1}H_t' + S_t')(H_tP_{t|t-1}H_t' + R_t + H_tS_t' + S_tH_t')^{-1}(H_tP_{t|t-1} + S_t)\end{aligned}$$

Correlated Kalman filter 2 (CKF2)

$$\begin{aligned}y_t^* &= d_t + H_t\alpha_t + e_t; & \text{for } t = 1, \dots, T \\ \alpha_{t+1} &= k + G\alpha_t + v_t \\ \begin{pmatrix} e_t \\ v_t \end{pmatrix} &\sim i.i.d. N(0, \begin{bmatrix} R_t & S_t \\ S_t' & Q \end{bmatrix})\end{aligned}\tag{A7}$$

Defining $\hat{\alpha}_{t|k}$ and $P_{t|k}$ as in CKF1 setup and assuming $\alpha_1 | y_0^* \sim N(\hat{\alpha}_{1|0}, P_{1|0})$, α_1 is independent of $(e_t', v_t')'$, one has $\alpha_{t+1} | y_1^*, \dots, y_t^* \sim N(\hat{\alpha}_{t+1|t}, P_{t+1|t})$, where updating consists of the following formulas

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{t+1|t} &= k + G\hat{\alpha}_{t|t-1} + K_t(y_t^* - d_t - H_t\hat{\alpha}_{t|t-1}) \\ P_{t+1|t} &= GP_{t|t-1}G' - K_t(H_tP_{t|t-1}G' + S_t) + Q\end{aligned}$$

where $K_t = (GP_{t|t-1}H_t' + S_t')(H_tP_{t|t-1}H_t' + R_t)^{-1}$

CKF2 under linear restrictions imposed on $\{\alpha_t\}_{t=1}^{T+1}$

Assume that $\{\alpha_t\}_{t=1}^{T+1}$ is subject to linear restrictions. They may be either homogenous restrictions (e.g. some elements or linear functions of some elements in $\{\alpha_t\}_{t=1}^{T+1}$ are identically equal to zero) or non-homogenous restrictions (e.g. some elements in $\{\alpha_t\}_{t=1}^{T+1}$ are identically equal to 1's). Let us denote the dimension of α_t as p . Let Φ be an $s \times p$ known matrix of full row rank and ϕ be an $s \times 1$ vector such that all restrictions may be written as $\Phi\alpha_1 = \Phi\alpha_2 = \dots = \Phi\alpha_{T+1} = \phi$. Note that in case of homogenous restrictions ϕ is a zero vector (otherwise it is not). Since (A7) implies the joint Normal distribution for $(y_1^*, \dots, y_T^*, \alpha_1, \dots, \alpha_{T+1})$, it may be factorized as $p(\alpha_1 | y_0^*) \cdot \prod_{t=1}^T p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t)$ (implicit pdf's may be just read off from (A7)). Let us change variables according to the transformation

$$\begin{bmatrix} \Phi^\perp \\ \Phi \end{bmatrix} \alpha_t = \begin{bmatrix} \alpha_t^* \\ r_t \end{bmatrix}; \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, T + 1\tag{A8}$$

where Φ^\perp is any $(p - s) \times p$ fixed, full row rank matrix such that $\Phi^\perp(\Phi^\perp)^\perp = I_{p-s}$ and $\Phi^\perp\Phi = 0$,

with the underlying Jacobian $|\Phi\Phi'|^{-\frac{1}{2}(T+1)}$. Hence we arrive at the joint distribution $|\Phi\Phi'|^{-\frac{1}{2}(T+1)} p(\alpha_1^*, r_1 | y_0^*) \cdot \prod_{t=1}^T p(y_t^*, \alpha_{t+1}^*, r_{t+1} | \alpha_t^*, r_t)$, which is still Normal. All we have to do is to obtain $p(\alpha_1^* | r_1, y_0^*)$ and $p(y_t^*, \alpha_{t+1}^* | \alpha_t^*, r_{t+1}, r_t)$, and put $r_1 = \dots = r_{T+1} = \phi$. As a result we will

arrive at the modified state–space (A7), where state variable is α_t^* and parameters are modified. But for such a modified state–space the basic recursions of CKF2 are valid. Having $\{\alpha_t^*\}_{t=1}^{T+1}$, we can retrieve

$\{\alpha_t\}_{t=1}^{T+1}$ exploiting a 1–1 correspondence $\alpha_t = (\Phi^\perp)'\alpha_t^* + \Phi'(\Phi\Phi')^{-1}\phi$. The latter follows since

$$\begin{bmatrix} \Phi^\perp \\ \Phi \end{bmatrix}^{-1} = [(\Phi^\perp)'\Phi'(\Phi\Phi')^{-1}]. \text{ In particular, the modified state–space reads}$$

$$\begin{aligned} y_t^* &= d_t^* + H_t^*\alpha_t^* + e_t^*; & \text{for } t = 1, \dots, T \\ \alpha_{t+1}^* &= k^* + G^*\alpha_t^* + v_t^* \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\begin{pmatrix} e_t^* \\ v_t^* \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d. } N(0, \begin{bmatrix} R_t^* & S_t^* \\ (S_t^*)' & Q^* \end{bmatrix}), \text{ where:}$$

$$\begin{aligned} d_t^* &= d_t + H_t\Phi'(\Phi\Phi')^{-1}\phi + S_t\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}(\phi - \Phi k - \Phi G\Phi'(\Phi\Phi')^{-1}\phi) \\ H_t^* &= H_t(\Phi^\perp)' - S_t\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}\Phi G(\Phi^\perp)' \\ k^* &= \Phi^\perp k + \Phi^\perp G\Phi'(\Phi\Phi')^{-1}\phi + \Phi^\perp Q\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}(\phi - \Phi k - \Phi G\Phi'(\Phi\Phi')^{-1}\phi) \\ G^* &= \Phi^\perp G(\Phi^\perp)' - \Phi^\perp Q\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}\Phi G(\Phi^\perp)' \\ R_t^* &= R_t - S_t\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}\Phi S_t' \\ S_t^* &= S_t(\Phi^\perp)' - S_t\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}\Phi Q(\Phi^\perp)' \\ Q^* &= \Phi^\perp Q(\Phi^\perp)' - \Phi^\perp Q\Phi'(\Phi Q\Phi')^{-1}\Phi Q(\Phi^\perp)' \end{aligned}$$

Appendix 4 (Gibbs Sampling)

Due to many sampling steps we chose the option to cast each encountered state–space model either in terms of CKF1 or CKF2 and adopt one universal notation rather than to introduce the specific notation (e.g. y_t^* or H_t from one Gibbs sampling step is usually not the same “object” as used in the other Gibbs sampling step, so please be careful when reading). Whenever the sampling step will use the correlated Kalman filter setup we will signify it at the very beginning, writing CKF1 or CKF2.

1) Sampling from the full conditional posterior of B_0, B^T (CKF1)

Note that though (9)–(5) conforms directly to CKF1, (10)–(5) doesn't. However inserting $B_{t-1} = B_t - \omega_t^B$ into (10) we get

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + \Psi_t\varepsilon_t - \Psi_{t-1}\varepsilon_{t-1} + (x_t - x_{t-1})B_t + \omega_t^c + x_{t-1}\omega_t^B \\ B_t &= B_{t-1} + \omega_t^B \end{aligned}$$

Hence we arrive at the CKF1 setup, by putting:

$$y_1^* = y_1 - c_0 - \Psi_1\varepsilon_1 \text{ and } y_t^* = y_t - y_{t-1} - \Psi_t\varepsilon_t + \Psi_{t-1}\varepsilon_{t-1} \text{ for } t = 2, \dots, T$$

$$\alpha_t = B_t, d_t = 0, H_1 = x_1 \text{ and } H_t = x_t - x_{t-1} \text{ for } t = 2, \dots, T, k = 0, G = \mathbf{I}_{m^2p}; Q = \Omega_B$$

$$, \quad R_1 = \Omega_c \text{ and } R_t = [\mathbf{I}_m \vdots x_{t-1}] \Omega [\mathbf{I}_m \vdots x_{t-1}]' \quad \text{for } t = 2, \dots, T, \quad S_1 = \Omega_{cB} \quad \text{and}$$

$$S_t = [\mathbf{I}_m \vdots x_{t-1}] \Omega [0 \vdots \mathbf{I}_{m^2p}]' \text{ for } t = 2, \dots, T.$$

We can always decompose the joint (full conditional) posterior of α_0, α^T as¹¹

¹¹ Following the usual practice we include in the conditioning set only the parameters/variables which are drawn in the underlying Gibbs sampler step and the data (in our case “modified” data). However it should be understood that we draw from the full conditional posterior.

$$p(\alpha_0, \alpha^T \mid y_1^*, \dots, y_T^*) = p(\alpha_T \mid y_1^*, \dots, y_T^*) \cdot \prod_{t=0}^{T-1} p(\alpha_t \mid \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_T, y_1^*, \dots, y_T^*) \quad (\text{A10})$$

Further, due to Normality assumptions all the underlying distributions in (A10) are Normal. Unfortunately standard multi-move sampling formulas to sample the states (see e.g. Carter and Kohn (1994) or Frühwirth-Schnatter (1994)) are not valid due to correlation between state and measurement equation noises. Minor modification is needed. To this end it can be easily shown that

$$p(\alpha_t \mid \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_T, y_1^*, \dots, y_T^*) \propto p(y_{t+1}^*, \alpha_{t+1} \mid \alpha_t, y_1^*, \dots, y_t^*) p(\alpha_t \mid y_1^*, \dots, y_t^*)$$

where $p(\alpha_t \mid y_1^*, \dots, y_t^*)$ is the pdf of $N(\hat{\alpha}_{t|t}, P_{t|t})$. Since $p(\alpha_0 \mid y_0^*) \equiv N(\underline{B}_0, \underline{V}_{B_0})$, we start the Kalman recursion at $\hat{\alpha}_{0|0} = \underline{B}_0$ and $P_{0|0} = \underline{V}_{B_0}$. Note that $p(y_{t+1}^*, \alpha_{t+1} \mid \alpha_t, y_1^*, \dots, y_t^*)$ may be easily obtained inserting $\alpha_t = k + G\alpha_{t-1} + v_t$ into the measurement equation and by moving the system one period forward i.e.

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}^* \\ \alpha_{t+1} \end{bmatrix} \mid \alpha_t, y_1^*, \dots, y_t^* \sim N\left(\begin{bmatrix} H_{t+1} \\ \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \alpha_t, \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & H_{t+1} \\ 0 & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{t+1} & S_{t+1} \\ S'_{t+1} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ H'_{t+1} & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \right)$$

(in the present sampling step $d_t = 0$, $k = 0$, $G = \mathbf{I}_{m^2 p}$). Treating all terms that do not involve α_t as constants, we have

$$p(y_{t+1}^*, \alpha_{t+1} \mid \alpha_t, y_1^*, \dots, y_t^*) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)' \Delta_{\alpha_t}^{-1} (\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)\right\}$$

where $\Delta_{\alpha_t} = Q - S'_{t+1} R_{t+1}^{-1} S_{t+1}$ and $\tilde{\alpha}_t = \alpha_{t+1} - S'_{t+1} R_{t+1}^{-1} (y_{t+1}^* - H_{t+1} \alpha_{t+1})$.

Since $p(\alpha_t \mid \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_T, y_1^*, \dots, y_T^*)$ is a product of Normal distribution and a kernel of Normal pdf, it is still a pdf of Normal distribution. Specifically

$$p(\alpha_t \mid \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_T, y_1^*, \dots, y_T^*) \equiv N(\bar{\alpha}_t, \bar{V}_{\alpha_t})$$

where $\bar{V}_{\alpha_t} = (\Delta_{\alpha_t}^{-1} + P_{t|t}^{-1})^{-1}$ and $\bar{\alpha}_t = \bar{V}_{\alpha_t} (\Delta_{\alpha_t}^{-1} \tilde{\alpha}_t + P_{t|t}^{-1} \hat{\alpha}_{t|t})$

Summarizing, to sample from the full conditional posterior of B_0, B^T , we cast the underlying model within CKF1 setup and first draw $\alpha_T \equiv B_T$ from $N(\hat{\alpha}_{T|T}, P_{T|T})$, then draw sequentially $\alpha_t \equiv B_t$ from $N(\bar{\alpha}_t, \bar{V}_{\alpha_t})$ for $t = T - 1, \dots, 0$ (in a backward manner).

2) Sampling from the full conditional posterior of ψ_0, ψ^T (CKF2)

The underlying posterior is proportional to $p(\psi_0) \cdot \prod_{t=1}^T p(y_t, B_t) p(\psi_t \mid \psi_{t-1})$. Let us decompose (12) and (13) as $p(y_t, B_t) = p(y_t \mid B_t) p(B_t)$. It is easy to see that $p(B_t)$ does not involve Ψ^t , hence may be omitted. Further, let us decompose Ω_t as

$$\Omega_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & x_t \\ 0 & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 \\ x'_t & \mathbf{I}_{m^2 p} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Omega_{11,t} & \Omega_{12,t} \\ \Omega'_{12,t} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \text{ and define } \Omega_{1|2,t} = \Omega_{11,t} - \Omega_{12,t} \Omega_{22}^{-1} \Omega'_{12,t}. \text{ Then}$$

$$p(y_t \mid B_t) = N(c_0 + \Psi_1 \varepsilon_1 + x_t B_0 + \Omega_{12,1} \Omega_{22}^{-1} (B_1 - B_0), \Omega_{1|2,1})$$

and for $t = 2, \dots, T$:

$$p(y_t \mid B_t) \equiv N(y_{t-1} + \Psi_t \varepsilon_t - \Psi_{t-1} \varepsilon_{t-1} + (x_t - x_{t-1}) B_{t-1} + \Omega_{12,t} \Omega_{22}^{-1} (B_t - B_{t-1}), \Omega_{1|2,t})$$

Let us write

$y_1^* = y_1 - c_0 - x_1 B_0 - \Omega_{12,1} \Omega_{22}^{-1} (B_1 - B_0)$, and for $t = 2, \dots, T$

$$y_t^* = y_t - y_{t-1} - (x_t - x_{t-1}) B_{t-1} - \Omega_{12,t} \Omega_{22}^{-1} (B_t - B_{t-1})$$

We arrive at the following law of motion for $\{\Psi_t\}$

$$y_1^* = \Psi_1 \varepsilon_1 + w_1 \quad \text{for } t = 1$$

$$\psi_1 = \psi_0 + u_1$$

and for $t = 2, \dots, T$:

$$y_t^* = \Psi_t \varepsilon_t - \Psi_{t-1} \varepsilon_{t-1} + w_t$$

$$\psi_t = \psi_{t-1} + u_t$$

where $w_t \sim N(0, \Omega_{1|2,t})$, $u_t \sim N(0, \Sigma)$ and $E(w_t u_t') = 0$. Inserting transition equations into measurement equations one has

$$y_1^* = (\varepsilon_1' \otimes \mathbf{I}_m) \psi_0 + (\varepsilon_1' \otimes \mathbf{I}_m) u_1 + w_1$$

$$\psi_1 = \psi_0 + u_1$$

and

$$y_t^* = [(\varepsilon_t' \otimes \mathbf{I}_m) - (\varepsilon_{t-1}' \otimes \mathbf{I}_m)] \psi_{t-1} + (\varepsilon_t' \otimes \mathbf{I}_m) u_t + w_t$$

$$\psi_t = \psi_{t-1} + u_t$$

We complete the CKF2 setup by putting $\alpha_t = \psi_{t-1}$, $d_t = 0$, $H_1 = (\varepsilon_1' \otimes \mathbf{I}_m)$, $H_t = (\varepsilon_t' \otimes \mathbf{I}_m) - (\varepsilon_{t-1}' \otimes \mathbf{I}_m)$, $k = 0$, $G = \mathbf{I}_{m^2}$, $R_t = (\varepsilon_t' \otimes \mathbf{I}_m) \Sigma (\varepsilon_t \otimes \mathbf{I}_m) + \Omega_{1|2,t}$, $S_t = (\varepsilon_t' \otimes \mathbf{I}_m) \Sigma$, $Q = \Sigma$. As before, we have

$$p(\alpha^{T+1} | y_1^*, \dots, y_T^*) = p(\alpha_{T+1} | y_1^*, \dots, y_T^*) \cdot \prod_{t=1}^T p(\alpha_t | \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{T+1}, y_1^*, \dots, y_T^*)$$

where $p(\alpha_t | \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{T+1}, y_1^*, \dots, y_T^*) \propto p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*) p(\alpha_t | y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$ and

$p(\alpha_t | y_1^*, \dots, y_{t-1}^*) \equiv N(\hat{\alpha}_{t|t-1}, P_{t|t-1})$. Since $p(\alpha_1 | y_0^*) \equiv p(\psi_0) = N(\underline{\psi}_0, \underline{V}_{\psi_0})$, we start the Kalman recursion within CKF2 at $\hat{\alpha}_{1|0} = \underline{\psi}_0$ and $P_{1|0} = \underline{V}_{\psi_0}$. The distribution

$p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$ is just the one implied by the space-space model in the CKF2 setup. Treating $y_t^*, \alpha_{t+1}, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*$ as constants we immediately get

$$p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*) \propto \exp\{-\frac{1}{2}(\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)' \Delta_{\alpha_t}^{-1} (\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)\}$$

where $\Delta_{\alpha_t}^{-1} = \begin{bmatrix} H_t' & G' \\ S_t' & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_t' & G' \end{bmatrix}'$ and $\tilde{\alpha}_t = \Delta_{\alpha_t} \begin{bmatrix} H_t' & G' \\ S_t' & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_t & S_t \\ S_t' & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_t^* - d_t \\ \alpha_{t+1} - k \end{bmatrix}$

Hence $p(\alpha_t | \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{T+1}, y_1^*, \dots, y_T^*)$, being a product of Normal distribution and a kernel of Normal pdf, is Normal. Specifically

$$p(\alpha_t | \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{T+1}, y_1^*, \dots, y_T^*) \equiv N(\bar{\alpha}_t, \bar{V}_{\alpha_t})$$

where $\bar{V}_{\alpha_t} = (\Delta_{\alpha_t}^{-1} + P_{t|t-1}^{-1})^{-1}$ and $\bar{\alpha}_t = \bar{V}_{\alpha_t} (\Delta_{\alpha_t}^{-1} \tilde{\alpha}_t + P_{t|t-1}^{-1} \hat{\alpha}_{t|t-1})$.

To sum up, to sample from the full conditional posterior of ψ_0, ψ^T , we cast the underlying model within CKF2 setup and first draw $\alpha_{T+1} = \psi_T$ from $N(\hat{\alpha}_{T+1|T}, P_{T+1|T})$ then draw sequentially $\alpha_t = \psi_{t-1}$ from $N(\bar{\alpha}_t, \bar{V}_{\alpha_t})$, for $t = T, \dots, 1$ (i.e. backward sampling).

As emphasized in the main text our algorithm can easily be adapted to the case when $\{\alpha_t\}_{t=1}^{T+1}$ is subject to any linear restrictions. To this end we should follow appendix 3 i.e. write down all restrictions as $\Phi\alpha_1 = \Phi\alpha_2 = \dots = \Phi\alpha_{T+1} = \phi$ and get the modified state-space model (A9), where the state variable is α_t^* . Hence $p(\alpha_t^* | y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$ is well defined Normal distribution, for which the modified CKF2 is given in appendix 3. What remains is to rewrite $p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$. Since the pdf of the latter is proportional to $\exp\{-\frac{1}{2}(\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)' \Delta_{\alpha_t}^{-1} (\alpha_t - \tilde{\alpha}_t)\}$, using reasoning and notation from appendix 3, we have

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha_t^* \\ r_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^\perp \tilde{\alpha}_t \\ \Phi \tilde{\alpha}_t \end{bmatrix}\right)' \begin{bmatrix} \Phi^\perp \Delta_{\alpha_t} (\Phi^\perp)' & \Phi^\perp \Delta_{\alpha_t} \Phi' \\ \Phi \Delta_{\alpha_t} (\Phi^\perp)' & \Phi \Delta_{\alpha_t} \Phi' \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \alpha_t^* \\ r_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^\perp \tilde{\alpha}_t \\ \Phi \tilde{\alpha}_t \end{bmatrix}\right)\right\}$$

Then we can easily derive the conditional distribution of α_t^* (given r_t), which is Normal. Setting $r_t = \phi$ we end up with appropriate Normal distribution, which should be merged with $p(\alpha_t^* | y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$ to get the conditional posterior $p(\alpha_t^* | \alpha_{t+1}^*, \dots, \alpha_{T+1}^*, y_1^*, \dots, y_T^*)$ (which may be derived along the above lines).

3) Sampling from the full conditional posterior of ε^T (CKF2)

The underlying posterior is proportional to $\prod_{t=1}^T p(\varepsilon_t) p(y_t | B_t)$, where the pdf $p(y_t | B_t)$ was defined in the Gibbs sampling step 2). Let us put $\varepsilon_t = \alpha_{t+1}$. Then we have the implicit law of motion for $\{\alpha_t\}$:

$$y_1^* = \Psi_1 \alpha_2 + w_1$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1$$

and for $t = 2, \dots, T$:

$$y_t^* = -\Psi_{t-1} \alpha_t + e_t,$$

$$\alpha_{t+1} = \varepsilon_t$$

where $e_t = \Psi_t \varepsilon_t + w_t$ and $w_t \sim N(0, \Omega_{1|2,t})$. Hence for $t = 2, \dots, T$ we cast the model within the CKF2 setup by putting $d_t = 0$, $H_t = -\Psi_{t-1}$, $k = 0$, $G = 0$, $Q = \mathbf{I}_m$, $R_t = \Psi_t \Psi_t' + \Omega_{1|2,t}$, $S_t = \Psi_t$. Then the joint (full conditional) posterior for $\alpha_2, \dots, \alpha_{T+1}$ may be decomposed as

$$p(\alpha_2, \dots, \alpha_{T+1} | y_1^*, \dots, y_T^*) = p(\alpha_{T+1} | y_1^*, \dots, y_T^*) \cdot \prod_{t=2}^T p(\alpha_t | \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{T+1}, y_1^*, \dots, y_T^*)$$

where $p(\alpha_t | \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{T+1}, y_1^*, \dots, y_T^*) \propto p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*) p(\alpha_t | y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$. Note that $p(y_t^*, \alpha_{t+1} | \alpha_t, y_1^*, \dots, y_{t-1}^*)$ is just the distribution underlying the state-space model within CKF2. Then everything goes as described in the previous Gibbs sampling step (i.e. to draw ψ_0, ψ^T), except that we

start the recursion for $\hat{\alpha}_{t+1|t}$ and $P_{t+1|t}$ at $\hat{\alpha}_{2|1} = (\Psi_1' \Omega_{1|2,1}^{-1} \Psi_1 + \mathbf{I}_m)^{-1} \Psi_1' \Omega_{1|2,1}^{-1} y_1^*$ and

$P_{2|1} = (\Psi_1' \Omega_{1|2,1}^{-1} \Psi_1 + \mathbf{I}_m)^{-1}$, respectively. Moreover, in the present case we can further simplify expressions

$$\Delta_{\alpha_t}^{-1} = \begin{bmatrix} H_t' & G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_t & S_t \\ S_t' & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_t' & G' \end{bmatrix}' = \Psi_{t-1}' \Omega_{1|2,t}^{-1} \Psi_{t-1}$$

$$\tilde{\alpha}_t = \Delta_{\alpha_t} \begin{bmatrix} H_t' & G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_t & S_t \\ S_t' & Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_t^* - d_t \\ \alpha_{t+1} - k \end{bmatrix} = \Psi_{t-1}^{-1} (\Psi_t \alpha_{t+1} - y_t^*)$$

4) Sampling from the full conditional posterior of $\theta = (\Sigma, \Omega)$

Assuming independent Inverted Wishart priors for Σ_{ii} , $i = 1, \dots, m$ and Ω , both the full conditional posteriors of Σ_{ii} 's and that of Ω are Inverted Wishart distributions. Hence the drawing is standard.

5) Sampling from the full conditional posterior of c_0

The underlying full conditional posterior is proportional to the product of (12) and $p(c_0)$. As far as the former is concerned, treating everything except c_0 as constants, we can write it as

$$\begin{bmatrix} y_1 - \Psi_1 \varepsilon_1 - x_1 B_0 \\ B_1 - B_0 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} c_0, \Omega_1 \right), \quad \text{hence it can be made proportional to}$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} (c_0 - \hat{c}_0)' (\Omega_c - \Omega_{cB} \Omega_B^{-1} \Omega_{cB}')^{-1} (c_0 - \hat{c}_0) \right\}, \quad \text{where}$$

$\hat{c}_0 = y_1 - \Psi_1 \varepsilon_1 - x_1 B_1 - \Omega_{cB} \Omega_B^{-1} (B_1 - B_0)$. Since the prior is $c_0 \sim N(\underline{c}_0, \underline{V}_{c_0})$, the full conditional

posterior of c_0 is Normal with covariance $\left((\Omega_c - \Omega_{cB} \Omega_B^{-1} \Omega_{cB}')^{-1} + \underline{V}_{c_0}^{-1} \right)^{-1}$ and mean $\left((\Omega_c - \Omega_{cB} \Omega_B^{-1} \Omega_{cB}')^{-1} + \underline{V}_{c_0}^{-1} \right)^{-1} \left((\Omega_c - \Omega_{cB} \Omega_B^{-1} \Omega_{cB}')^{-1} \hat{c}_0 + \underline{V}_{c_0}^{-1} \underline{c}_0 \right)$.

REFERENCES:

- Canova, F and L. Gambetti (2009), "Structural changes in the US economy: Is there a role for monetary policy?", *Journal of Economic Dynamics & Control*, 33, pp. 477–499
- Canova, F. and F. J. Pérez Forero (2015), "Estimating Overidentified, Nonrecursive, Time-Varying Coefficients Structural Vector Autoregressions", *Quantitative Economics*, 6, pp. 359–384
- Carter, C.K. and R. Kohn (1994), "On Gibbs Sampling for State Space Models", *Biometrika*, 81, pp. 541–553
- Cochrane, J.H. (2017), "Michelson–Morley, Fisher, and Occam: The Radical Implications of Stable Quiet Inflation at the Zero Bound", *Working paper*
- Cogley, T. and T.J. Sargent (2002), "Evolving Post–World War II U.S. Inflation Dynamics", in B.S. Bernanke and K. Rogoff, eds., *NBER Macroeconomics Annual 2001*, vol. 16, MIT Press
- Cogley, T. and T.J. Sargent (2005), "Drifts and Volatilities: Monetary Policies and Outcomes in the Post WWII U.S.", *Review of Economic Dynamics*, 8, pp. 262–302
- Cox, D., J. Little and D. O’Shea (1997), *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 2nd ed., Springer–Verlag, New York
- Dickenstein, A. and I. Z. Emiris (2005), *Solving Polynomial Equations: Foundations, Algorithms, and Applications*, Springer–Verlag, Berlin
- Frühwirth–Schnatter, S. (1994), "Data Augmentation and Dynamic Linear Models", *Journal of Time Series Analysis*, 15, pp. 183–202
- Gouriéroux, C. and A. Monfort (2015), "Revisiting Identification and Estimation in Structural VARMA Models", *Working Paper*
- Harvey, A.C. (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press
- Kim, S., N. Shephard and S. Chib (1998) "Stochastic Volatility: Likelihood, Inference and Comparison with ARCH Models", *Review of Economic Studies*, 65, pp. 361–93
- Koopmans, T.C., H. Rubin and R.B. Leipnik (1950), "Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics", in: T.C. Koopmans, ed., *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, Cowles Commission Monograph No. 10, John Wiley & Sons, New York
- Lanne, M. and H. Lütkepohl (2008), "Identifying Monetary Policy Shocks via Changes in Volatility", *Journal of Money, Credit and Banking*, 40, pp. 1131–1149
- Lanne, M., H. Lütkepohl and K. Maciejowska (2010), "Structural Vector Autoregressions with Markov Switching", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34, pp. 121–131
- Lanne, M., M. Meitz and P. Saikkonen (2017), "Identification and Estimation of Non-Gaussian Structural Vector Autoregressions", *Journal of Econometrics*, 196, pp. 288–304
- Lubik, T.A., Ch. Matthes and A. Owens (2014), "Beveridge Curve Shifts and Time–Varying Parameter VARs", *Working Paper*
- Pagan, A. (1980), "Some Identification and Estimation Results for Regression Models with Stochastically Varying Coefficients", *Journal of Econometrics*, 13, pp. 341–363
- Primiceri, G. (2005), "Time Varying Structural Vector Autoregressions and Monetary Policy", *Review of Economic Studies*, 72, pp. 821–852
- Reiersøl, O. (1950), "Identifiability of a Linear Relation between Variables Which Are Subject to Error", *Econometrica*, 18, pp. 375–389
- Rigobon, R. (2003), "Identification through Heteroskedasticity", *Review of Economics and Statistics*, 85, pp. 777–792

-
- Sims, C.A and T. Zha (2006), "Were There Regime Switches in U.S. Monetary Policy?", *American Economic Review*, 96, pp. 54–81
- Taylor, J.B. (2009), *Getting Off Track: How Government Actions and Interventions Caused, Prolonged, and Worsened the Financial Crisis*. Hoover Institution Press, Stanford.
- Waggoner, D.F. and T. Zha (2003), "A Gibbs Sampler for Structural Vector Autoregressions", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, pp. 349–366
- Wall, K.D. (1987), "Identification Theory for Varying Coefficient Regression Models", *Journal of Time Series Analysis*, 8, pp. 359–371
- Wu, J.C. and F.D. Xia (2016), "Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound", *Journal of Money, Credit and Banking*, 48, pp. 253–291

Załącznik 4

Mały Model Transmisji Monetarnej

Ewa Wróbel

Opis modelu

Mały Model Transmisji (MMT 2.2) nie zmienił się od ostatniej edycji raportu¹. Służy on do analizowania mechanizmu transmisji monetarnej, w tym transmisji w sektorze bankowym (transmisja stopy procentowej, próba uwzględnienia kanału kredytowego). Umożliwia wykonanie symulacji wpływu zmiany krajowej i zagranicznej stopy procentowej, popytu zagranicznego, wzrostu inflacji zagranicznej oraz światowych cen ropy naftowej na podstawowe zmienne makroekonomiczne, takie jak luka popytowa, inflacja, czy kredyt złotowy.

MMT 2.2 należy do klasy modeli nowokeynesowskich, jest zbudowany wokół czterech zasadniczych zależności: krzywej IS, krzywej Phillipsa, równania kursu walutowego inspirowanego koncepcją nieubezpieczonego parytetu stóp procentowych i parytetu siły nabywczej oraz reguły stopy procentowej. Ma on także blok sektora finansowego, który obejmuje: (i) transmisję stopy procentowej od stopy rynku pieniężnego do oprocentowania kredytu bankowego; (ii) równanie podaży kredytu bankowego.

Oszacowania parametrów modelu zostały otrzymane metodą najmniejszych kwadratów lub uogólnioną metodą momentów.

Założenia

W modelu zakłada się, że w gospodarce występują sztywności cen i płac, w związku z czym po wzroście nominalnej stopy procentowej następuje jej wzrost w ujęciu realnym. Realna stopa procentowa ma wpływ na realny kurs walutowy, aktywność sektora realnego i wreszcie na inflację. Wpływ nominalnej stopy procentowej na zmienne realne jest jedynie przejściowy, w długim okresie zmienne realne powracają do swoich poziomów równowagi (poziomów potencjalnych).

Wszystkie zmienne realne wyrażone są przez różnice między stanem aktualnym i potencjalnym (luki). Luki mają charakter stacjonarny, co zapewnia powrót do równowagi po zaburzeniach. Zostały one uzyskane za pomocą filtrowania (filtr Hodricka-Prescotta), co zapewnia ich stacjonarność. Mają one zatem czysto statystyczny charakter. Filtr Hodricka-Prescotta może także dawać błędne oszacowania luk pod koniec próby. Ten problem rozwiązujemy przez filtrowanie szeregów wydłużonych o 8 kwartałów (prognoza). Standardy udzielania kredytów są wzięte wprost (nie są przekształcane) z wyników ankiety przeprowadzanej przez NBP wśród przewodniczących komitetów kredytowych².

¹ Por. Chmielewski *et al.* (2018), *Mechanizm transmisji polityki pieniężnej w Polsce. Stan wiedzy w 2017 roku*. Materiały i Studia 330, Narodowy Bank Polski.

² Więcej informacji: <http://www.nbp.pl/home.aspx?f=/systemfinansowy/kredytowy.html>

W modelu występują producenci krajowi i zagraniczni, konsumenci krajowi i zagraniczni, bank centralny i sektor bankowy. Producenci krajowi działają w warunkach konkurencji monopolistycznej. Oznacza to, że istnieje wiele przedsiębiorstw produkujących towary mające na tyle szczególne cechy, że przedsiębiorstwa mogą ustalać cenę sprzedawanych produktów. Do produkcji firmy wykorzystują nakłady pochodzące z rynku krajowego i z zagranicy. Wytworzone przez siebie produkty sprzedają częściowo na rynku krajowym, a częściowo eksportują. Eksport zależy od popytu zagranicznego i od kursu złotego wobec euro i dolara amerykańskiego.

Konsumenci (gospodarstwa domowe) czerpią użyteczność z produktów krajowych i zagranicznych. Konsumenci oszczędzają kupując aktywa krajowe lub zagraniczne. Alokacja oszczędności między aktywami krajowymi i zagranicznymi zależy od dysparytetu stóp procentowych, od oczekiwanego kursu złotego wobec euro i dolara amerykańskiego oraz premii za ryzyko odbijającej ryzyko makroekonomiczne krajowe i zagraniczne.

Banki działają w warunkach konkurencji oligopolistycznej. Ustalają oprocentowanie kredytów biorąc pod uwagę stopę rynku pieniężnego (koszt refinansowania) oraz popyt na kredyt. W długim okresie stopa rynku pieniężnego i oprocentowanie kredytów pozostają w równowadze. Kredyty są udzielane na cele produkcyjne i konsumpcyjne.

Podstawowe równania modelu

Krzywa IS. Luka popytowa (tj. różnica między aktualnym PKB a jego poziomem potencjalnym) zależy od: (i) swojej wartości opóźnionej, (ii) luki realnego (ex ante) oprocentowania kredytów, (iii) luki realnego efektywnego kursu walutowego (posługujemy się przybliżeniem, na które składa się 80% euro i 20% dolara amerykańskiego), (iv) luki popytu zagranicznego, (v) opóźnionych standardów kredytowych. Standardy kredytowe przybliżają efekt kanału kredytowego. Odchylenia PKB od poziomu potencjalnego są wywołane przez czynniki popytowe i politykę kredytową banków.

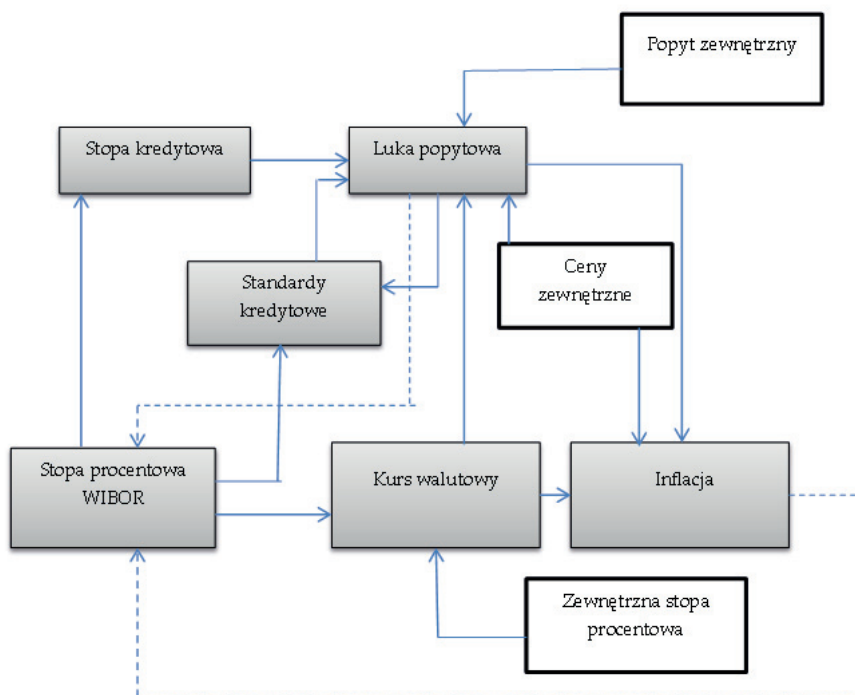
Realny efektywny kurs walutowy to zależność behawioralna z elementami dwóch koncepcji kursu walutowego: niezabezpieczonego parytetu stóp procentowych i parytetu siły nabywczej. Oczekiwana zmiana kursu realnego zależy od realnego dysparytetu stóp procentowych oraz od różnicy między stopą naturalną w kraju i za granicą. Dodatkowo premia za ryzyko makroekonomiczne przybliżana jest krajową luką popytową. Wzrost krajowej stopy procentowej powinien skutkować aprecjacją waluty krajowej, pod warunkiem, że nie zmieni się relacja między stopą równowagi w kraju i zagranicą oraz krajowa luka popytowa.

Krzywa Phillipsa. Inflacja (wskaźnik HICP kw./kw. pozbawiony nieprzetworzonej żywności oraz energii elektrycznej) zależy od swojej opóźnionej i oczekiwanej wartości, luki popytowej oraz realnego kursu walutowego (efekt *pass-through*).

Reguła stopy procentowej. Stopa procentowa zależy od swojej przeszłej wartości (wygładzanie), od bieżącej inflacji i luki popytowej.

Model zawiera również równanie oprocentowania kredytów i równanie popytu na kredyty. Rysunek 1 przedstawia schemat zależności między zmiennymi w modelu.

Rysunek 1. Schemat zależności modelu MMT 2.2



Uwaga: Linie przerywane łączą zmienne występujące w regule polityki pieniężnej. Prostokąty z wypełnieniem szarym reprezentują zmienne endogeniczne, z wypełnieniem białym – zmienne egzogeniczne.

Źródło: opracowanie własne

Dynamika modelu

W celu przybliżenia dynamiki modelu na wykresach poniżej przedstawiamy reakcje wybranych zmiennych na następujące impulsy. Impuls krajowej stopy procentowej (tj. wzrost stopy procentowej o 1 pkt. proc. na 1 kwartał) powoduje wzrost ceny kredytu oraz zacieśnienie polityki kredytowej przez banki komercyjne³ (Rysunek 2). Kredyty obniżają się, początkowo z powodu oddziaływania stopy procentowej, następnie z powodu ograniczenia podaży przez banki. Następuje aprecjacja realnego kursu walutowego. Luka popytowa staje się ujemna, a inflacja obniża się.

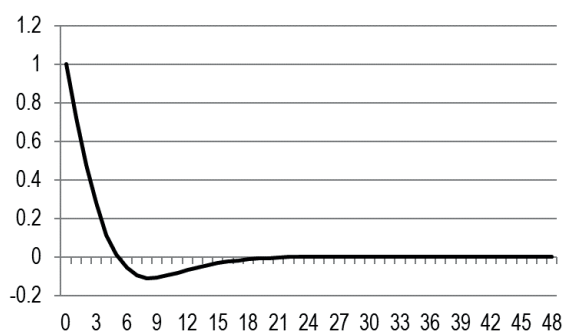
Impuls popytu zagranicznego (tj. wzrost luki popytowej w krajach strefy euro o 1 pkt. proc. na 1 kwartał) przekłada się na wzrost krajowej luki popytowej, kredytu i inflacji (Rysunek 3). Rośnie w związku z tym krajowa stopa procentowa, a za nią oprocentowanie kredytu. Wzrost stopy procentowej prowadzi do zacieśnienia polityki kredytowej banków i aprecjacji kursu walutowego. Wzrost stopy procentowej, zaostrenie standardów kredytowania i częściowo także aprecjacja kursu prowadzą do obniżenia się luki i powrotu inflacji do ścieżki wyjściowej.

Impuls zagranicznej stopy procentowej (tj. wzrost zagranicznej stopy procentowej o 1 pkt. proc. na 1 kwartał) przekłada się na niewielki wzrost krajowej stopy procentowej (Rysunek 4). Rośnie oprocentowanie kredytów, a zaostrenie polityki kredytowej przez banki jest zaniedbywalnie małe. Lekko rośnie dysparytet stóp, co powoduje odpływ kapitału i deprecjację złotego. Deprecjacja sprawia, że zwiększa się popyt na polski eksport, luka popytowa i inflacja.

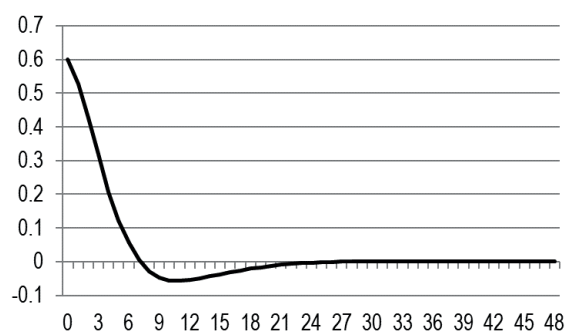
³ Maksymalnie czyni to ok. 9% banków komercyjnych ważonych aktywami.

Rysunek 2. Funkcje reakcji zmiennych na impuls krajowej stopy procentowej

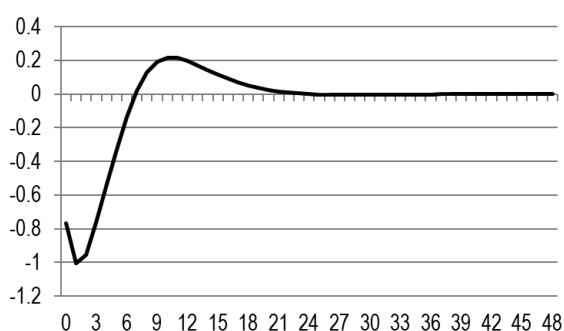
A. Stopa WIBOR 3M (w pkt. proc.)



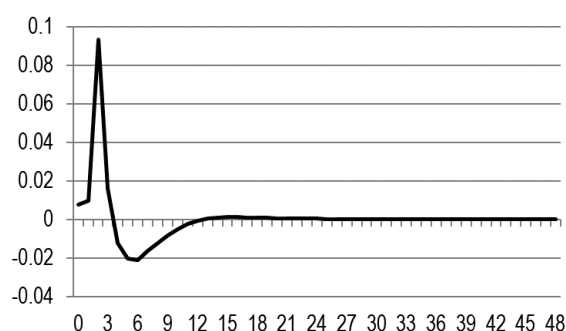
B. Oprocentowanie kredytów złotych (w pkt. proc.)



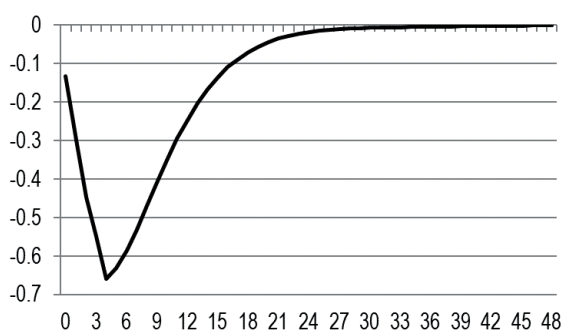
C. REER (wzrost – deprecjacja, w%)



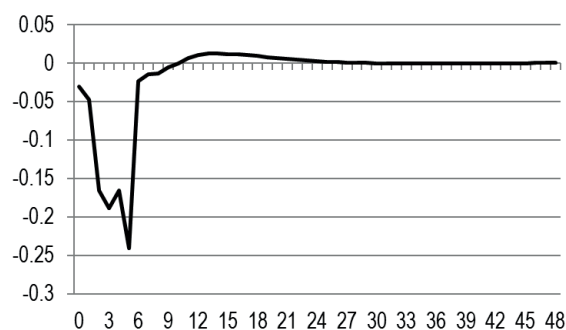
D. Standardy kredytowe (wzrost – zacieśnienie)



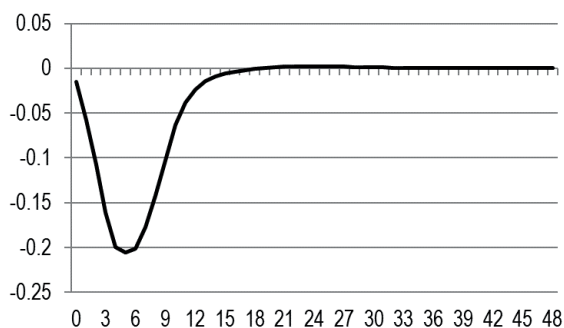
E. Luka kredytowa



F. Luka popytowa



G. Inflacja HICP (r/r)

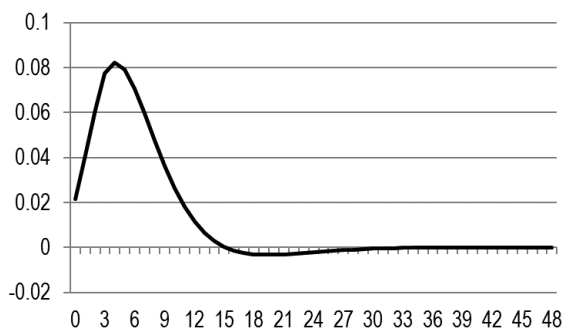


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje zmiennych na wzrost stopy procentowej o 1 pkt. proc. na 1 kwartał. Na osi poziomej pokazano kwartał po impulsie.

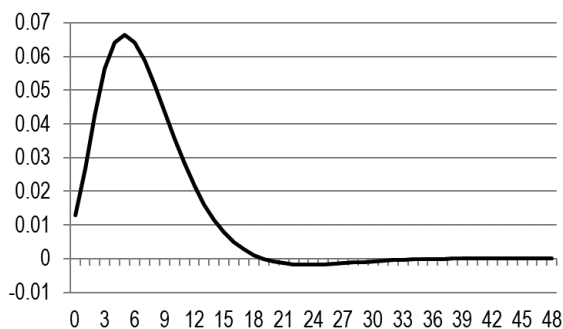
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 3. Funkcje reakcji zmiennych na impuls popytu zagranicznego

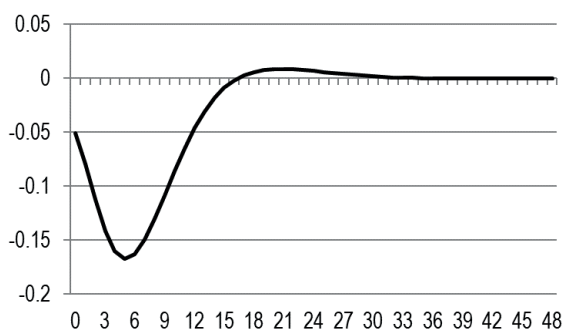
A. Stopa WIBOR 3M (w pkt. proc.)



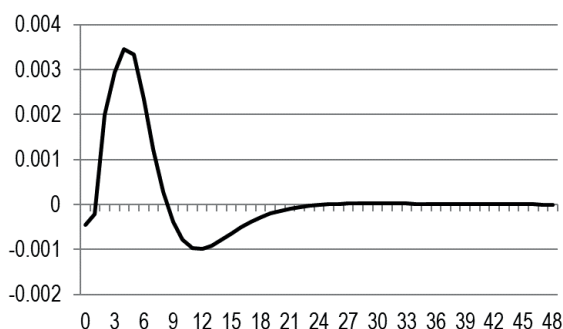
B. Oprocentowanie kredytów złotych (w pkt. proc.)



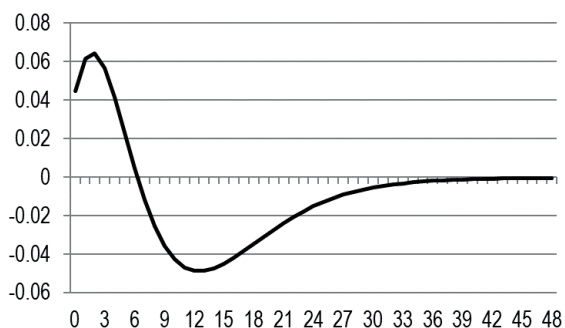
C. REER (wzrost – deprecjacja, w%)



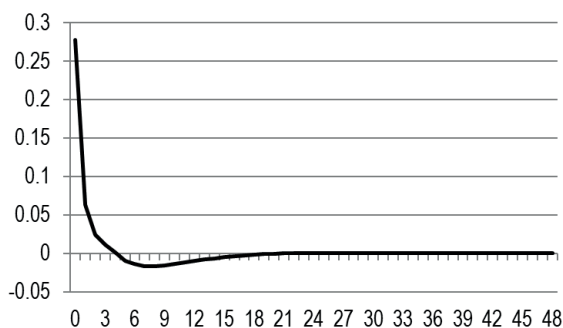
D. Standardy kredytowe (wzrost – zacieśnienie)



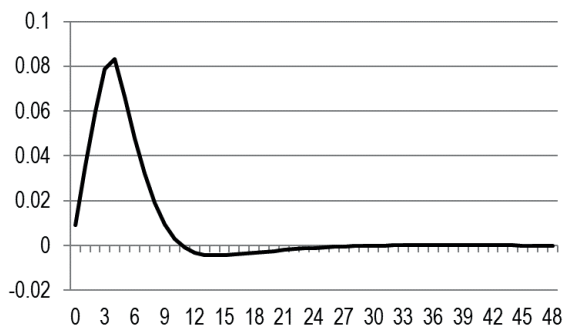
E. Luka kredytowa



F. Luka popytowa



G. Inflacja HICP (t/r)

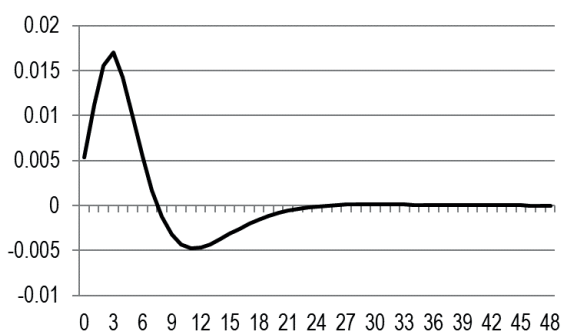


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje zmiennych na wzrost luki popytowej w krajach strefy euro o 1 pkt. proc. na 1 kwartał. Na osi poziomej pokazano kwartał po impulsie.

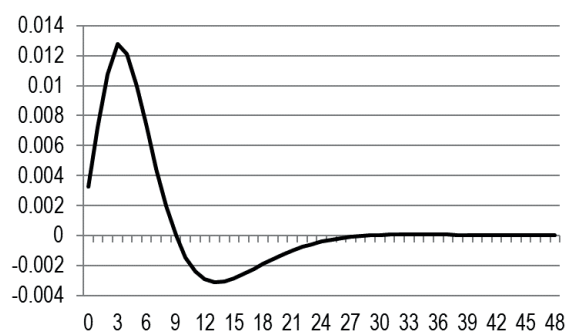
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 4. Funkcje reakcji zmiennych na impuls zagranicznej stopy procentowej

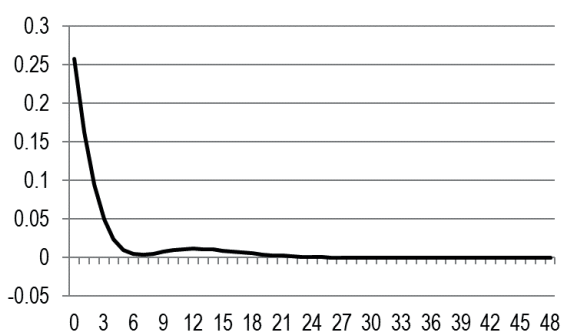
A. Stopa WIBOR 3M (w pkt. proc.)



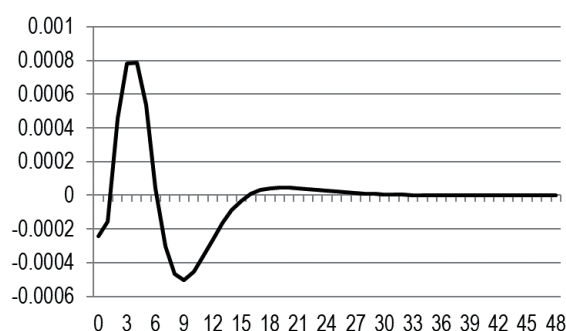
B. Oprocentowanie kredytów złotych (w pkt. proc.)



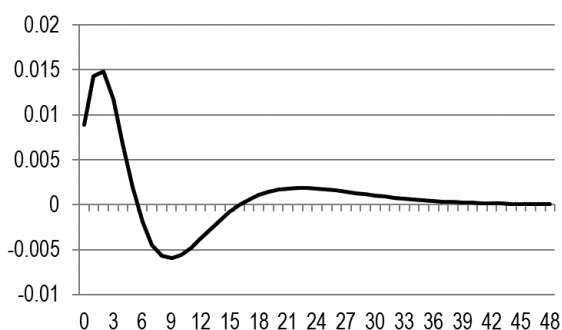
C. REER (wzrost – deprecjacja, w%)



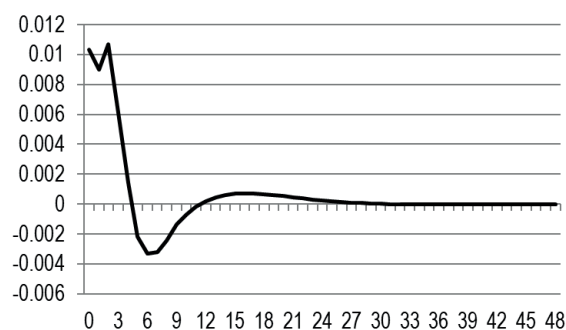
D. Standardy kredytowe (wzrost – zacieśnienie)



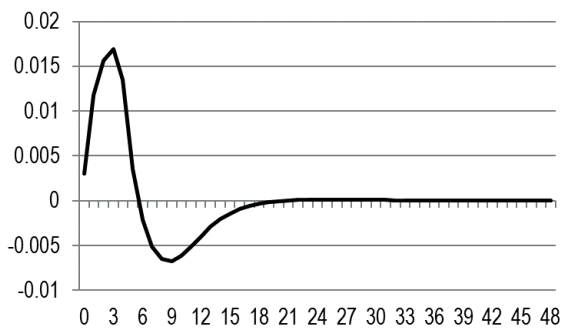
E. Luka kredytowa



F. Luka popytowa



G. Inflacja HICP (r/r)



Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje zmiennych na wzrost zagranicznej stopy procentowej: o 1 pkt. proc. na 1 kwartał. Na osi poziomej pokazano kwartał po impulsie.

Źródło: obliczenia własne.

Załącznik 5

Mały Model Polityki Pieniężnej

Tomasz Łyziak

Mały Model Polityki Pieniężnej (MMPP) jest małym strukturalnym modelem zbudowanym w paradygmacie nowokeynesistowskim wokół czterech podstawowych zależności makroekonomicznych: krzywej zagregowanego popytu, równania kursowego, krzywej Phillipsa i reguły polityki pieniężnej. Kanoniczna postać modelu została rozszerzona o dodatkowe zmienne, takie jak oprocentowanie kredytów i różne wskaźniki inflacji (inflacja CPI, inflacja z wyłączeniem cen żywności i energii, dynamika cen żywności, dynamika cen energii) i oczekiwań inflacyjnych (ankietowe miary oczekiwań przedsiębiorstw, konsumentów i analityków sektora finansowego). Poniżej przedstawiamy oszacowania równań modelu (Tabela 1) oraz dynamiczne własności modelu (Rysunek 1- Rysunek 8).

Tabela 1. Specyfikacje równań modelu MMPP i ich oszacowania

Krzywa zagregowanego popytu			
$\hat{y}_t = \alpha_1 \hat{y}_{t-1} + \alpha_2 \hat{y}_t^{EA} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) E_t \hat{y}_{t+1} + \alpha_3 \hat{r}_{t-2}^l + \alpha_4 \hat{s}_{t-1} + \varepsilon_t^{\hat{y}}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
α_1	0,534*** (0,011)	0,475*** (0,051)	Symbole: \hat{y} – krajowa luka popytowa, \hat{y}^{EA} – luka popytowa w strefie euro, \hat{r}^l – luka realnego oprocentowania kredytów, \hat{s} – luka realnego efektywnego kursu walutowego (wzrost – aprecjacja krajowej waluty), E_t – operator oczekiwań. Uwaga: W modelu MMPP 2017 stopa realna wchodziła z opóźnieniem 1 kwartału (obecnie: z opóźnieniem 2 kwartałów).
α_2	0,072*** (0,016)	0,081* (0,044)	
α_3	-0,093*** (0,011)	-0,118** (0,051)	
α_4	-0,005** (0,003)	-0,012* (0,007)	
skoryg. R²	0,92	0,75	
Oprocentowanie kredytów			
$i_t^l = i_{t-1}^l + \mu_1 \Delta i_{t-1} + \mu_2 (i_{t-1}^l - i_{t-1} - \mu_3 epu_{t-1}) + \varepsilon_t^{i^l}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
μ_1	0,633*** (0,017)	0,547*** (0,036)	Symbole: i^l – nominalna stopa oprocentowania kredytów, i – nominalna krótkoterminowa stopa procentowa (WIBOR 3M), epu – indeks niepewności polityki gospodarczej (<i>Economic Policy Uncertainty Index</i>), Δ – operator różnicowy (w stosunku do analogicznego okresu roku poprzedniego). Uwaga: W modelu MMPP 2019 zamiast zmiennej epu użyto stałej.
μ_2	-0,126*** (0,022)	-0,045*** (0,015)	
μ_3	0,003*** (0,000)	x	
skoryg. R²	0,99	0,99	

Równanie kursu walutowego			
$e_t = \beta E_t e_{t+1} + (1 - \beta)e_{t-1} + 0.25(i_t - i_t^{EA}) + \varepsilon_t^e$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
β	0,291*** (0,023)	0,277*** (0,043)	Równanie bazuje na koncepcji nieubezpieczonego parytetu stopy procentowej (UIP), lecz założenie racjonalnych oczekiwań jest w nim zastąpione hybrydowym modelem oczekiwań (Leitemo and Söderström, 2005). Symbole: e – nominalny efektywny kurs walutowy (wzrost – aprecjacja krajowej waluty), i – nominalna krótkoterminowa stopa procentowa (WIBOR 3M), i^{EA} – nominalna krótkoterminowa stopa procentowa w strefie euro (EURIBOR 3M), E_t – operator oczekiwań.
skoryg. R^2	0,86	0,88	

Hybrydowa nowokeynesistowska krzywa Phillipsa			
$\pi_t^c = \gamma_1 \pi_{t+4}^{e[e]} + (1 - \gamma_1)\pi_{t-1}^c + \gamma_2 \hat{y}_t + \gamma_3 \hat{s}_{t-1} + \varepsilon_t^{\pi^c}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
γ_1	0,604*** (0,058)	0,415*** (0,069)	Symbole: π^c – annualizowana inflacja bazowa (wyłączeniu podlegają ceny żywności i energii), $\pi^{e[e]}$ – krótkoterminowe oczekiwania inflacyjne przedsiębiorstw, \hat{y} – krajowa luka popytowa, \hat{s} – luka realnego efektywnego kursu walutowego (wzrost – aprecjacja krajowej waluty).
γ_2	0,178*** (0,032)	0,185*** (0,049)	
γ_3	-0,074*** (0,003)	-0,088*** (0,007)	
skoryg. R^2	0,51	0,54	Uwaga: W modelu MMPP 2017 luka popytowa wchodziła z opóźnieniem 1 kwartału (obecnie: luka popytowa z tego samego okresu).

Dynamika cen żywności			
$\pi_t^f = \tau_1 \pi_{t-1}^f + \tau_2 \pi_t^{en} + \tau_3 \Delta f p i_t^{PLN} + \tau_4 [p_{t-1}^f - \tau_5 f p i_{t-1}^{PLN} - (1 - \tau_5)p_{t-1}] + \varepsilon_t^{\pi^f}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
τ_1	0,322*** (0,025)	0,424*** (0,046)	Symbole: π^f – annualizowana dynamika cen żywności, π^{en} – annualizowana dynamika cen energii, $f p i^{PLN}$ – indeks cen surowców żywnościowych na rynkach światowych wyrażony w walucie krajowej, p^f – poziom cen żywności, p – ogólny poziom cen CPI, Δ – operator różnicowy (w stosunku do analogicznego okresu roku poprzedniego).
τ_2	0,301*** (0,023)	0,275*** (0,035)	
τ_3	0,016** (0,007)	0,031** (0,014)	
τ_4	-0,064*** (0,008)	-0,032** (0,016)	
τ_5	0,463*** (0,024)	0,731*** (0,272)	
skoryg. R^2	0,30	0,26	

Dynamika cen energii			
$\pi_t^{en} = \vartheta_1 \pi_{t-1}^{en} + \vartheta_2 \pi_{t-1} + \vartheta_3 \Delta e p i_t^{PLN} + \vartheta_4 [p_{t-1}^{en} - \vartheta_5 e p i_{t-1}^{PLN} - (1 - \vartheta_5)p_{t-1}] + \varepsilon_t^{\pi^{en}}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
ϑ_1	0,182*** (0,050)	X	Symbole: π^{en} – annualizowana dynamika cen energii, $e p i^{PLN}$ – indeks cen surowców energetycznych na rynkach światowych wyrażony w walucie krajowej, p^{en} – poziom cen energii, p – ogólny poziom cen CPI, Δ – operator różnicowy (w stosunku do analogicznego okresu roku poprzedniego).
ϑ_2	0,314*** (0,107)	0,852*** (0,119)	
ϑ_3	0,016*** (0,003)	0,027*** (0,007)	
ϑ_4	-0,030*** (0,005)	-0,036** (0,018)	
ϑ_5	0,149*** (0,056)	0,264*** (0,047)	
skoryg. R^2	0,19	0,15	

Oczekiwanie inflacyjne przedsiębiorstw			
$\pi_{t+4 t}^{e[e]} = \omega_1^{[e]} \pi_{t-1}^{[e]} + \omega_2^{[e]} \pi_{t+3 t-1}^{e[f]} + \omega_3^{[e]} \pi_{t+4 t}^{e[c]} + (1 - \omega_1^{[e]} - \omega_2^{[e]} - \omega_3^{[e]}) \pi_{t+4} + \varepsilon_t^{\pi^{e[e]}}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
$\omega_1^{[e]}$	0,266*** (0,029)	0,296*** (0,022)	Symbole: $\pi^{e[e]}$ – krótkoterminowe oczekiwania inflacyjne przedsiębiorstw, π – inflacja CPI r/r, $\pi^{e[f]}$ – krótkoterminowe oczekiwania inflacyjne analityków sektora finansowego, $\pi^{e[c]}$ – krótkoterminowe oczekiwania inflacyjne konsumentów.
$\omega_2^{[e]}$	0,303*** (0,032)	0,353*** (0,032)	
$\omega_3^{[e]}$	0,124*** (0,021)	0,114*** (0,015)	
skoryg. R²	0,77	0,84	

Oczekiwanie inflacyjne analityków sektora finansowego			
$\pi_{t+4 t}^{e[f]} = \omega_1^{[f]} \pi_{t-1} + \omega_2^{[f]} \pi_t^{tar} + (1 - \omega_1^{[f]} - \omega_2^{[f]}) \pi_{t+4} + \varepsilon_t^{\pi^{e[f]}}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
$\omega_1^{[f]}$	0,155*** (0,007)	0,181*** (0,010)	Symbole: $\pi^{e[f]}$ – krótkoterminowe oczekiwania inflacyjne analityków sektora finansowego, π – inflacja CPI r/r, π^{tar} – cel inflacyjny NBP.
$\omega_2^{[f]}$	0,719*** (0,010)	0,698*** (0,013)	
skoryg. R²	0,89	0,89	

Oczekiwanie inflacyjne konsumentów			
$\pi_{t+4 t}^{e[c]} = \omega_1^{[c]} \pi_{t-1}^{nc} + (1 - \omega_1^{[c]}) \pi_{t+3 t-1}^{e[f]} + \varepsilon_t^{\pi^{e[c]}}$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
$\omega_1^{[c]}$	0,459*** (0,013)	0,494*** (0,017)	Symbole: $\pi^{e[c]}$ – krótkoterminowe oczekiwania inflacyjne konsumentów, π^{nc} – dynamika cen żywności i energii r/r.
skoryg. R²	0,75	0,75	

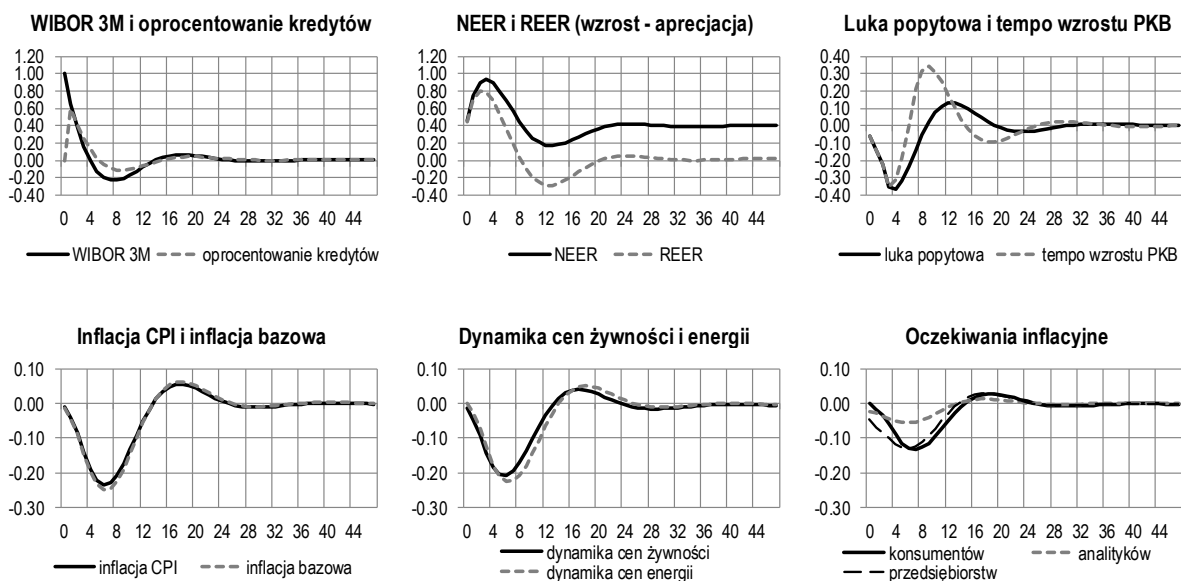
Reguła polityki pieniężnej			
$i_t = \kappa_1 i_{t-1} + (1 - \kappa_1) [\kappa_2 (\pi_t^{cy} - \pi_t^{tar}) + \kappa_3 \hat{y}_t] + \varepsilon_t^i$			
Parametr	Średnia (odch. std.) MMPP 2017	Średnia (odch. std.) MMPP 2019	Uwagi
κ_1	0,713*** (0,009)	0,716*** (0,016)	Symbole: i – nominalna krótkoterminowa stopa procentowa (WIBOR 3M), π^{cy} – inflacja bazowa r/r, π^{tar} – cel inflacyjny NBP, \hat{y} – krajowa luka popytowa.
κ_2	1,217*** (0,056)	1,110*** (0,071)	
κ_3	0,208*** (0,039)	0,398*** (0,080)	
skoryg. R²	0,97	0,98	

Uwagi: Model MMPP jest estymowany jako system równań uogólnioną metodą momentów (GMM). Wybór techniki estymacji wynika z tego, że antycypacyjne zmienne modelu są reprezentowane bądź przez dane ankietowe, podatne na błędy pomiaru, bądź jako zrealizowane w przyszłości wartości. Oznacza to, że błąd równania zawierającego zmienne antycypacyjne jest kombinacją egzogenicznego szoku i błędu pomiaru lub losowego błędu charakteryzującego oczekiwania racjonalne (Cermeño i Villagómez, 2012). Zgodnie z literaturą, do estymacji wykorzystujemy instrumenty w postaci przeszłych wartości zmiennych objaśniających (Beyer *et al.*, 2008). Podstawowy zestaw instrumentów obejmuje 4 opóźnienia luki popytowej, kursu walutowego, inflacji CPI oraz stopy procentowej, choć instrumenty te różnią się nieco między równaniami. Test nadliczbowych restrykcji (ang. *overidentifying restrictions*) sugeruje poprawność dobranych instrumentów (J-stat.: 17,82; J-prob.: 0,85). Odchylenia standardowe oszacowań podawane są w nawiasach (** – 99-procentowy poziom ufności, * – 90-procentowy poziom ufności). Próba obejmuje okres: 1 kw. 2001-1 kw. 2019. Annualizowane wskaźniki inflacji wykorzystane w modelu zostały wyrównane sezonowo.

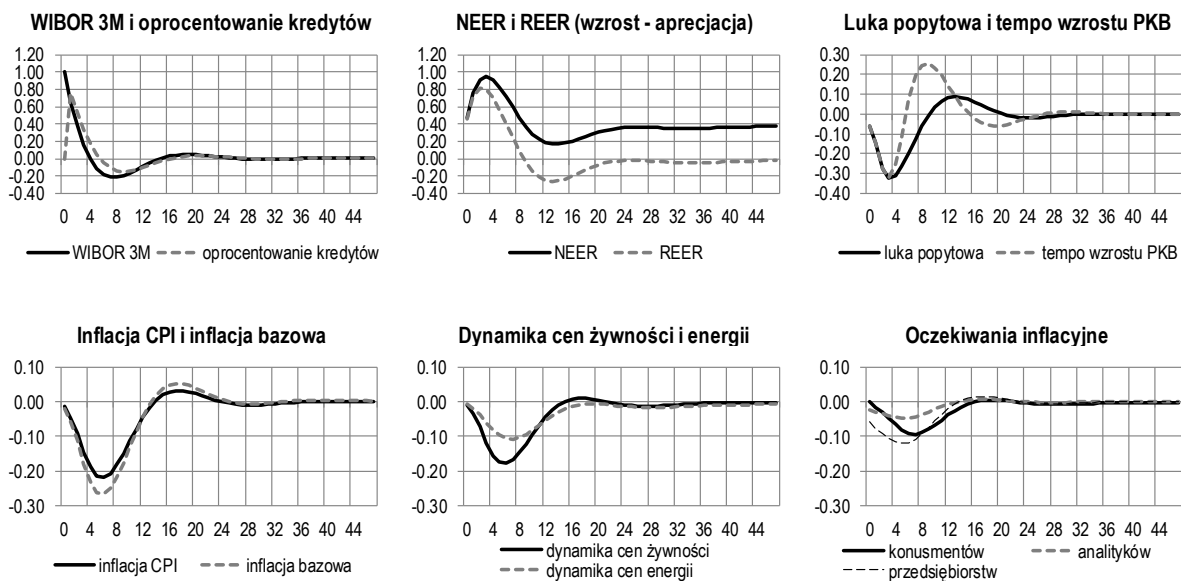
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 1. Funkcje reakcji na impuls stopy procentowej trwający 1 kwartał

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

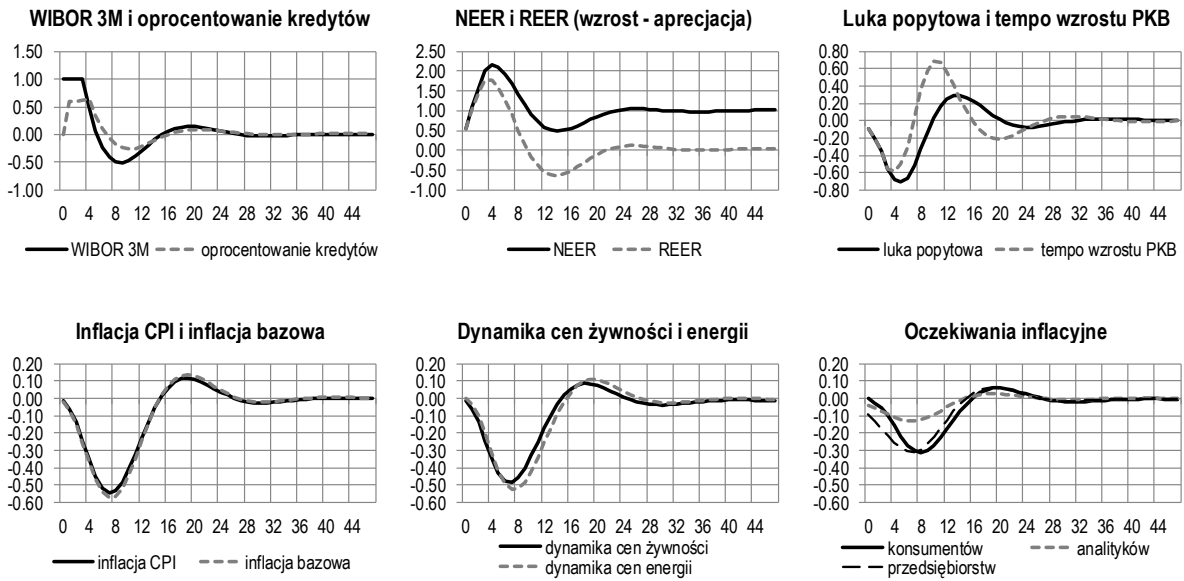


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost krótkoterminowej stopy procentowej o 1 pkt. proc. na okres 1 kwartału. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

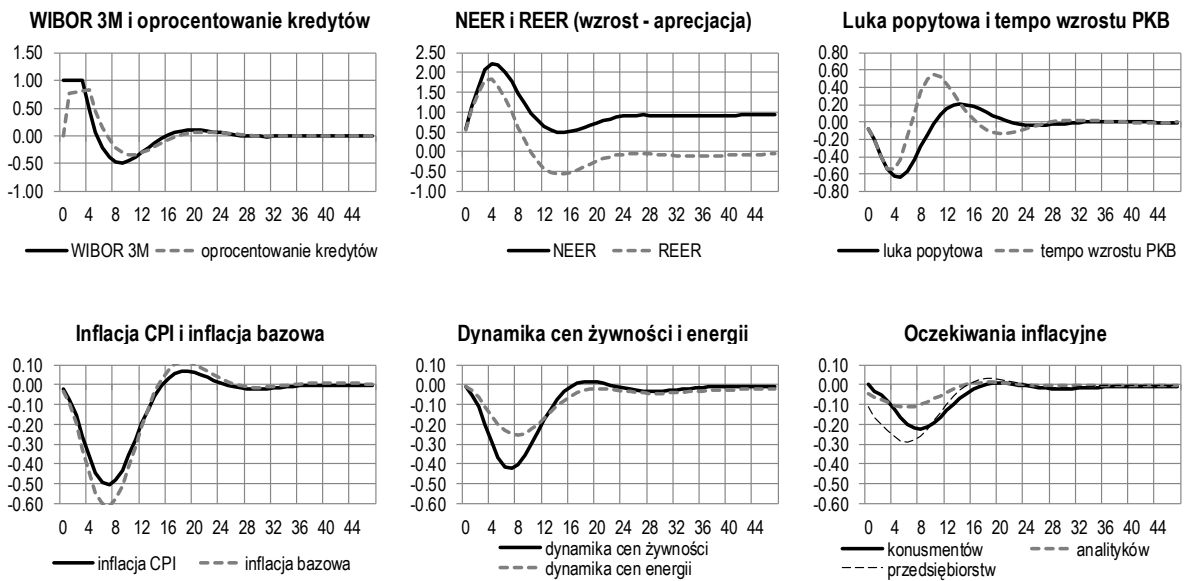
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 2. Funkcje reakcji na impuls stopy procentowej trwający 4 kwartały

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

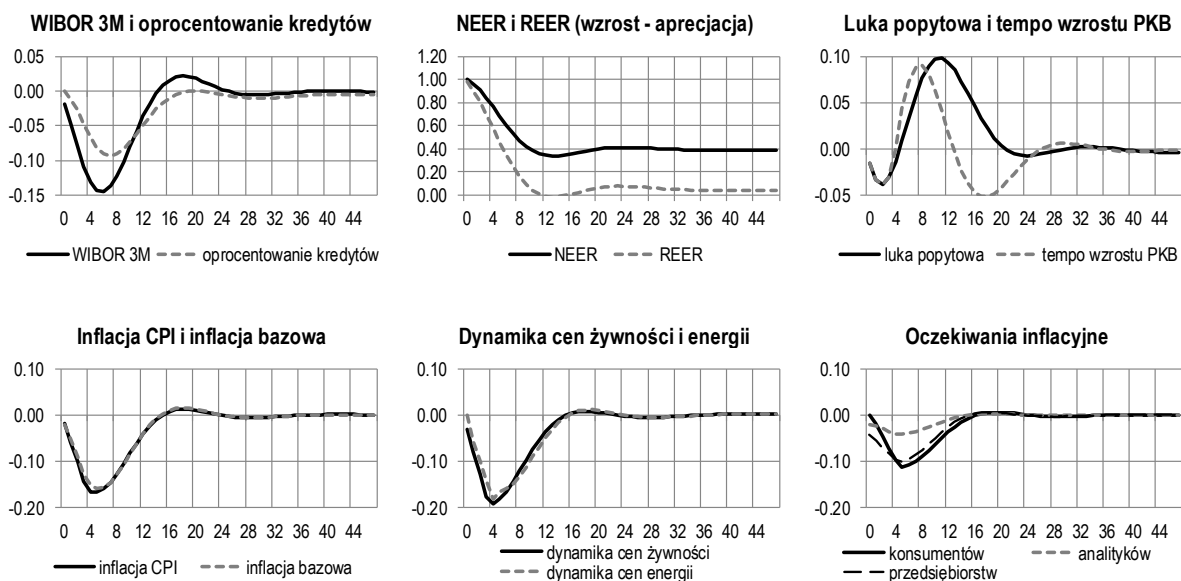


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost krótkoterminowej stopy procentowej o 1 pkt. proc. na okres 4 kwartałów. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

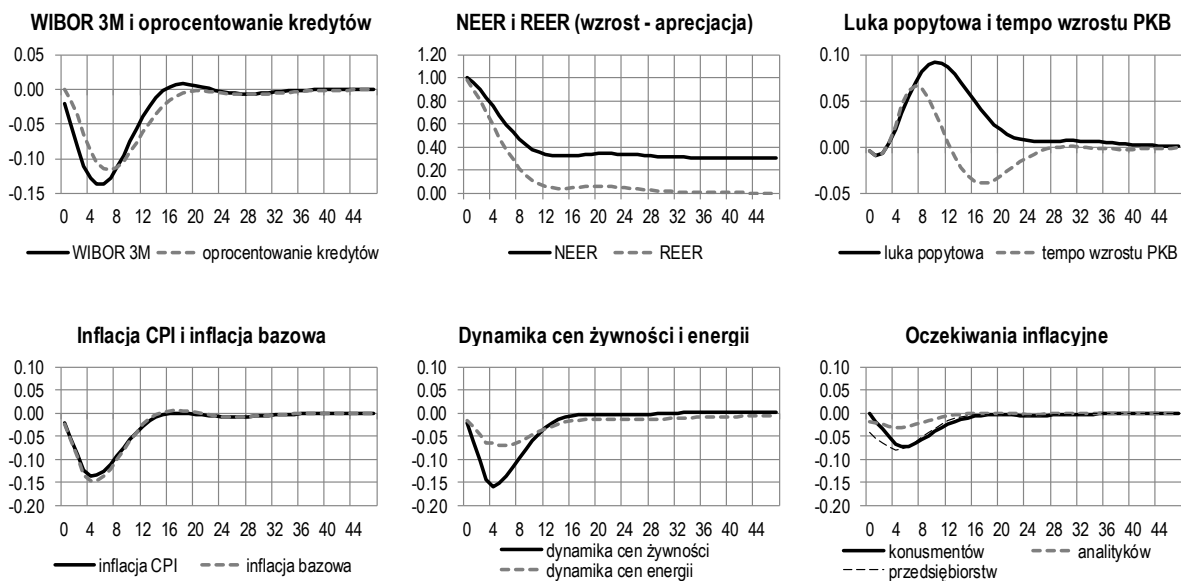
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 3. Funkcje reakcji na impuls nominalnego efektywnego kursu walutowego (NEER)

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

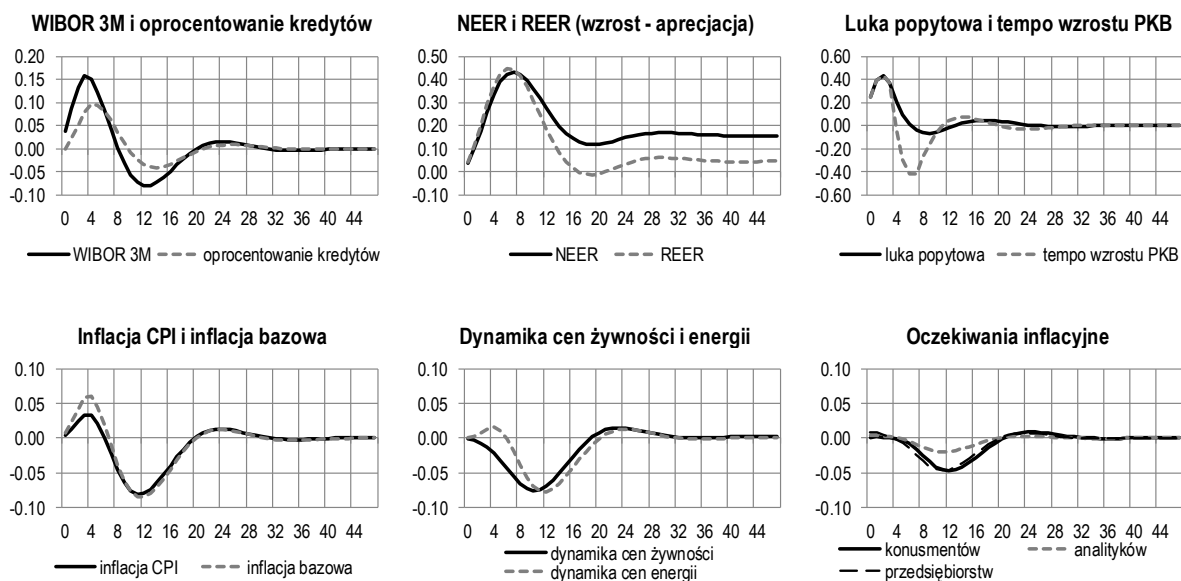


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na aprecjację kursu złotego o 1% na okres 1 kwartału. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

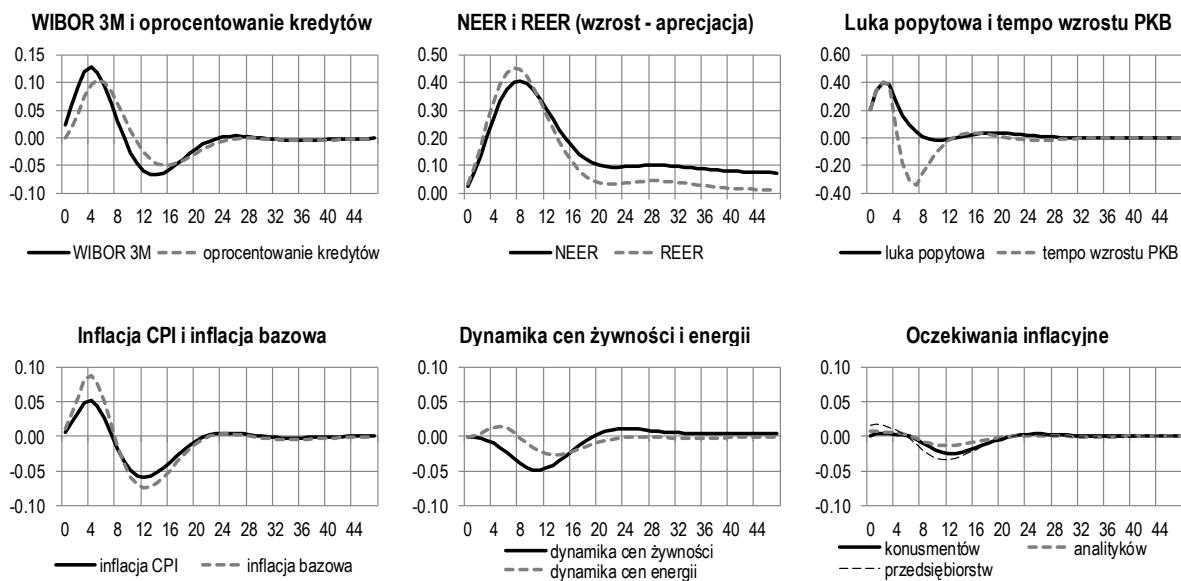
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 4. Funkcje reakcji na impuls popytu zewnętrznego

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

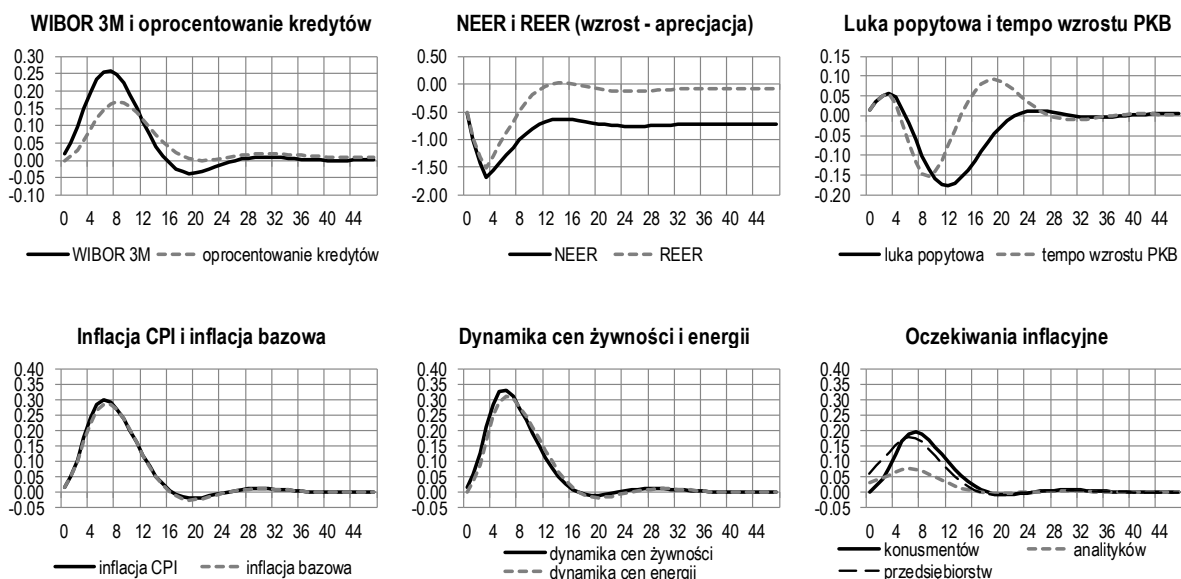


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost luki popytowej strefy euro o 1 pkt. proc. na okres 4 kwartałów. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

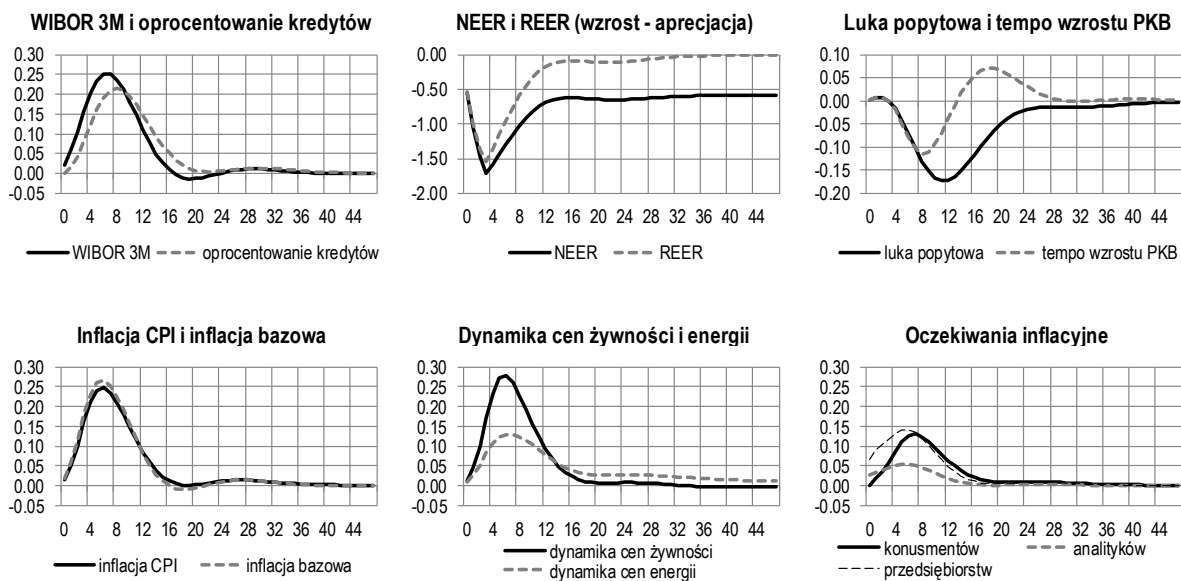
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 5. Funkcje reakcji na impuls zagranicznej stopy procentowej

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

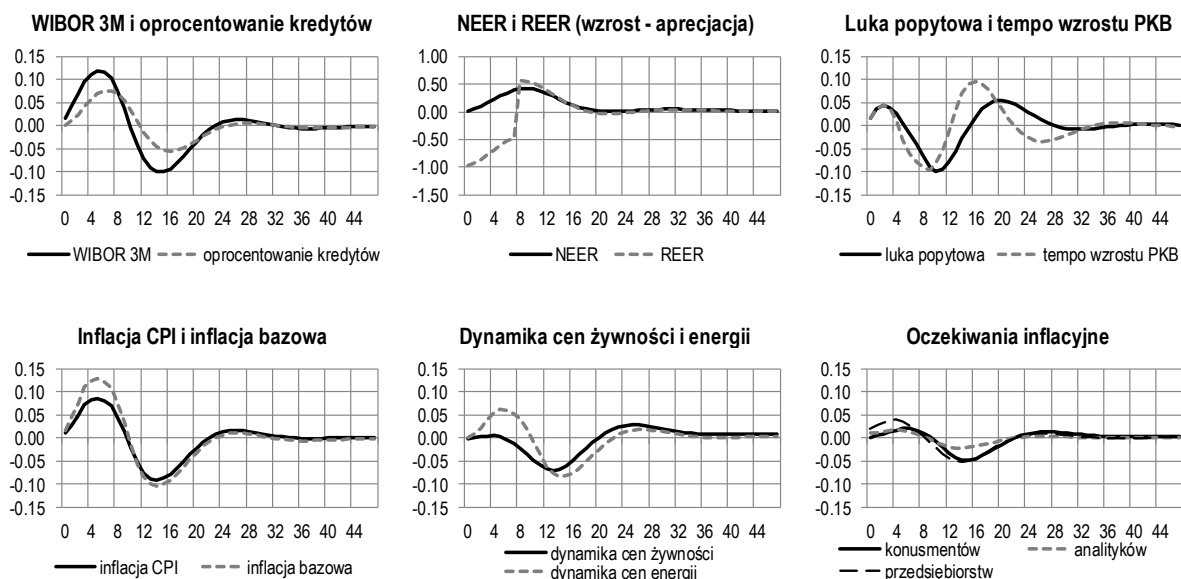


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost krótkoterminowej stopy procentowej w strefie euro o 1 pkt proc. na okres 4 kwartałów. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

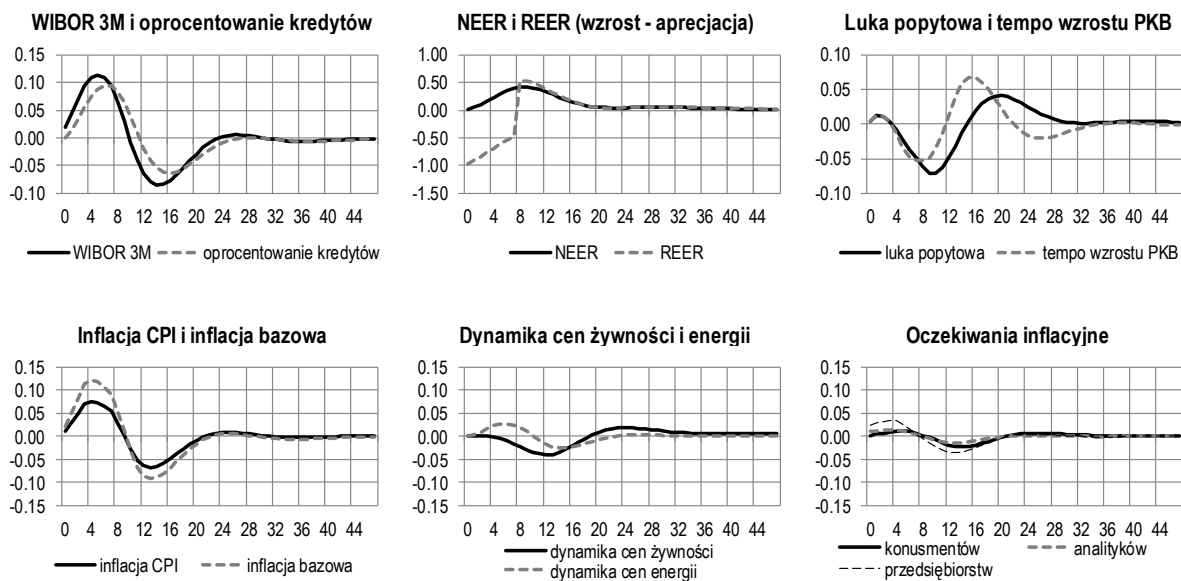
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 6. Funkcje reakcji na impuls cen zewnętrznych

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

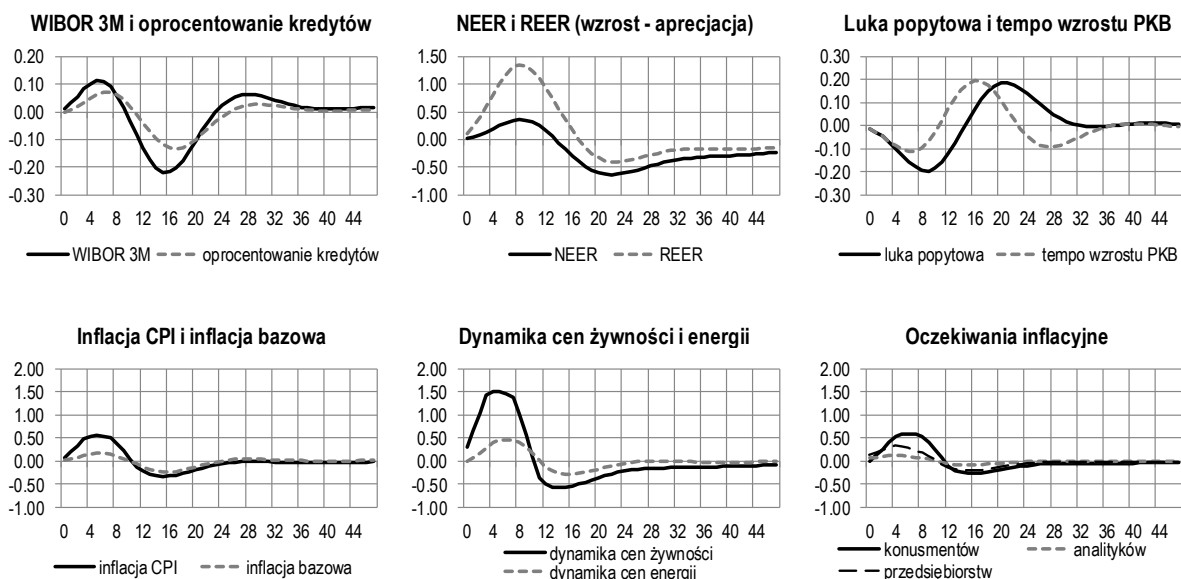


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost poziomu cen w strefie euro o 1% na okres 4 kwartałów. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

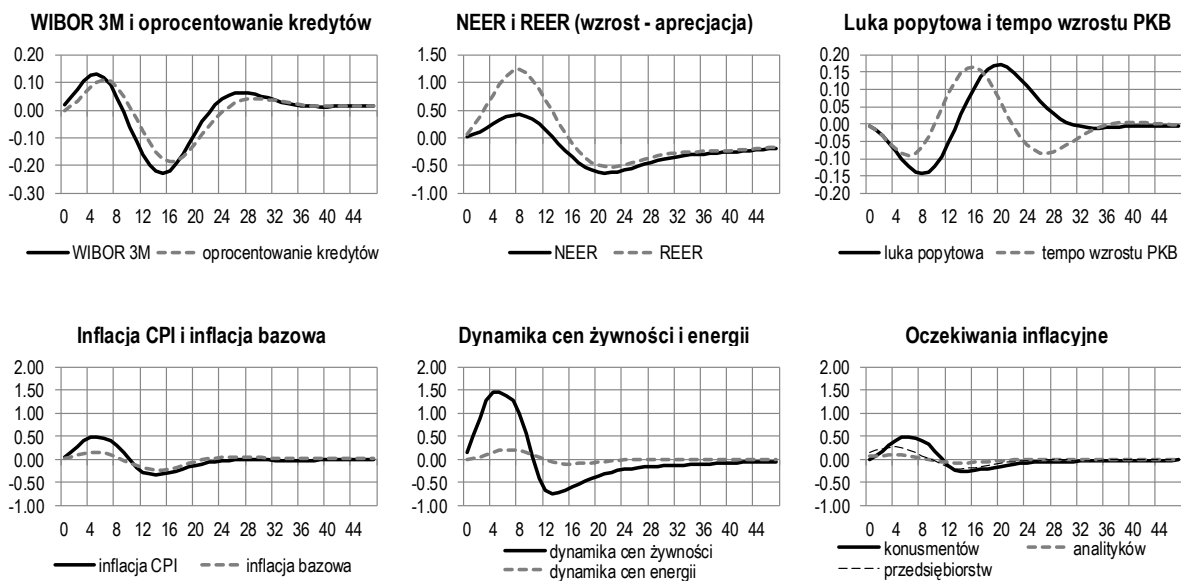
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 7. Funkcje reakcji na impuls cen surowców żywnościowych

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017

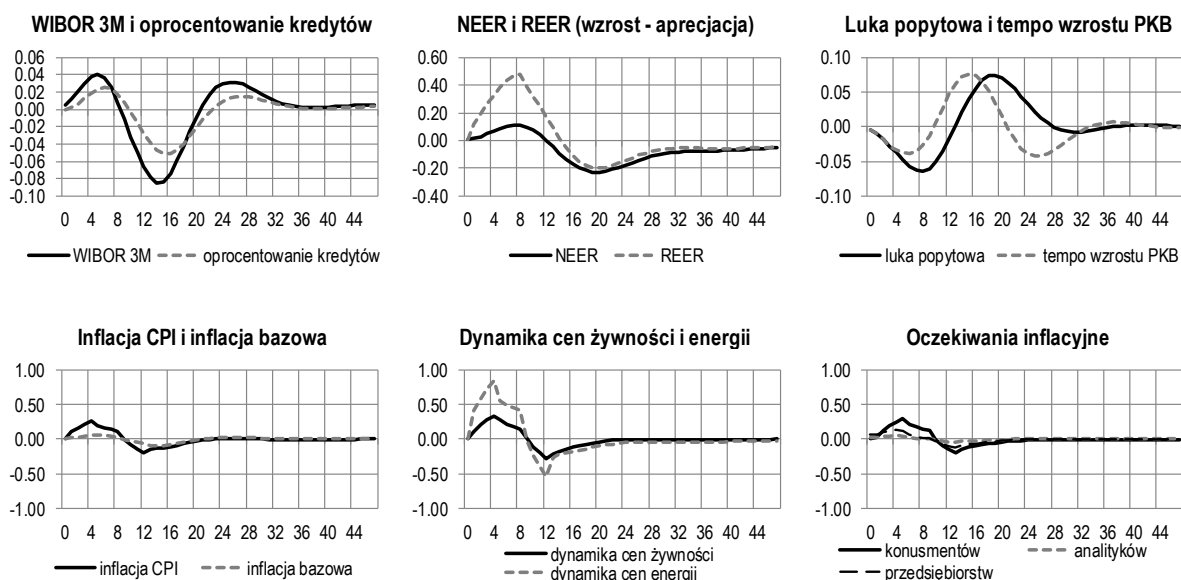


Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost cen surowców żywnościowych na rynkach światowych o 10% na okres 4 kwartałów. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.

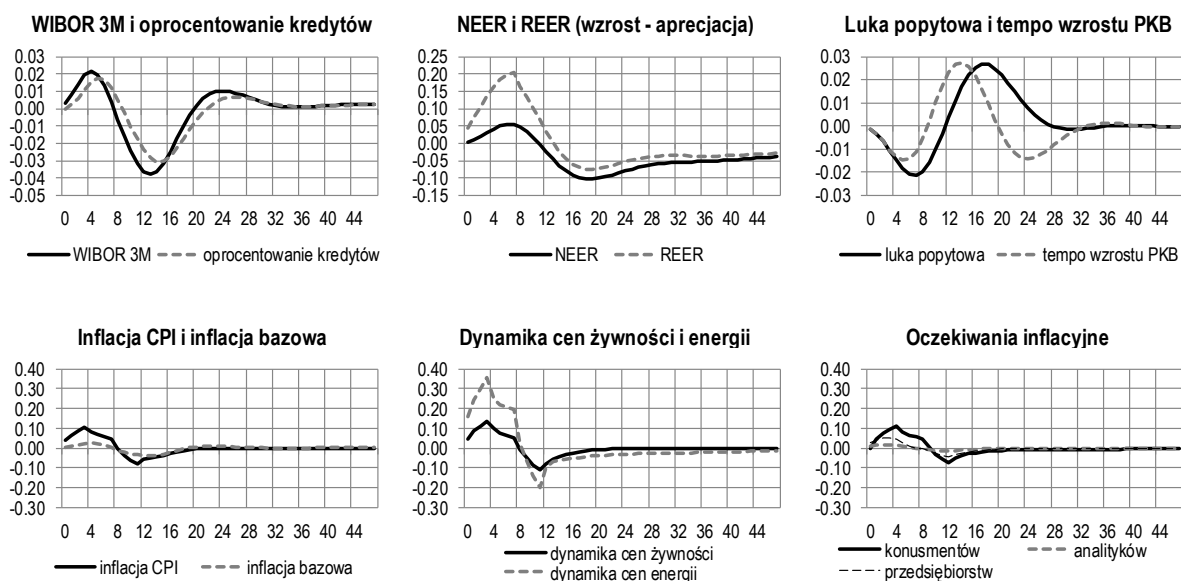
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 8. Funkcje reakcji na impuls cen surowców energetycznych

A. MMPP 2019



B. MMPP 2017



Uwaga: Na powyższych wykresach pokazane są reakcje wybranych zmiennych na wzrost cen surowców energetycznych na rynkach światowych o 10% na okres 4 kwartałów. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po impulsie.
Źródło: obliczenia własne.

Literatura:

Beyer A., Farmer R. E. A., Henry J., Marcellino M. (2008), *Factor analysis in a model with rational expectations*, *Econometrics Journal*, 11, 271-286.
 Cermeño B., Villagómez F. A. (2012), *Monetary policy rules in a small open economy: an application to Mexico*, *Journal of Applied Economics*, XV(2), 259-286.
 Leitemo K., Söderström U. (2005), *Simple monetary policy rules and exchange rate uncertainty*, *Journal of International Money and Finance*, 24, 482-507.

Wyniki badań transmisji stóp procentowych

Ewa Wróbel

Transmisja stóp procentowych – od stopy referencyjnej banku centralnego do stóp rynku pieniężnego, stóp detalicznych w bankach oraz do rentowności papierów skarbowych – stanowi zasadnicze ogniwo kanału stopy procentowej w mechanizmie transmisji monetarnej. Długookresowa relacja między stopą banku centralnego i pozostałymi stopami procentowymi oznacza, że pozostają one z sobą w równowadze, a w razie wystąpienia szoku polityki pieniężnej zakłócającej ową równowagę, po pewnym czasie zostanie ona przywrócona. Z punktu widzenia polityki pieniężnej ważne jest w jakim tempie równowaga jest przywracana i w jakim stopniu zmiany stopy procentowej banku centralnego są przenoszone na inne stopy procentowe. Do analizy dostosowania stóp procentowych wykorzystujemy modele typu ARDL (Pesaran i Shin, 1999). Zgodnie z tym podejściem, występowanie relacji długookresowej testowaliśmy przy pomocy *bounds test* (Pesaran, Shin i Smith, 2001).

1. Transmisja od stopy referencyjnej NBP do stóp rynku pieniężnego

Transmisję od stopy referencyjnej do stóp rynku pieniężnego badamy na próbie od marca 2000 r. (WIBOR1M, WIBOR 3M, WIBOR 6M) lub od marca 2001 r. (WIBOR 9M, WIBOR 1Y) lub od maja 2005 r. (Polonia). We wszystkich przypadkach próba kończy się we wrześniu 2019 r. W przypadku stopy Polonia wykorzystujemy wartości średnie w miesiącu, dla pozostałych stóp – wartości na koniec miesiąca.

Tabela 1 przedstawia wyniki estymacji modeli ARDL dla stóp rynku pieniężnego o różnym terminie zapadalności, zaś Rysunek 1 pokazuje jak przebiega dostosowanie tych stóp do zmian stopy referencyjnej NBP w czasie.

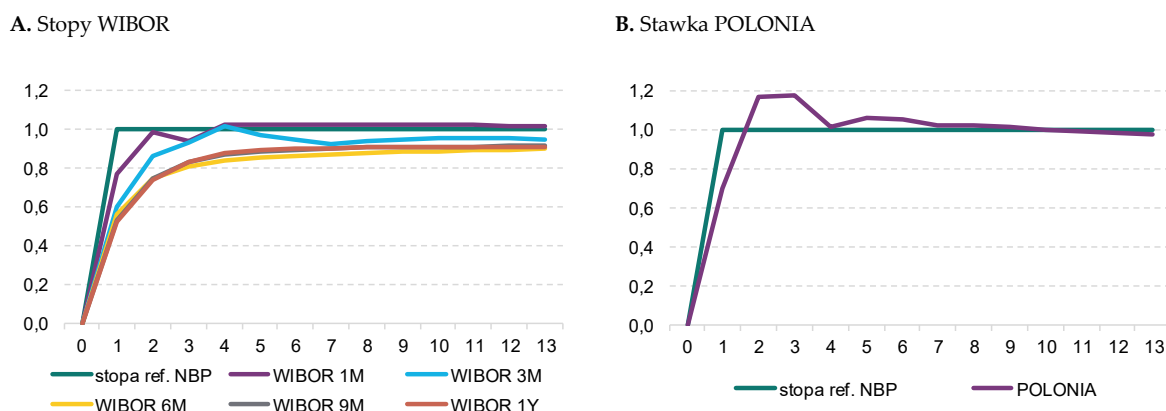
Tabela 1. Oszacowania mnożników długookresowych transmisji stopy referencyjnej do stóp rynku pieniężnego

	ARDL <i>bounds test</i> ⁽¹⁾	Reakcja natychmiastowa	Parametr korekty błędem ⁽²⁾	Współczynnik długookresowy ⁽³⁾
Polonia	3,7 ^a	0,70	-0,19	0,93 T (17,8)
WIBOR1M	17,5 ^d	0,77	-0,35	1,02 N (199,6)
WIBOR3M	8,23 ^d	0,60	-0,11	0,96 T (30,03)
WIBOR6M	6,66 ^d	0,56	-0,09	0,92 T (16,98)
WIBOR9M	4,64 ^b	0,53	-0,10	0,92 T (18,88)
WIBOR1Y	4,44 ^b	0,52	-0,10	0,9 N (16,5)

Uwagi: W nawiasach podano statystykę *t*. (1) Poziom istotności testu ARDL Bounds: a=10%, b=5%, c=2,5%, d=1% (2) Parametr korekty błędem informuje o szybkości dostosowania do stanu równowagi. Im jest on wyższy co do wartości bezwzględnej, tym szybciej stopy procentowe zbiegają do stanu równowagi długookresowej. (3) „T” oznacza, że dostosowanie jest pełne (oszacowanie współczynnika długookresowego nie różni się w statystycznie istotny sposób od 1), „N” – niepełne.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

Rysunek 1. Dostosowanie stóp rynku pieniężnego do wzrostu stopy referencyjnej NBP o 1 pkt. proc.



Uwagi: na osi poziomej zaznaczono liczbę miesięcy po wzroście stopy referencyjnej NBP.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

2. Transmisja od stopy rynku pieniężnego do stóp depozytowych i kredytowych

Do oceny siły przeniesienia zmian stopy rynku pieniężnego (WIBOR 3M) do oprocentowania depozytów i kredytów oferowanych gospodarstwom domowym i przedsiębiorstwom przez banki wykorzystujemy dane zagregowane, tj. średnie ważone oprocentowanie w bankach (nowe i renegotjonowane umowy). Próba obejmowała okres od stycznia 2005 r. do czerwca 2019 r., z wyjątkiem oprocentowania kredytów mieszkaniowych, które analizowaliśmy od maja 2005 r.

Tabela 2 przedstawia wyniki estymacji modeli ARDL dla różnych kategorii depozytów sektora niefinansowego, zaś Tabela 3 zawiera wyniki dla kredytów tego sektora. Rysunek 2 pokazuje jak przebiega dostosowanie oprocentowania depozytów i kredytów do zmian stopy WIBOR 3M w czasie.

Tabela 2. Oszacowania mnożników długookresowych transmisji stóp rynku pieniężnego do stóp depozytowych

	ARDL bounds test ⁽¹⁾	Reakcja natychmiastowa	Parametr korekty błędem ⁽²⁾	Współczynnik długookresowy ⁽³⁾	Podatek od aktywów
Oprocentowanie depozytów przedsiębiorstw					
Depozyty ogółem	4,73 ^b	0,52	-0,15	0,83 N (16,05)	-0,32 (-1,71)
Depozyty do 1 m-ca	5,89 ^d	0,43	-0,19	0,77 N (14,9)	-0,31 (-1,93)
Depozyty od 1 do 3 m-cy	19,2 ^d	0,79	-0,26	1,03 T (42,15)	-0,26 (-3,54)
Oprocentowanie depozytów gospodarstw domowych					
Depozyty ogółem	16,8 ^d	0,42	-0,28	0,88 N	-0,14 (-1,97)
Depozyty do 1 m-ca	4,75 ^b	0,27	-0,14	0,81 N (13,6)	-0,23 (-1,1)
Depozyty od 1 do 3 m-cy	4,62 ^b	0,59	-0,16	0,99 T (12,5)	-0,10 (-0,53)
Depozyty od 3 do 6 m-cy	39,7 ^d	0,51	-0,43	1,0 T (16,8)	-0,11 (-1,52)
Depozyty od 6 do 12 m-cy	32,2 ^d	0,53	-0,60	0,74 N (20,6)	-0,32 (-3,53)
Oprocentowanie depozytów przedsiębiorstw i gospodarstw domowych					
Depozyty ogółem	6,96 ^d	0,48	-0,21	0,85 N (25,3)	-0,19 (-1,6)

Uwagi: W nawiasach podano statystykę *t*. (1) Poziom istotności testu ARDL Bounds: a=10%, b=5%, c=2,5%, d=1% (2) Parametr korekty błędem informuje o szybkości dostosowania do stanu równowagi. Im jest on wyższy co do wartości bezwzględnej, tym szybciej stopy procentowe zbiegają do stanu równowagi długookresowej. (3) „T” oznacza, że dostosowanie jest pełne (oszacowanie współczynnika długookresowego nie różni się w statystycznie istotny sposób od 1), „N” – niepełne.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

Tabela 3. Oszacowania mnożników długookresowych transmisji stóp rynku pieniężnego do stóp kredytowych

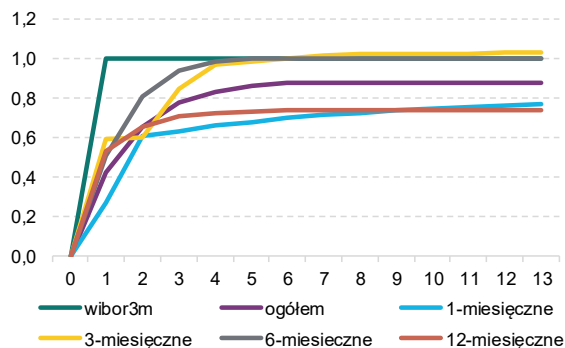
	ARDL bounds test ⁽¹⁾	Reakcja natychmiastowa	Parametr korekty błędem ⁽²⁾	Współczynnik długookresowy ⁽³⁾	Podatek od aktywów	Spread
Oprocentowanie kredytów dla przedsiębiorstw						
Kredyty ogółem	12,6 ^d	1,00	-0,43	0,97 T (28,3)	0,11 (0,85)	0,46 (3,88)
Kredyty od 1 do 4 mln zł	17,2 ^d	0,81	-0,33	1,0 T (21,1)	0,06 (0,34)	0,38 (2,40)
Kredyty pow. 4 mln zł	17,8 ^d	1,10	-0,54	0,93 N (24,0)	0,38 (2,51)	0,49 (3,61)
Oprocentowanie kredytów dla gospodarstw domowych						
Kredyty ogółem ⁽⁴⁾	11,3 ^d	0,65	-0,20	1,3 N (9,97)	-0,14 (-0,27)	0,32 (0,7)
Kredyty dla przedsiębiorców indywidualnych	6,51 ^b	0,45	-0,26	0,99 T (8,04)	0,98 (2,08)	0,77 (1,9)
Kredyty na nieruchomości mieszkaniowe	8,26 ^d	0,52	-0,16	0,78 N (15,99)	0,21 (1,22)	0,83 (5,09)
Kredyty na nieruchomości mieszkaniowe – stopa rzeczywista	17,8 ^d	0,52	-0,26	0,79 N (24,0)	0,01 (0,11)	0,96 (8,55)
Kredyty konsumpcyjne ⁽⁵⁾	6,09 ^b	0,39	-0,15	1,88 N (6,98)	-0,93 (-0,95)	0,37 (0,46)
Kredyty konsumpcyjne – stopa rzeczywista ⁽⁵⁾	7,28 ^c	0,46	-0,21	1,5 T (5,14)	-0,7 (-0,69)	0,41 (0,57)
Oprocentowanie kredytów dla przedsiębiorstw i gospodarstw domowych						
Kredyty ogółem	16,8 ^d	0,66	-0,33	1,16 T (12,55)	-0,40 (-1,2)	1,35 (4,96)

Uwagi: W nawiasach podano statystykę *t*. (1) Poziom istotności testu ARDL Bounds: a=10%, b=5%, c=2,5%, d=1% (2) Parametr korekty błędem informuje o szybkości dostosowania do stanu równowagi. Im jest on wyższy co do wartości bezwzględnej, tym szybciej stopy procentowe zbiegają do stanu równowagi długookresowej. (3) „T” oznacza, że dostosowanie jest pełne (oszacowanie współczynnika długookresowego nie różni się w statystycznie istotny sposób od 1), „N” – niepełne. (4) Z danych usunięto obserwację z października 2009 jako nietypową. (5) Dodatkowo do modelu wprowadzono roczną zmianę stopy bezrobocia.

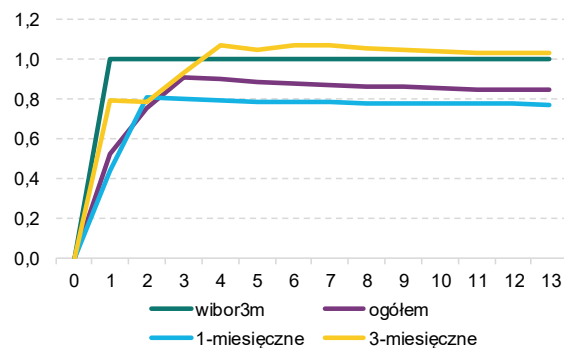
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

Rysunek 2. Dostosowanie oprocentowania depozytów i kredytów do zmiany stopy WIBOR 3M o 1 pkt. proc., przy założeniu symetrii dostosowań

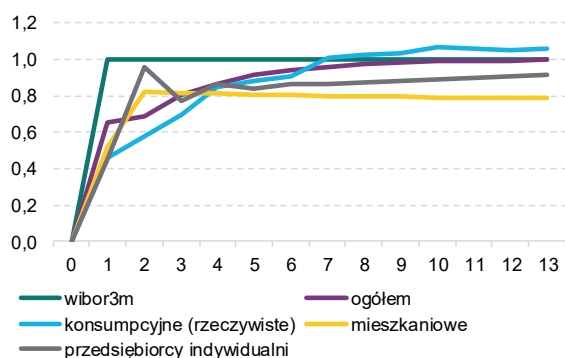
A. Oprocentowanie depozytów gospodarstw domowych



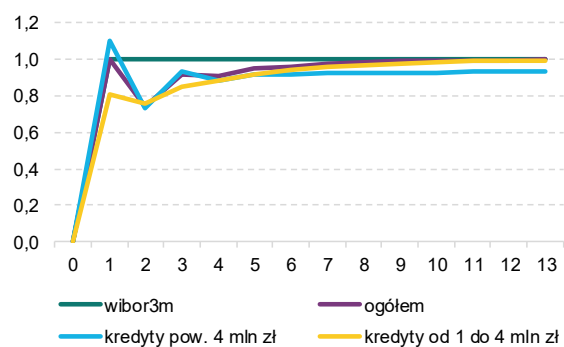
B. Oprocentowanie depozytów przedsiębiorstw



C. Oprocentowanie kredytów dla gospodarstw domowych



D. Oprocentowanie kredytów dla przedsiębiorstw



Uwagi: na osi poziomej zaznaczono liczbę miesięcy po wzroście stopy WIBOR 3M. Ponieważ w modelu oprocentowania stopy rzeczywistej kredytów konsumpcyjnych i kredytów dla przedsiębiorstw ogółem nie można odrzucić hipotezy pełnego dostosowania, na wykresach pokazujemy dostosowanie z modeli, w którym nakładamy taką restrykcję.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych NBP.

3. Transmisja od stopy rynku pieniężnego do rentowności obligacji rządowych

Dostosowania rentowności obligacji do stopy referencyjnej NBP lub stóp procentowych rynku pieniężnego badaliśmy na danych miesięcznych. Próba obejmowała okres od czerwca 2000 do czerwca 2019. Z próby wykluczaliśmy początek roku 2000 z uwagi na znaczne zaburzenia nie mające charakteru ekonomicznego, związane z tzw. „problemem roku 2000”.

Związek rentowności obligacji ze stopą referencyjną, która pozostawała stała w długich okresach, jest problematyczny. Potwierdzają to formalne testy. O ile *F-Bounds test* skłania do przyjęcia, że istnieje między tymi stopami związek długookresowy, to *t-Bounds test* go wyklucza. Kointegrację zmiennych wyklucza też test Johansena. Z tego powodu przedstawiamy relacje między rentownościami obligacji a stopą WIBOR 3M, na którą NBP ma pośredni wpływ. Wyniki estymacji modeli ARDL dla obligacji o różnym terminie wykupu przedstawia Tabela 4.

Tabela 4. Oszacowania mnożników długookresowych transmisji stopy WIBOR 3M do rentowności obligacji

	ARDL bounds test ⁽¹⁾	Reakcja natychmiastowa	Parametr korekty błędem ⁽²⁾	Współczynnik długookresowy ⁽³⁾
Obligacje 1-letnie	4,8 ^a	0,76	-0,06	0,84 T (9,0)
Obligacje 2-letnie	5,78 ^b	0,86	-0,08	0,78 N (10,6)
Obligacje 5-letnie	5,69 ^a	0,59	-0,08	0,61 N (9,6)
Obligacje 10-letnie	3,55	--	--	--

Uwagi: W nawiasach podano statystykę *t*. (1) Poziom istotności testu ARDL Bounds: a=10%, b=5%, c=2,5%, d=1% (2) Parametr korekty błędem informuje o szybkości dostosowania do stanu równowagi. Im jest on wyższy co do wartości bezwzględnej, tym szybciej stopy procentowe zbiegają do stanu równowagi długookresowej. (3) „T” oznacza, że dostosowanie jest pełne (oszacowanie współczynnika długookresowego nie różni się w statystycznie istotny sposób od 1), „N” – niepełne.

Źródło: obliczenia własne.

Literatura:

Pesaran M., Shin Y. (1999), *An autoregressive distributed lag modelling approach to cointegration analysis*. In S. Strom (Ed.), *Econometrics and economic theory in the 20th century: The Ragnar frisch centennial symposium*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pesaran M. H., Shin Y., Smith R. J. (2001), *Bounds testing approaches to the analysis of level relationships*. *Journal of Applied Econometrics*, 16(3), 289–326.

Wpływ kursu walutowego na eksport i import towarów i usług na poziomie zdezagregowanym z uwzględnieniem globalnych łańcuchów produkcji

Jan Przystupa

1. Udział Polski w globalnych łańcuchach produkcji

W pierwszym etapie badania szacujemy dla Polski zagraniczną wartość dodaną w eksporcie (FVA), krajową wartość dodaną w eksporcie innych krajów (DVX), krajową wartość dodaną (DVA) oraz udział Polski w globalnych łańcuchach produkcji (GVC):

$$GVC=(FVA+DVX)/(FVA+DVX+DVA)$$

Wykorzystaliśmy tablice przepływów międzygałęziowych Eora26 Multi-Region Input-Output opracowane przez UNCTAD dla 189 krajów i 26 sektorów (13 sekcji towarowych, 12 sekcji usług plus reeksport i reimport) dla lat 1990-2015. Dla eksportu ogółem z lat 2016-2018 wykorzystaliśmy dane z bazy COMTRADE. Obliczenia zostały przeprowadzone zgodnie algorytmem proponowanym przez Koopman *et al.* (2014) i zastosowanym do danych UNCTAD przez Aslam *et al.* (2017), przedstawionym poniżej.

Punktem wyjścia jest podstawowe równanie bilansowe ($X = Y + AX + E$, gdzie X to produkt globalny, Y – popyt finalny, A – macierz kosztów, E – eksport), które po przekształceniu ma następującą postać:

$$X = (I - A)^{-1}Y + (I - A)^{-1}E$$

Jeżeli $(I - A)^{-1} = B$, gdzie B to odwrotna macierz Leontiefa (macierz współczynników pełnej materiałochłonności) a I to macierz jednostkowa, to mnożąc lewostronnie B przez wektor V (wektor współczynników udziału wartości dodanej w produkcji globalnej danego kraju) i po kolejnych przekształceniach otrzymuje się dla kraju eksportującego (s) i kraju partnerskiego (r) następujące równanie eksportu w danej sekcji:

$$\begin{aligned} E_{s*} = & \left\{ V_s \sum_{r \neq s}^G B_{ss} Y_{sr} + V_s \sum_{r \neq s}^G B_{sr} Y_{rr} + V_s \sum_{r \neq s}^G \sum_{t \neq sr}^G B_{sr} Y_{rt} \right\} + \left\{ V_s \sum_{r \neq s}^G B_{sr} Y_{rs} + V_s \sum_{r \neq s}^G B_{sr} A_{rs} (I - A_{ss})^{-1} Y_{ss} \right\} \\ & + V_s \sum_{r \neq s}^G B_{sr} A_{rs} (I - A_{ss})^{-1} E_{s*} + \left\{ \sum_{t \neq s}^G \sum_{r \neq s}^G V_t B_{ts} Y_{sr} + \sum_{t \neq s}^G \sum_{r \neq s}^G V_t B_{ts} A_{sr} (I - A_{rr})^{-1} Y_{rr} \right\} \\ & + \sum_{t \neq s}^G V_t B_{ts} A_{sr} \sum_{r \neq s}^G (I - A_{rr})^{-1} E_{r*} \end{aligned}$$

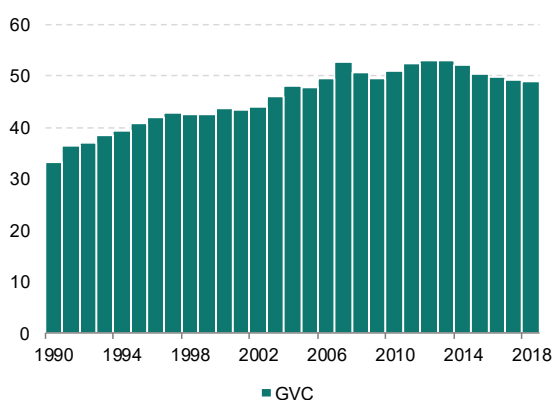
W powyższym równaniu pozycje (1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6) określają krajową wartość dodaną wykorzystaną w krajach przeznaczenia eksportu (DVA+DVX), w tym DVX odpowiada pozycjom (3)+(4)+(5)+(6). Pozycje

(7)+(8)+(9) określają zagraniczną wartość dodaną w eksporcie danego kraju (FVA), zaś pozycje (6) i (9), bez nawiasów, pokazują podwójnie liczony eksport danego kraju (przekraczający granicę nie mniej niż dwukrotnie).

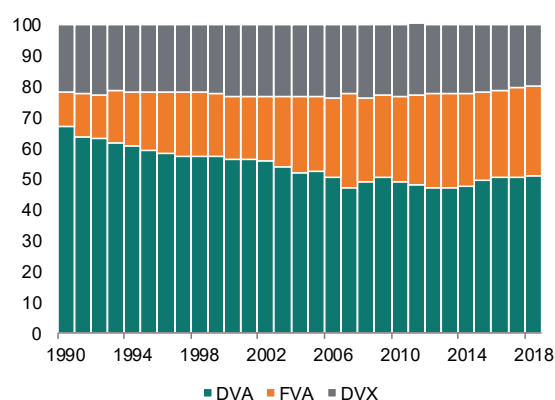
Poniżej przedstawiamy podstawowe wyniki dla Polski (Rysunek 1, Rysunek 2) otrzymane z wykorzystaniem oprogramowania udostępnionego przez Aslam *et al.* (2017), które liczy wszystkie dziewięć pozycji oddzielnie, oraz dodając do tego programu możliwość wyprowadzania obliczeń pośrednich (np. macierze Leontiefa) dla wszystkich krajów i sekcji.

Rysunek 1. Udział polskiego eksportu w globalnych łańcuchach produkcji

A. Globalne łańcuchy produkcji, wartość (GVC)



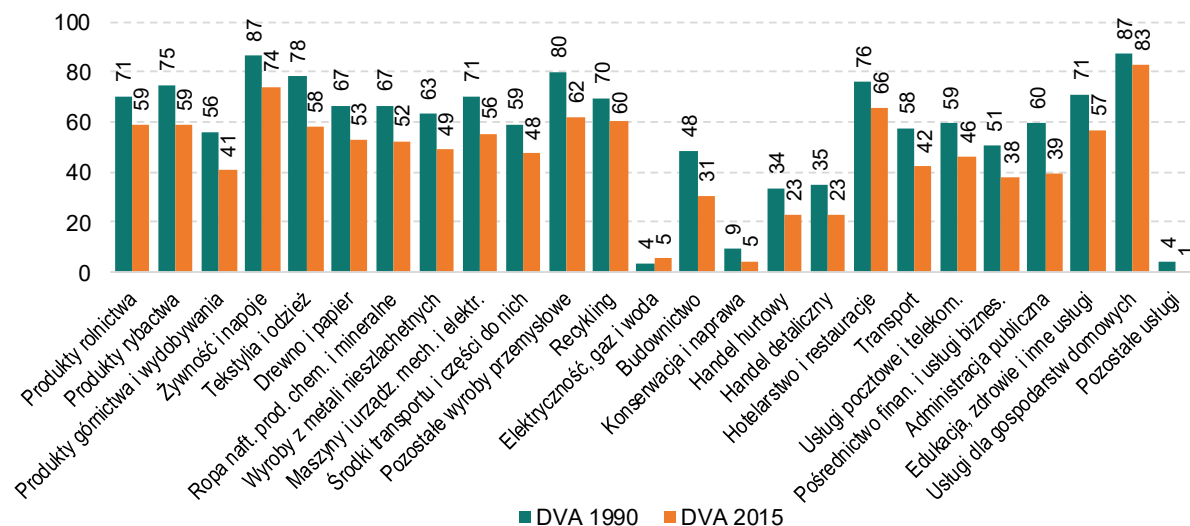
B. Krajowa wartość dodana w eksporcie (DVA), zagraniczna wartość dodana w eksporcie (FVA) i krajowa wartość dodana w eksporcie innych krajów (DVX)



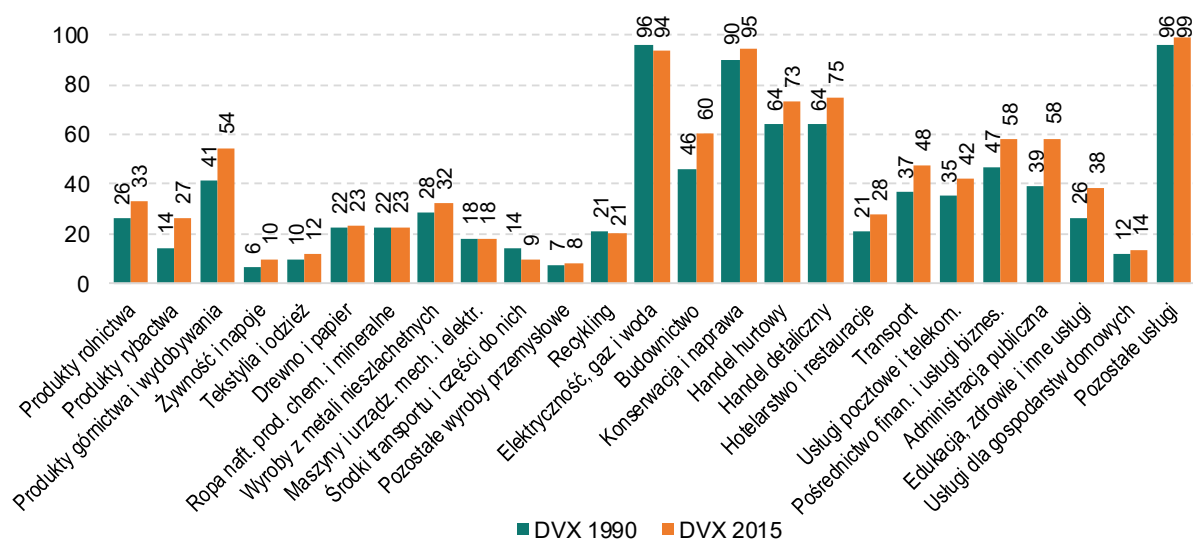
Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych UNCTAD Eora26 i COMTRADE.

Rysunek 2. Udział polskiego eksportu w globalnych łańcuchach produkcji według sekcji

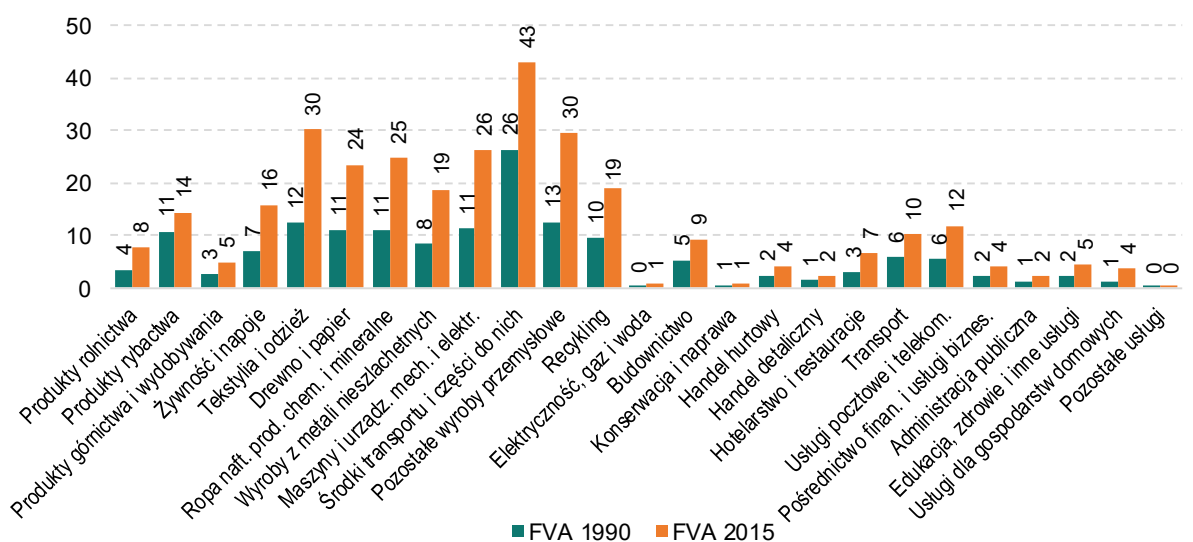
A. Krajowa wartość dodana w eksporcie (DVA)



B. Krajowa wartość dodana w eksporcie innych krajów (DVX)



C. Zagraniczna wartość dodana w eksporcie (FVA)



Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych UNCTAD Eora26 i COMTRADE.

2. Wyniki z modelu BVAR dla wolumenu eksportu

Model

W drugim etapie badania zbudowaliśmy strukturalny VAR z założeniem blokowej egzogeniczności. Założenie to jest stosowane zazwyczaj przy modelowaniu transmisji szoków ekonomicznych między dużymi (globalnymi) a małymi, otwartymi (Polska) gospodarkami. Model był estymowany przy pomocy metod bayesowskich i dalej będzie określany jako BVAR.

Przejsie do tego etapu badania wymagało obliczenia wskaźników wolumenu eksportu ogółem i w sekcjach. Dla eksportu ogółem zastosowano indeks cen transakcyjnych w eksporcie, natomiast dla poszczególnych sekcji wykorzystano *IMF Commodity Export Price Index* ważony strukturą polskiego eksportu i obejmu-

jący surowce oraz wyroby o niskim stopniu przetworzenia, z wyjątkiem produktów rolnictwa i wydobywania (miedź), dla których zastosowano odrębne indeksy cen (żywności nieprzetworzonej oraz cen miedzi) (Rysunek 3). Dla dóbr o średnim i wysokim stopniu przetworzenia zastosowano ważony strukturą polskiego eksportu *OECD Manufactured Goods Export Price Index* (Rysunek 4).

Rysunek 3. IMF Commodity Export Price Index ważony strukturą polskiego eksportu, czerwiec 2012=100



Źródło: IMF.

Rysunek 4. OECD Manufactured Goods Export Price Index



Źródło: OECD Database.

W estymowanych modelach jest sześć zmiennych obserwowalnych:

- wolumen polskiego eksportu: eksport ogółem i w 26 sekcjach (Exp_vol_PL),
- udział Polski w globalnych łańcuchach produkcji: ($GVC_PL(4)$): jedna z czterech zmiennych – GVC, FVA, DVX, DVA – testowanych oddzielnie, w parach $GVC_PL(4)$ – $NER_PL(6)$,
- popyt zewnętrzny ważony strukturą polskiego eksportu ($World_D_PL$),
- ceny światowe ważone strukturą polskiego eksportu ($World_P_PL$, Rysunek 3 i Rysunek 4),
- stopa WIBOR 3M (IR_PL)
- kurs złotego ($NER_PL(6)$).

W przypadku kursu złotego bierzemy pod uwagę sześć zmiennych, tj. kursy złotego testowane dla wolumenu eksportu ogółem i w 26 sekcjach: nominalny efektywny kurs złotego (NER), kurs nominalny PLN/USD lub PLN/EUR, realny efektywny kurs złotego deflowany relatywnym CPI (RER_CPI), realny efektywny kurs złotego deflowany relatywnym PPI (RER_PPI), realny efektywny kurs złotego deflowany relatywnymi jednostkowymi kosztami pracy – ULC (RER_ULC). Do każdego rodzaju kursu oddzielnie przypisywano po kolei GVC, FVA, DVX, DVA dla eksportu ogółem i w sekcjach.

W modelu identyfikujemy szok popytu globalnego (WD), podaży globalnej (WS), cen światowych (WP), szok GVC odpowiadający realizacji zagranicznej inwestycji bezpośredniej (GVC), krajowej polityki pieniężnej (MP), egzogeniczny szok kursowy powodujący aprecjację kursu złotego (FX).

BVAR był estymowany dla dwóch opóźnień według odpowiednio dostosowanego algorytmu jak u Komunale i Kunovac (2017), z restrykcjami rozumianymi i liczonymi jak w pracy Arias, Rubio-Ramirez i Waggoner (2018).

Nałożone restrykcje opisuje macierz:

$$\begin{array}{cccccc}
 & Exp_vol_PL & GVC_PL(4) & World_D_PL & World_P_PL & IR_PL & NER_PL(6) & \\
 Restr = & \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & . & . & . & 0 & . \\
 -1 & . & . & -1 & 0 & . \\
 1 & . & . & . & . & . \\
 1 & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & 1 & 1 \\
 -1 & . & . & . & . & .
 \end{array} \right] & \begin{array}{l}
 WD \\
 WS \\
 WP \\
 GVC \\
 MP \\
 FX
 \end{array}
 \end{array}$$

gdzie: 1 oznacza znak (+), -1 oznacza znak (-), 0 oznacza restrykcję zerową, a „.” oznacza brak restrykcji.

Wyniki

Na wykresach poniżej prezentujemy otrzymane wyniki (Rysunek 5 – Rysunek 35). Warto zwrócić uwagę na kurs walutowy i GVC. Oprócz produktów rolnictwa i żywności, dla których istotny jest kurs nominalny, w każdym innym przypadku ani kurs nominalny, ani kurs realny deflowany relatywnymi CPI i PPI, nie wyjaśniają zmian wolumenu eksportu. Natomiast dla eksportu ogółem i 24 pozostałych sekcji istotną rolę odgrywa kurs realny deflowany relatywnymi jednostkowymi kosztami pracy (RER_ULC).

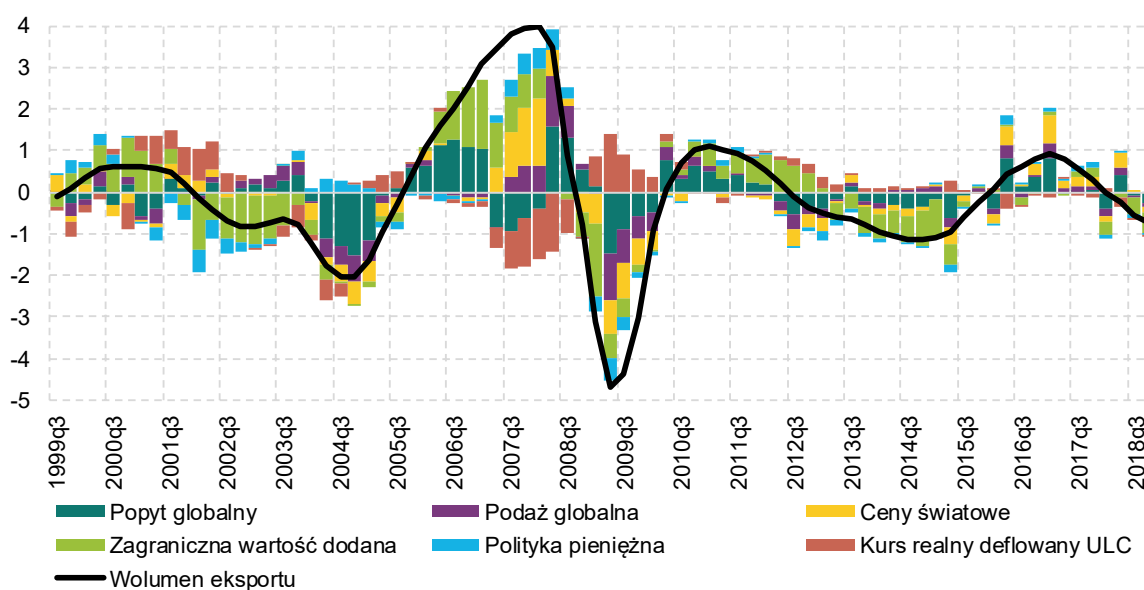
Uzyskane wyniki można podsumować następująco. W eksporcie towarów istnieje wyraźna zależność między udziałem w globalnych łańcuchach produkcji a stopniem przetworzenia produktów oraz rolą kursu walutowego. Większy udział zagranicznej wartości dodanej prowadzi do wzrostu eksportu bardziej zaawansowanego technologicznie i spadku roli realnego kursu złotego deflowanego relatywnymi kosztami pracy. Kurs nominalny, z wyjątkiem produktów rolnych oraz żywności i napojów, w żadnym z pozostałych BVAR-ów nie jest istotny. Spadek znaczenia kursu realnego wynika ze sposobu fakturowania produktów w sekcjach o dużym udziale FVA. Wydaje się również, że na poziomie sekcji udział w globalnych łańcuchach wartości nie zmniejsza zależności eksportu od wahań popytu zewnętrznego.

Efekt przeniesienia zmian kursu (ERPT) na wolumen eksportu, poza usługami, jest znacząco mniejszy niż ERPT związany z udziałem w GVC. Wartość pierwszego efektu dla produktów o niskim stopniu przetworzenia, praco- i materiałochłonnych jest relatywnie wysoka w okresach złej koniunktury, spada przy dobrej koniunkturze – wspomaga więc eksport przede wszystkim podczas gorszej sytuacji gospodarczej. Dla produktów o wyższym stopniu przetworzenia obserwuje się odwrotną tendencję i jednocześnie większą bezwładność reakcji. Efekt przeniesienia zmian kursu związany z udziałem w GVC pokazuje, że udział w globalnych łańcuchach produkcji wyraźnie przyspiesza dynamikę wolumenu eksportu tylko w okresie dobrej koniunktury, bardziej niż liniowo wspomagając oddziaływanie popytu zewnętrznego.

Kolejną cechą charakterystyczną dla eksportu na poziomie sekcji jest duży udział krajowej wartości dodanej w eksporcie krajów trzecich (DVX) dla surowców lub półproduktów o niskim stopniu przetworzenia (30-50%). Natomiast bardzo niski jest udział dla produktów o średnim i wysokim stopniu przetworzenia (poniżej 10%), co oznacza, że cały proces technologiczno-innowacyjny odbywa się poza Polską. Polska dodaje swoją wartość dodaną (montaż) do importowanych dóbr pośrednich, eksportowanych następnie w ramach GVC.

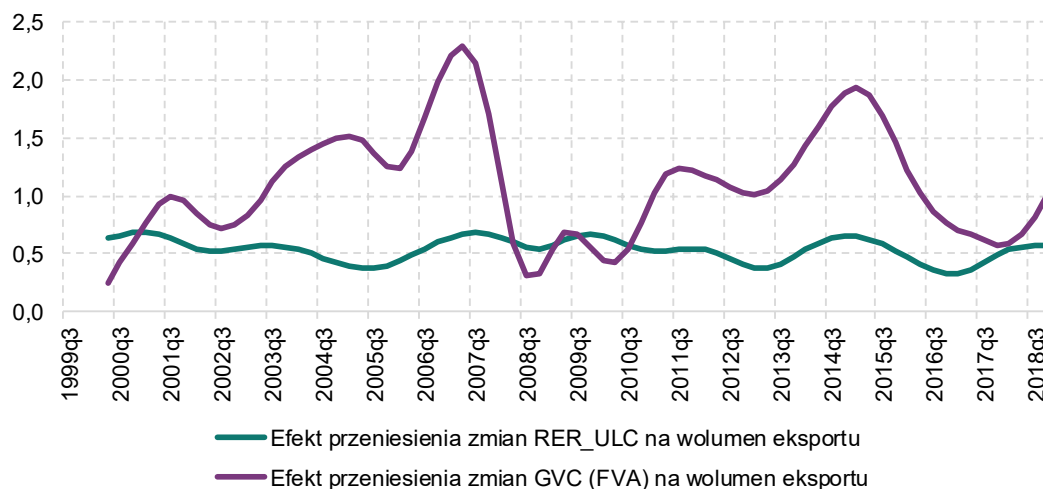
Wolumen eksportu ogółem

Rysunek 5. Dekompozycja wolumenu eksportu ogółem



Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 6. Efekt przeniesienia kursu realnego (RER_ULC) i zagranicznej wartości dodanej w eksporcie (FVA) na wolumen eksportu

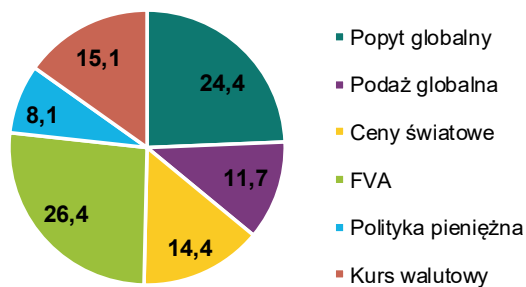


Uwagi: Kurs realny jest deflowany relatywnymi jednostkowymi kosztami pracy.

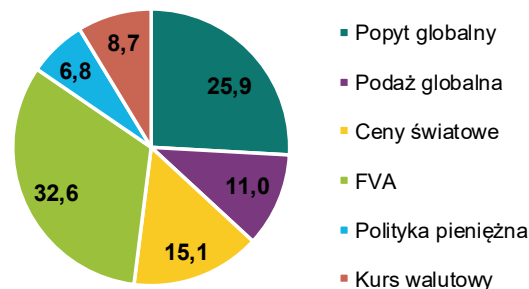
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 7. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Lata 2000-2018



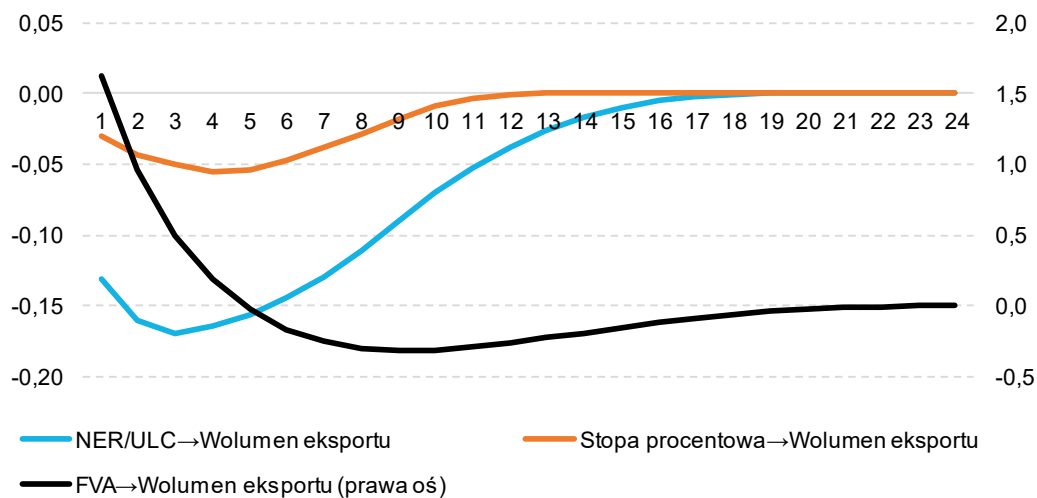
B. Lata 2011-2018



Uwagi: Kurs walutowy to kurs realny deflowany relatywnymi jednostkowymi kosztami pracy.

Źródło: Obliczenia własne.

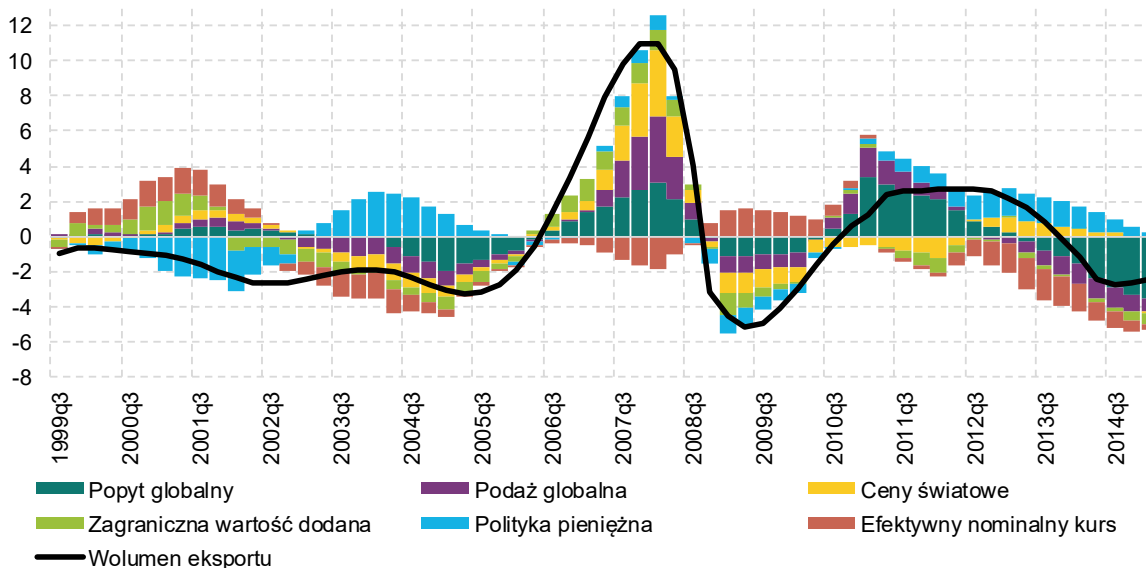
Rysunek 8. Reakcja przyrostu wolumenu eksportu na szok kursu realnego (RER_ULC), zagranicznej wartości dodanej w eksporcie (FVA) i polityki pieniężnej (PM)



Uwagi: Kurs realny jest deflowany relatywnymi jednostkowymi kosztami pracy.

Źródło: Obliczenia własne.

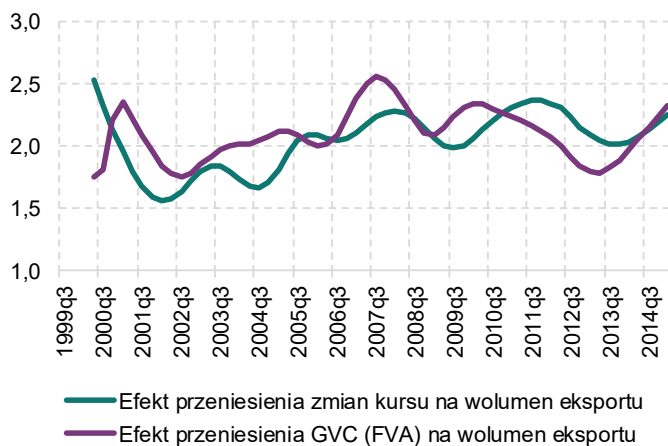
Rysunek 9. Dekompozycja wolumenu eksportu



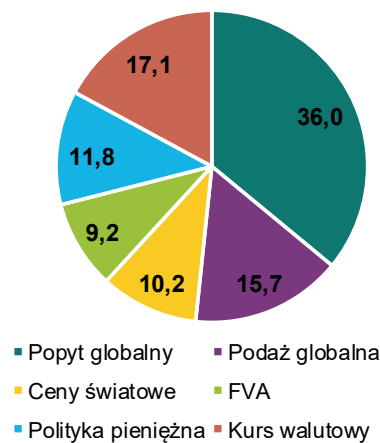
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 10. Efekt przeniesienia zmian kursu (NER) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia NER i FVA na wolumen eksportu

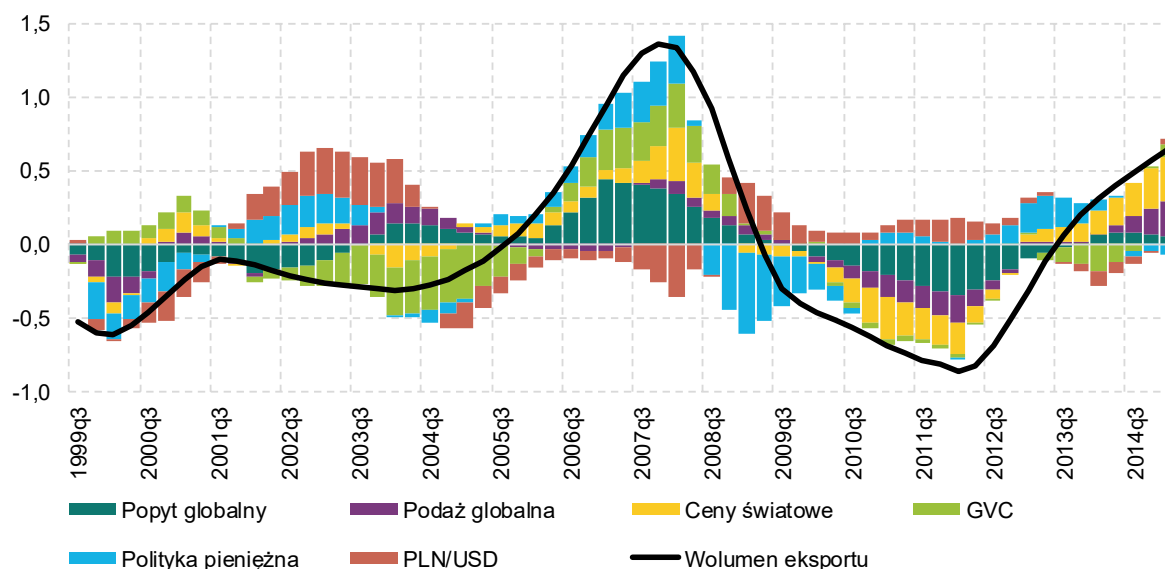


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

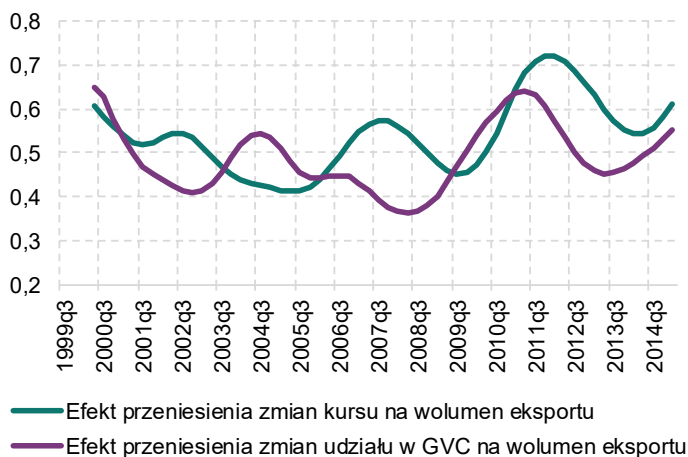
Rysunek 11. Dekompozycja wolumenu eksportu



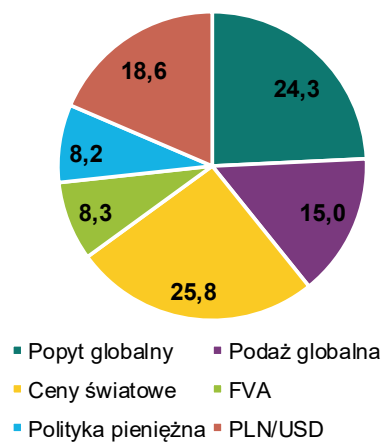
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 12. Efekt przeniesienia zmian kursu (PLN/USD) i GVC na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (PLN/USD) i FVA na wolumen eksportu

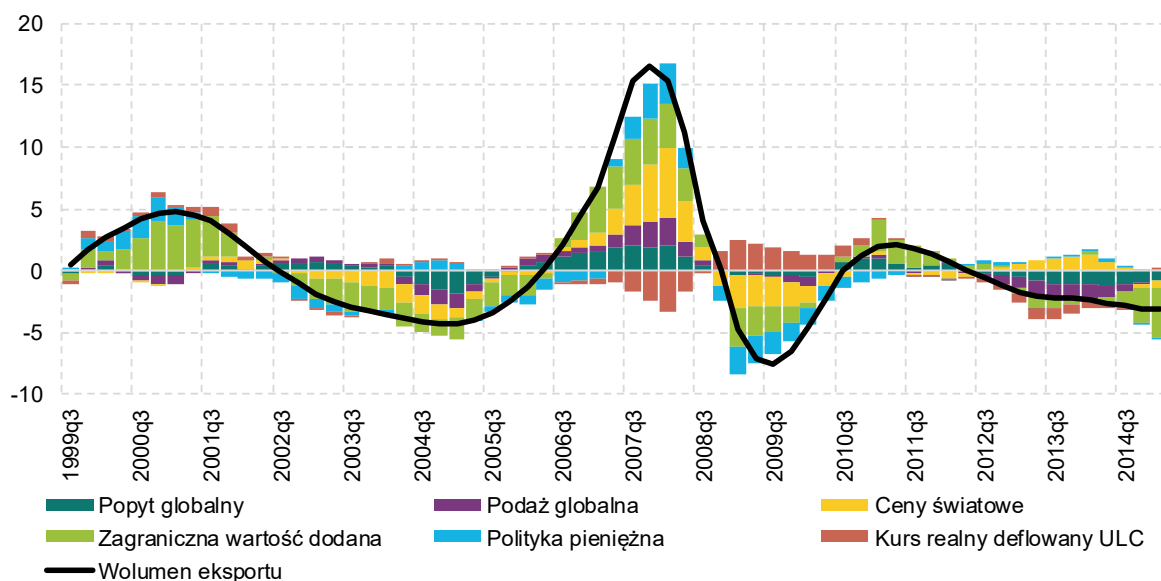


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

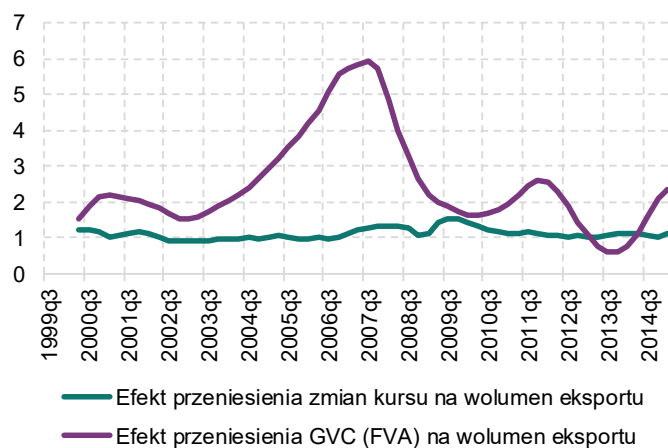
Rysunek 13. Dekompozycja wolumenu eksportu



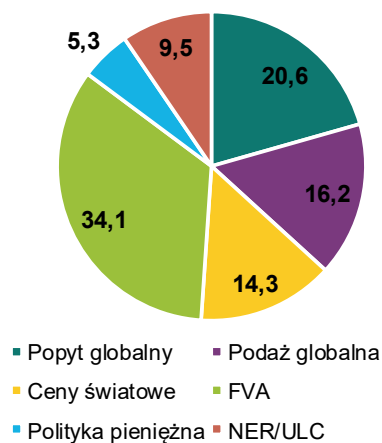
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 14. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu

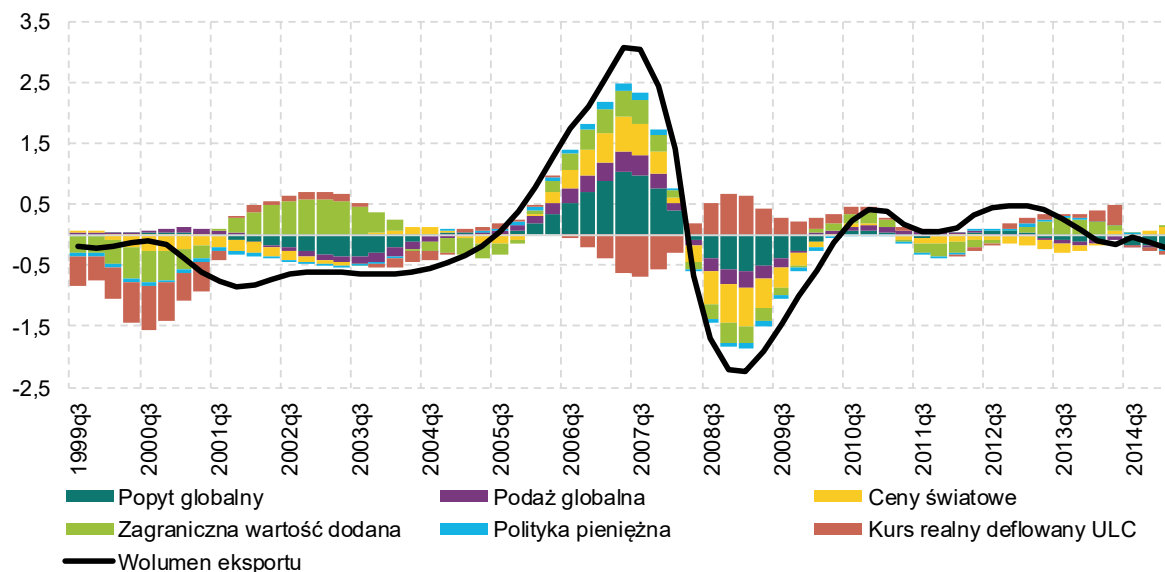


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

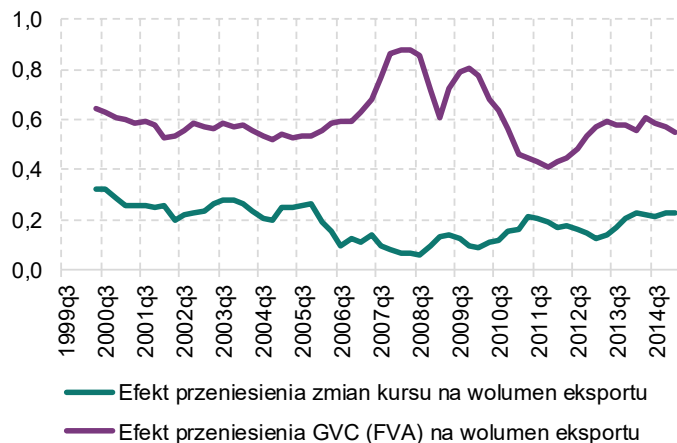
Rysunek 15. Dekompozycja wolumenu eksportu



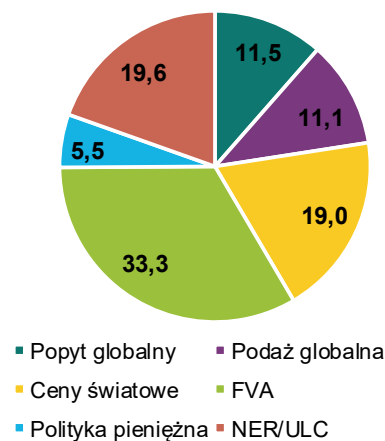
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 16. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu RER_ULC i FVA na wolumen eksportu

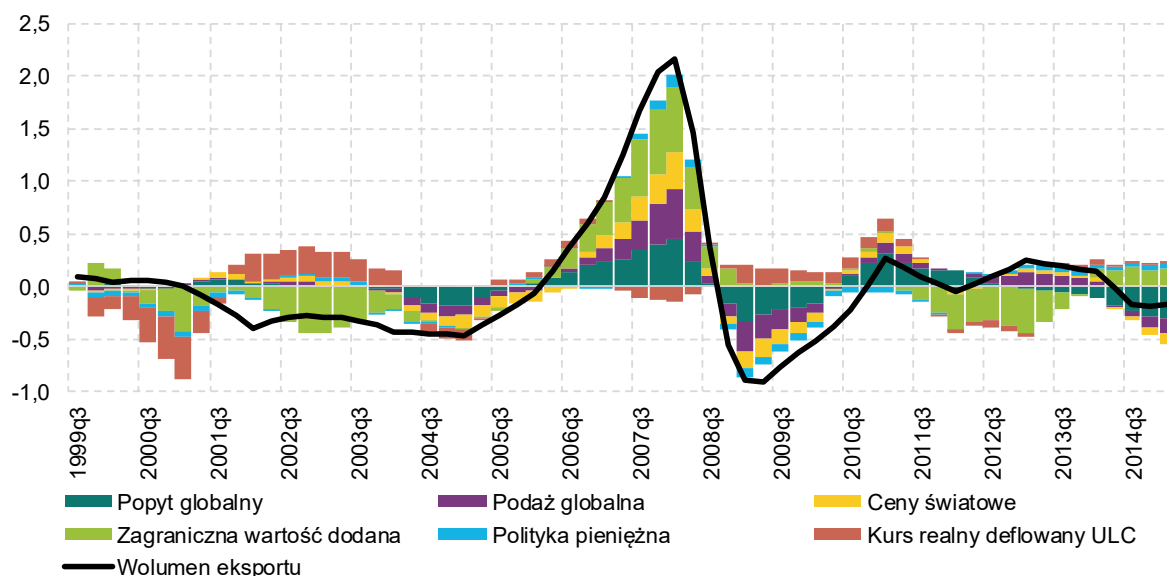


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

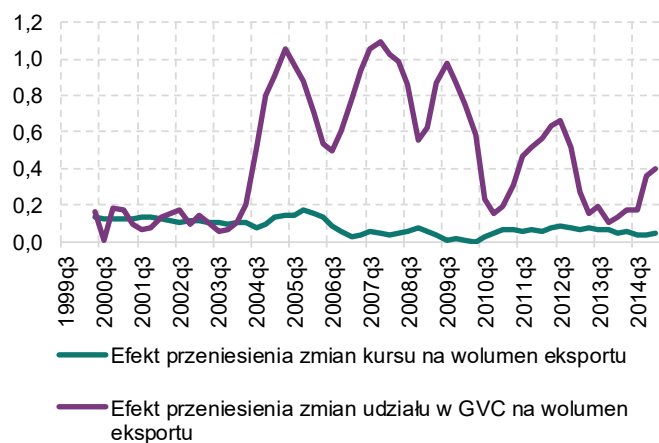
Rysunek 17. Dekompozycja wolumenu eksportu



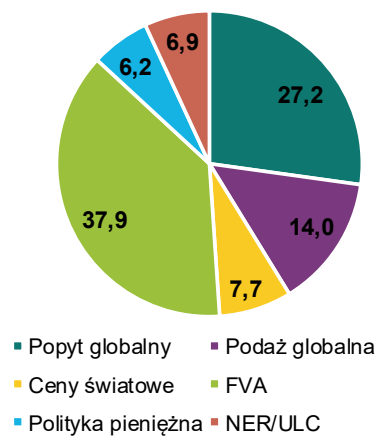
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 18. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia RER_ULC i FVA na wolumen eksportu

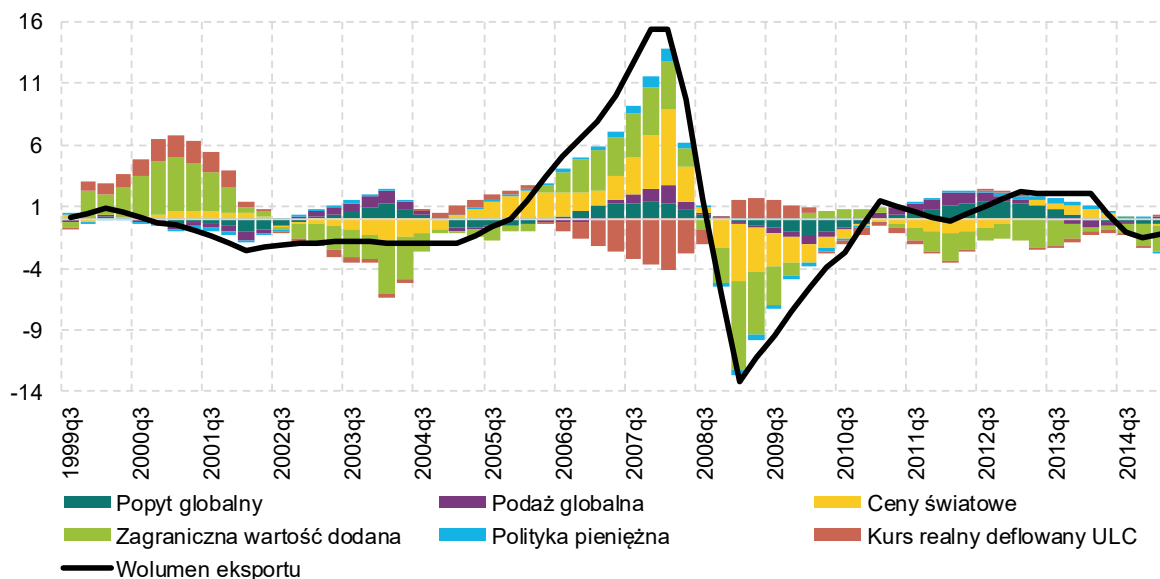


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

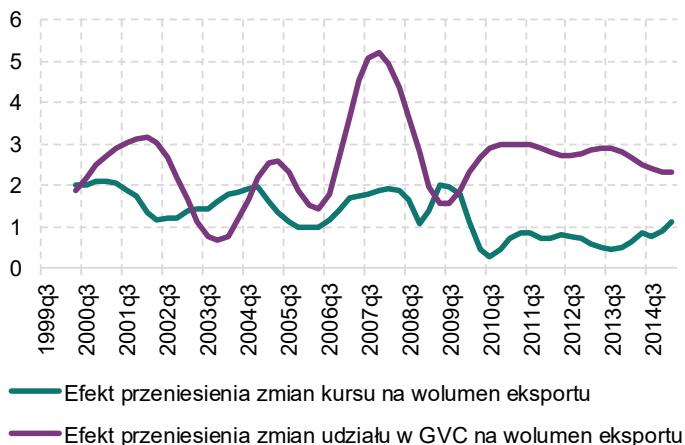
Rysunek 19. Dekompozycja wolumenu eksportu



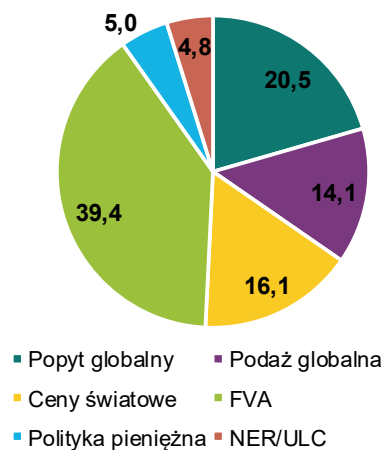
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 20. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu

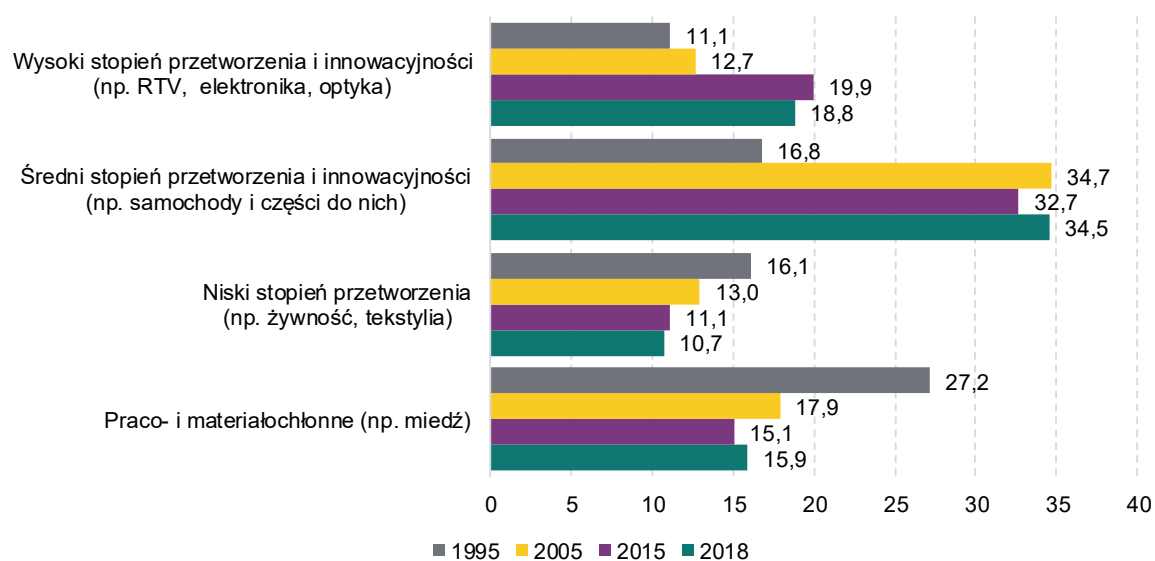


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



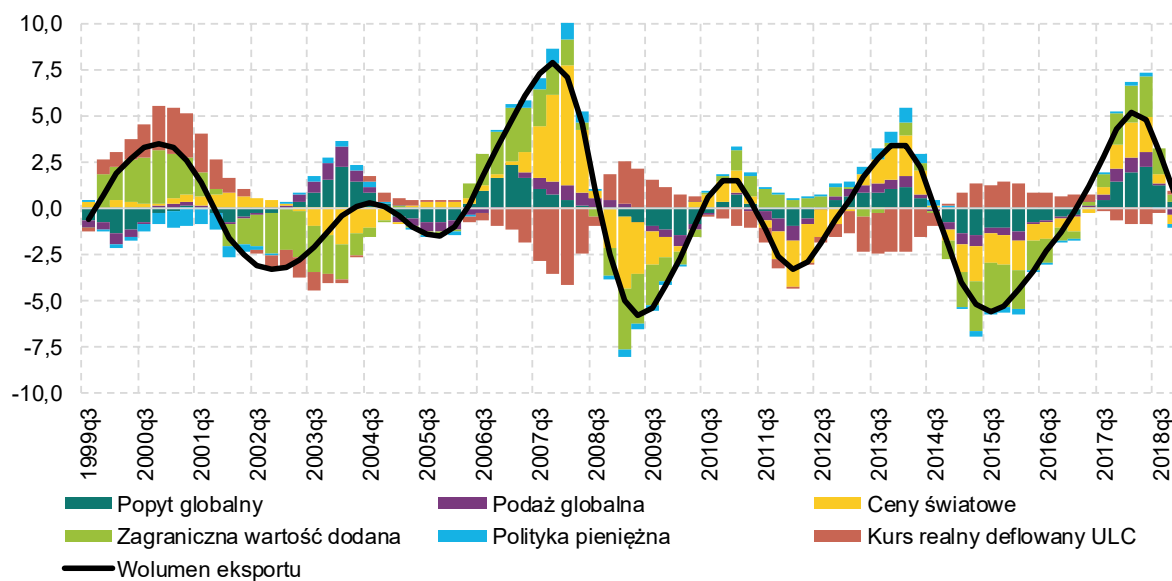
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 21. Towary przemysłowe według stopnia przetworzenia i innowacyjności (udział w eksporcie ogółem)



Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych COMTRADE..

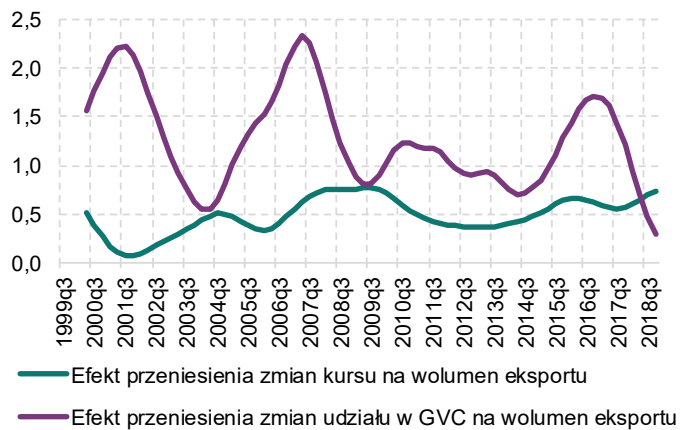
Rysunek 22. Dekompozycja wolumenu eksportu



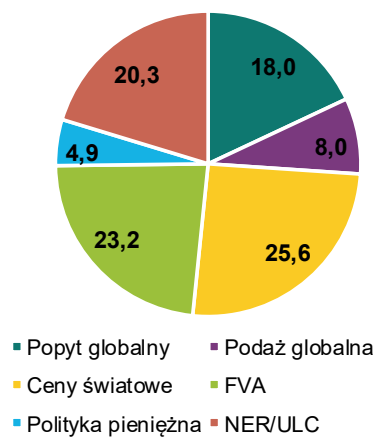
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 23. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu

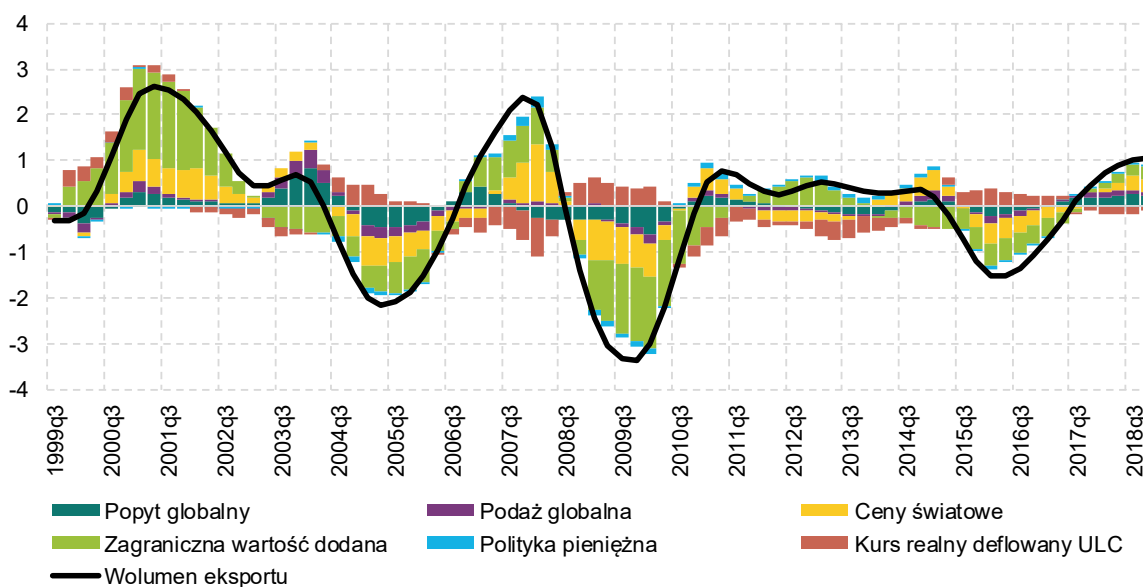


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2018)



Źródło: Obliczenia własne.

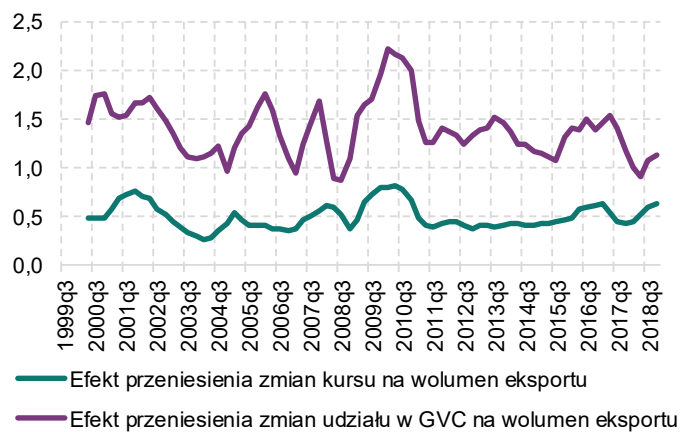
Rysunek 24. Dekompozycja wolumenu eksportu



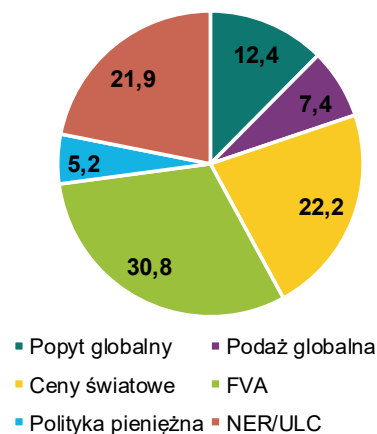
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 25. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu



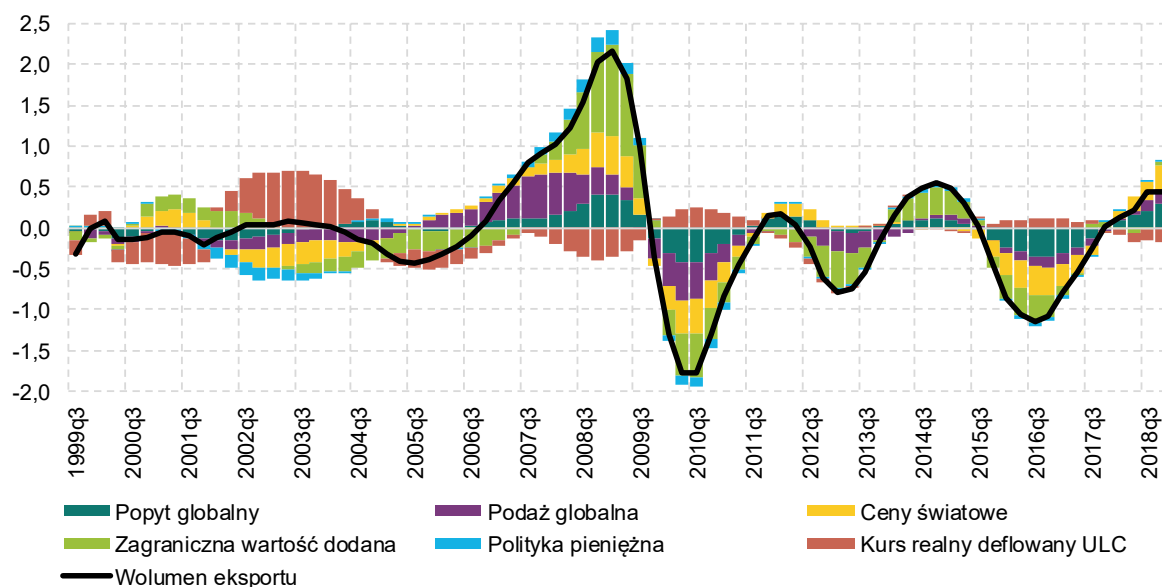
B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2018)



Źródło: Obliczenia własne.

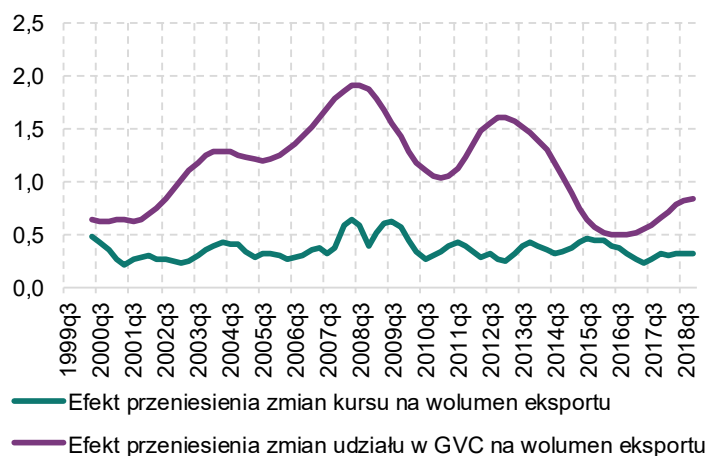
Towary o średnim stopniu przetworzenia i innowacyjności (np. samochody i części do nich)

Rysunek 26. Dekompozycja wolumenu eksportu



Źródło: Obliczenia własne.

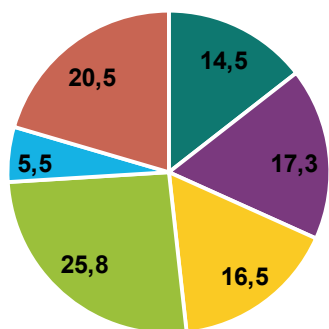
Rysunek 27. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC)



Źródło: Obliczenia własne.

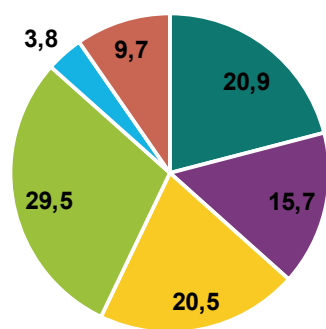
Rysunek 28. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

B. Lata 2000-2018



■ Popyt globalny ■ Podaż globalna
■ Ceny światowe ■ FVA
■ Polityka pieniężna ■ NER/ULC

B. Lata 2011-2018

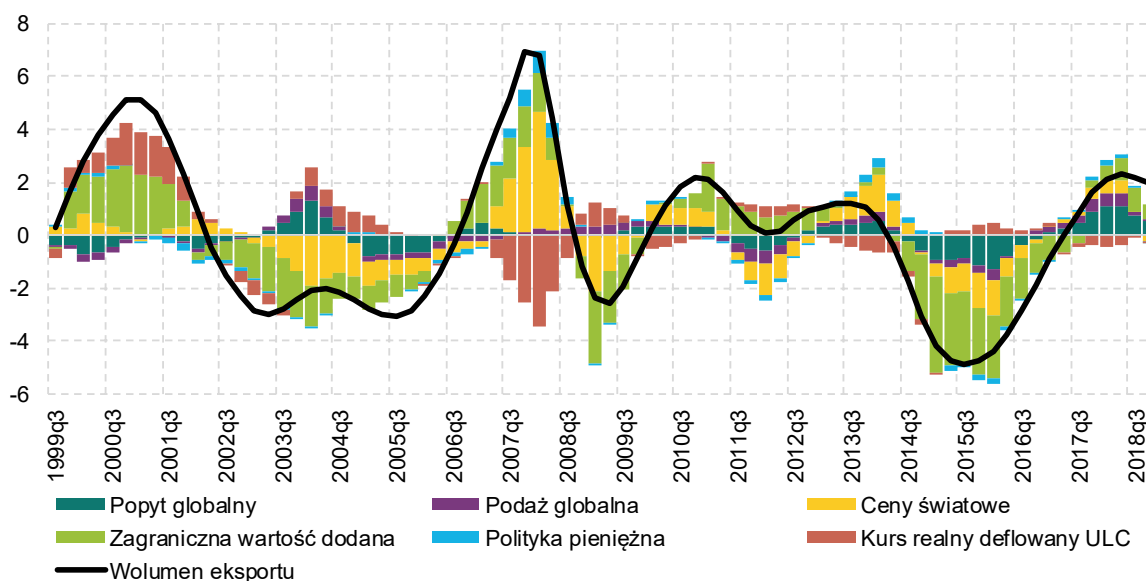


■ Popyt globalny ■ Podaż globalna
■ Ceny światowe ■ FVA
■ Polityka pieniężna ■ NER/ULC

Źródło: Obliczenia własne.

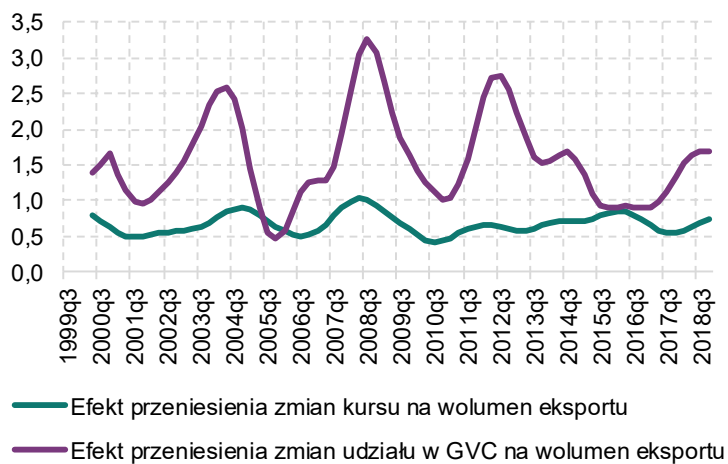
Towary o wysokim stopniu przetworzenia i innowacyjności (np. RTV, elektronika, optyka)

Rysunek 29. Dekompozycja wolumenu eksportu



Źródło: Obliczenia własne.

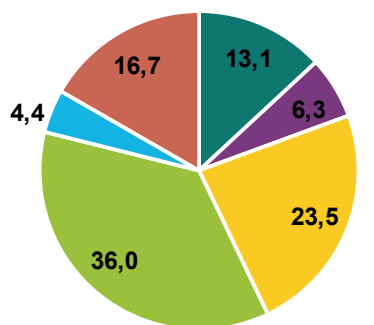
Rysunek 30. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC)



Źródło: Obliczenia własne.

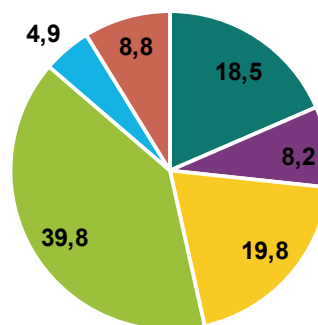
Rysunek 31. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Lata 2000-2018



■ Popyt globalny ■ Podaż globalna
■ Ceny światowe ■ FVA
■ Polityka pieniężna ■ NER/ULC

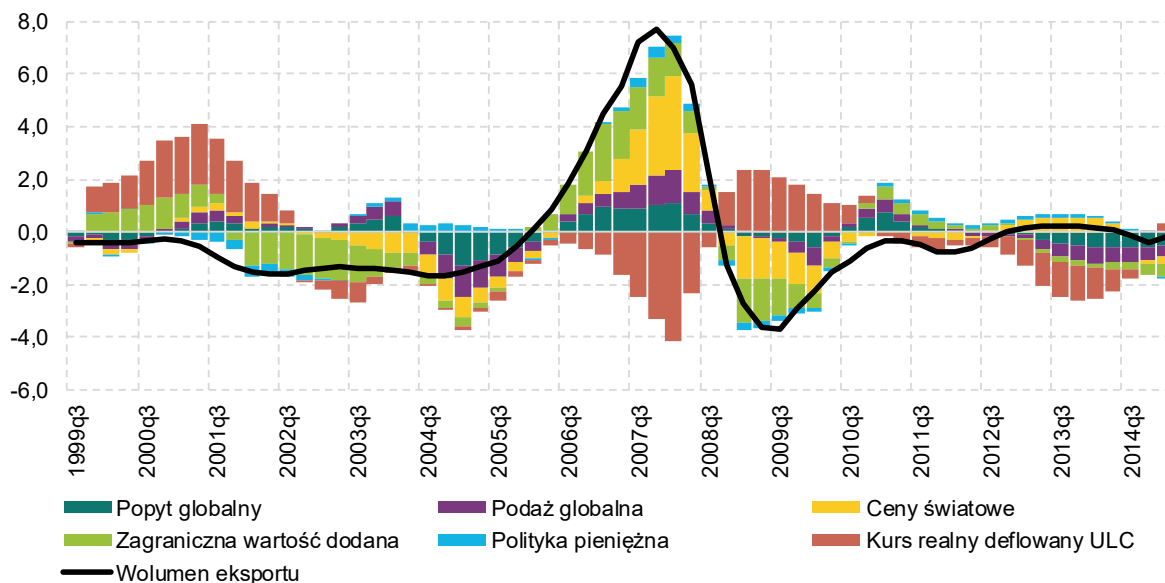
B. Lata 2011-2018



■ Popyt globalny ■ Podaż globalna
■ Ceny światowe ■ FVA
■ Polityka pieniężna ■ NER/ULC

Źródło: Obliczenia własne.

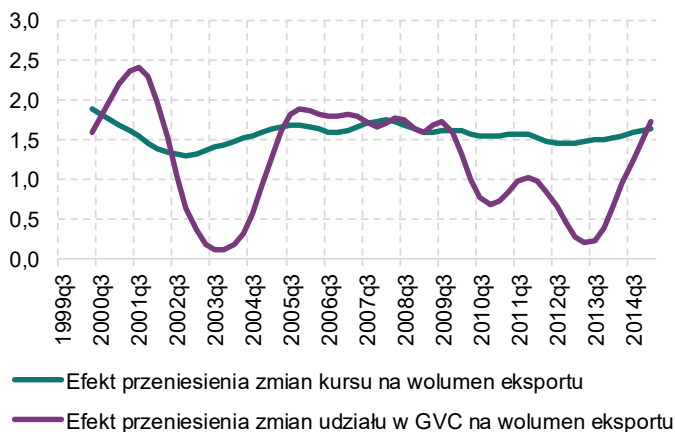
Rysunek 32. Dekompozycja wolumenu eksportu



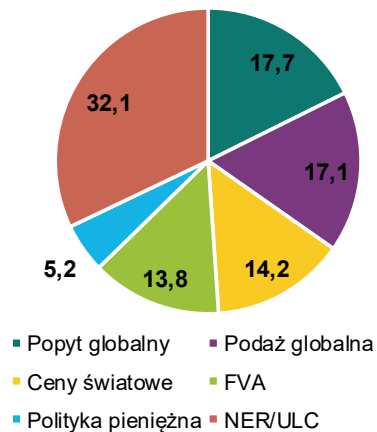
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 33. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu

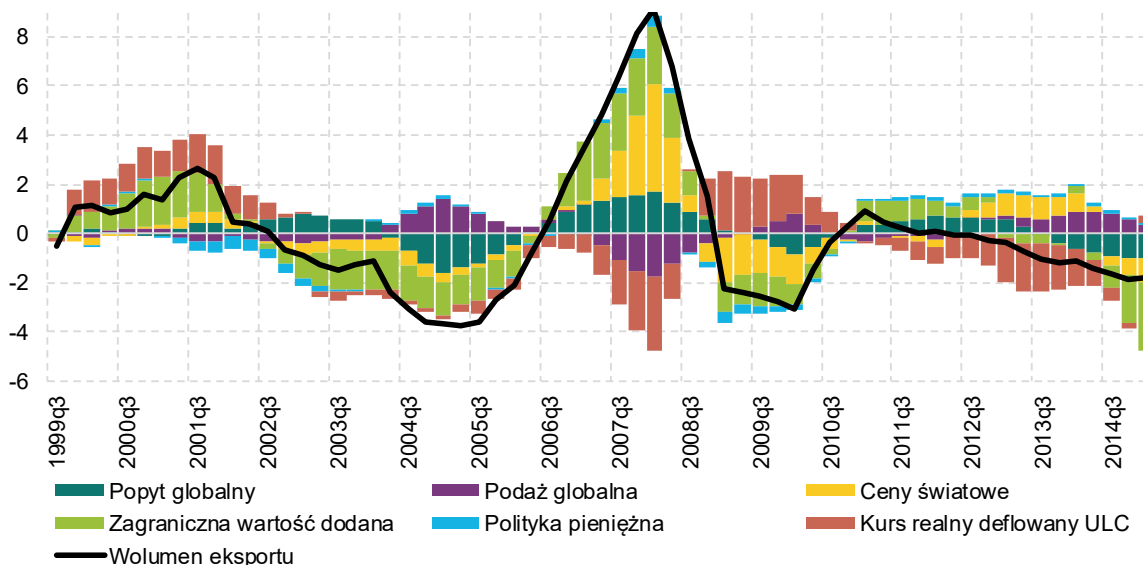


B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

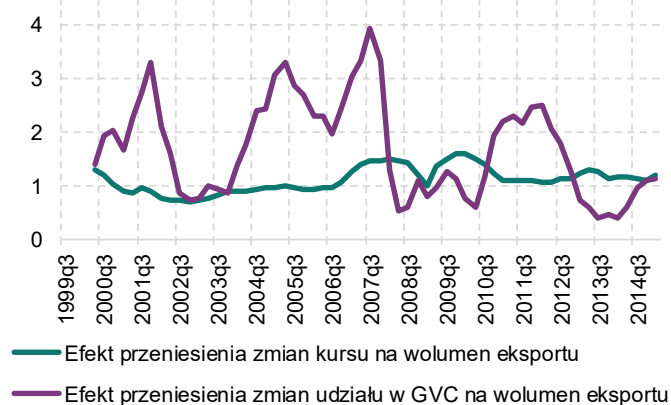
Rysunek 34. Dekompozycja wolumenu eksportu



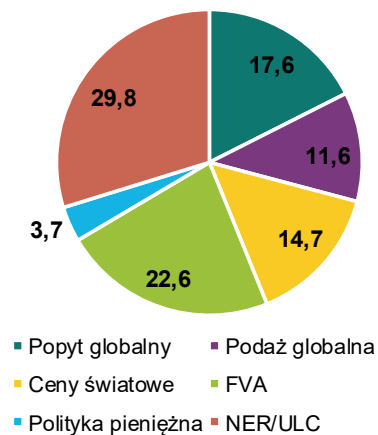
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 35. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu oraz procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu

A. Efekt przeniesienia zmian kursu (RER_ULC) i FVA na wolumen eksportu



B. Procentowy udział szoku w przyroście wolumenu eksportu (lata 2011-2015)



Źródło: Obliczenia własne.

3. Efekt pass-through (ERPT) do cen importu i cen konsumpcyjnych

Model

Do oceny ERPT został wykorzystany BVAR analogiczny do opisanego dla wolumenu eksportu, wzorujący się na pracy Comunale i Kunovac (2017), co do zasady zbliżonej do pracy Forbes *et al.* (2017). W BVAR wykorzystano następujące zmienne:

- PKB Polski (GDP_PL),
- inflacja krajowa (CPI_PL),
- stopa procentowa WIBOR 3M (IR_PL),
- nominalny efektywny kurs walutowy (NER_PL),
- ceny w polskim imporcie (IP_PL),
- wolumen polskiego eksportu ogółem (Exp_vol_PL),

Odpowiadają im szoki: podaży krajowej (AS), popytu krajowego (AD), popytu globalnego (WD), egzogeniczny szok kursowy powodujący aprecjację kursu złotego (FX), krajowej polityki pieniężnej (MP), podaży globalnej (WS).

Nałożone restrykcje opisuje macierz:

$$\text{Restr} = \begin{matrix} & GDP_PL & CPI_PL & IR_PL & NER_PL & IR_PL & Exp_vol_PL & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] & \begin{matrix} AS \\ AD \\ WD \\ FX \\ MP \\ WS \end{matrix}
 \end{matrix}$$

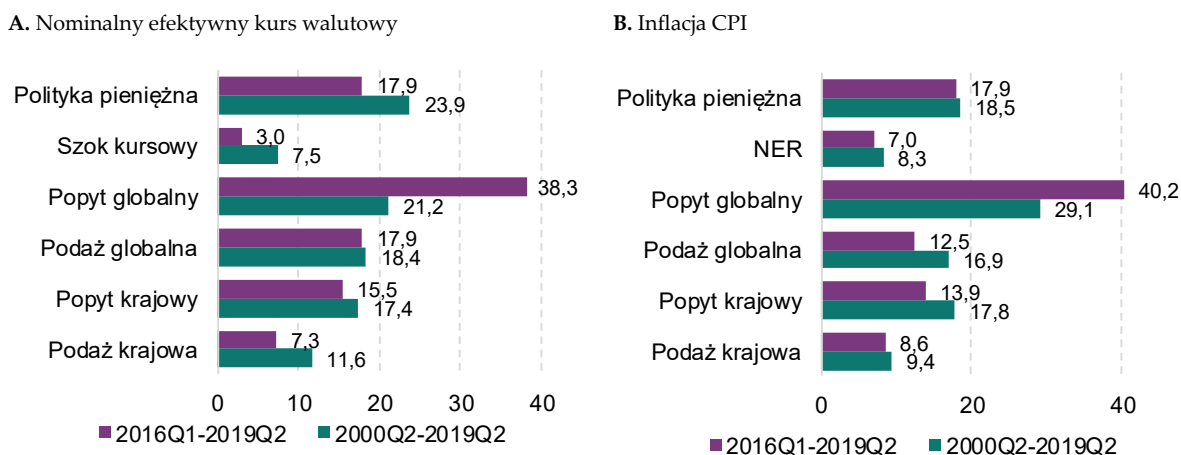
gdzie: 1 oznacza znak (+), -1 oznacza znak (-), 0 oznacza restrykcję zerową, a „ \cdot ” oznacza brak restrykcji.

Oprócz ERPT liczonego z BVARu zostały powtórzone obliczenia ze standardowego modelu SVAR (McCarthy, 1999).

Wyniki

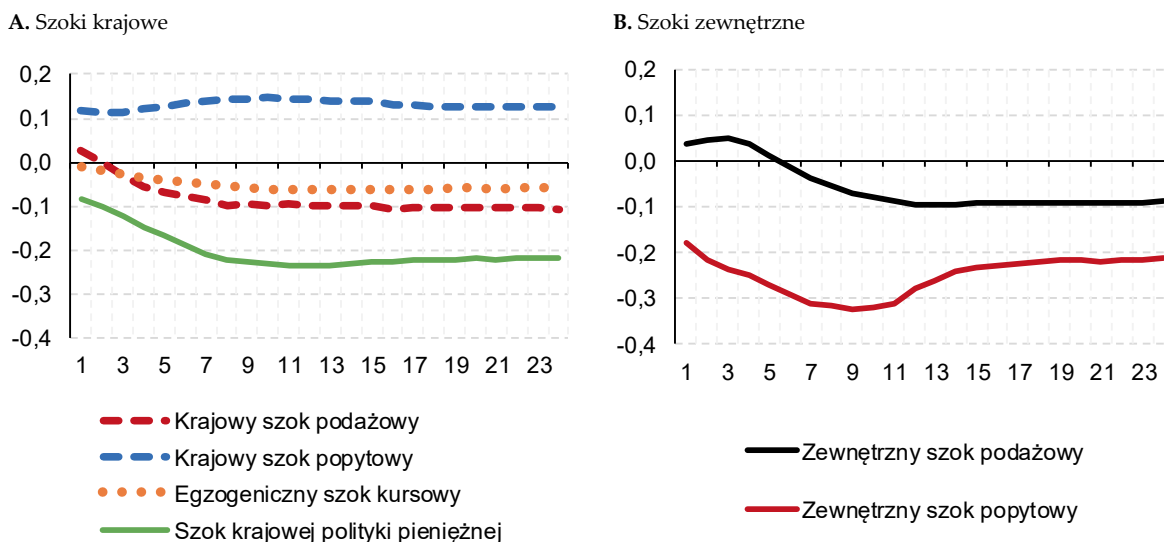
Wyniki otrzymane z obydwu modeli są przedstawione poniżej (Rysunek 36, Rysunek 37, Rysunek 38). Podsumowując, w Polsce, podobnie jak w innych krajach (por. Forbes *et al.*, 2017; Ha *et al.*, 2019), najsilniejsze reakcje cen mają miejsce, jeśli za zmianę kursu walutowego odpowiadają szoki popytu zewnętrznego lub szoki polityki pieniężnej (Rysunek 37). Oznacza to, że w przypadku większości zmian kursu walutowego postrzegana siła wpływu tych zmian na ceny konsumpcyjne może być silniejsza niż efekty egzogenicznych szoków kursu walutowego.

Rysunek 36. Dekompozycja nominalnego efektywnego kursu walutowego (NER) i inflacji CPI



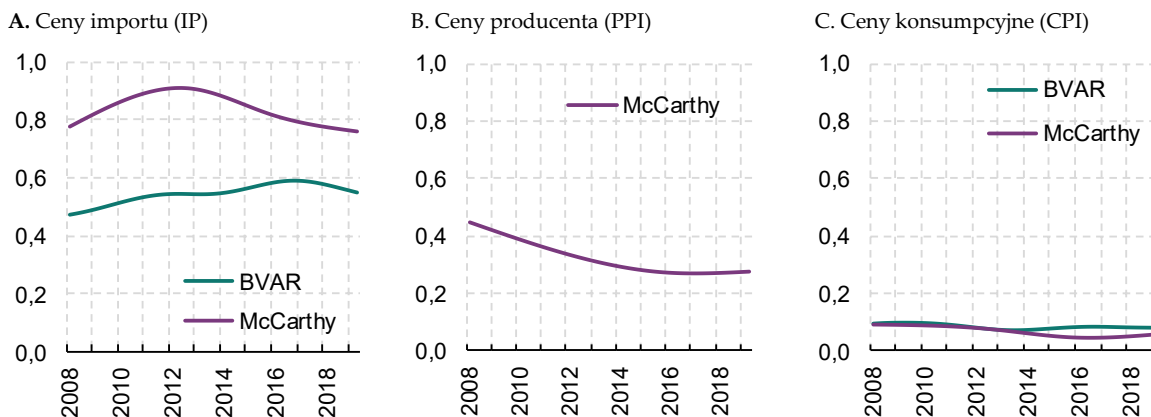
Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 37. Efekt przeniesienia na ceny konsumpcyjne zmian kursu walutowego wywołanych różnymi szokami



Źródło: Obliczenia własne.

Rysunek 38. ERPT do cen importu (IP), cen producenta (PPI) i cen konsumpcyjnych (CPI) według modeli BVAR i SVAR (McCarthy)



Źródło: Obliczenia własne.

Literatura

- Arias J., Rubio-Ramirez F., Waggoner D. (2018), *Inference Based on Structural Vector Autoregressions Identified With Sign and Zero Restrictions: Theory and Applications*, *Econometrica* 86(2): 685-720, <https://doi.org/10.3982/ECTA14468>
- Aslam A., Novta N., Rodrigues-Bastos F. (2017), *Calculating Trade in Value Added*, IMF Working Paper No. 17/178, International Monetary Fund, <https://www.imf.org/en/Publications/WP/Issues/2017/07/31/Calculating-Trade-in-Value-Added-45114>
- Comunale M., Kunovac D. (2017), *Exchange Rate Pass-Through in the Euro Area*, ECB Working Paper No. 2003, European Central Bank, https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2910939
- Forbes K., Hjortsoe I., Nenova T. (2017), *Shocks versus structure: explaining differences in exchange rate pass-through across countries and time*, External MPC Unit, Discussion Paper No. 50, Bank of England, <https://www.bankofengland.co.uk/external-mpc-discussion-paper/2017/explaining-differences-in-exchange-rate-pass-through>
- Forbes K., Hjortsoe I., Nenova T. (2018), *The shocks matter: Improving our estimates of exchange rate pass-through*, *Journal of International Economics*, Volume 114, September 2018, Pages 255-275, <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022199618302009?via%3Dihub>
- Ha J., Kose M.A., Ohnsorge F. (2019), *Inflation in Emerging and Developing Economies : Evolution, Drivers and Policies*, rozdział 5, s. 273-319, World Bank Group, <https://openknowledge.worldbank.org/handle/10986/30657>
- Koopman R., Wang Z., Wei S. (2014), *Tracing Value-Added and Double Counting in Gross Exports*. *American Economic Review* 104(2): 459-494, https://www.researchgate.net/publication/255724907_Tracing_Value-Added_and_Double_Counting_in_Gross_Exports/link/0c9605324c7e48d0df000000/download
- McCarthy J. (1999), *Pass-Through of Exchange Rates and Import Prices to Domestic Inflation in Some Industrialised Economies*, BIS Working Paper No. 79, Bank for International Settlements, <https://www.bis.org/publ/work79.htm>

Oczekiwania inflacyjne – determinanty i zakotwiczenie

Tomasz Łyziak, Ewa Stanisławska

1. Proces formułowania oczekiwań inflacyjnych

1.1. Modele jednorównaniowe

Model

Badanie procesu formułowania krótkoterminowych oczekiwań inflacyjnych w Polsce, którego wyniki są prezentowane w raporcie, wykorzystuje rozszerzony model hybrydowy oczekiwań inflacyjnych zaproponowany w pracy Cerisola i Gelos (2009). Był on już uprzednio stosowany już uprzednio w analizach oczekiwań inflacyjnych w Polsce (Łyziak, 2016). W modelu tym oczekiwania inflacyjne są wyjaśniane przez przeszłą inflację, cel inflacyjny banku centralnego oraz szeroki zestaw zmiennych mających wpływ na przyszłą inflację. W oryginalnym podejściu zmienne te były wyrażone w postaci odchyleń od swych trendów, wyznaczonych przy pomocy filtru Hodricka-Prescotta. W niniejszym badaniu, podobnie jak w poprzednim raporcie (Chmielewski *et al.*, 2018) w charakterze zmiennych objaśniających wykorzystujemy roczne zmiany: realnej stopy procentowej (r), nominalnego efektywnego kursu walutowego, NEER (wzrost – aprecjacja) (e), produkcji przemysłowej (y), stopy bezrobocia (u) oraz wynagrodzeń nominalnych brutto (w). Dodatkowo, dla zobrazowania wpływu bieżących zmian cen na oczekiwania inflacyjne wykorzystujemy trzy miary inflacji składające się na inflację CPI, tj. inflację bazową z wyłączeniem cen żywności i energii (π^c), dynamikę cen żywności (π^f) i dynamikę cen energii (π^{en}). W badaniu uwzględniamy oczekiwania inflacyjne ($\pi^{e|\bullet}$) konsumentów ($\bullet = k$), przedsiębiorstw ($\bullet = e$) i analityków sektora finansowego ($\bullet = f$), formułowane w 12-miesięcznym horyzoncie. W związku z krótkookresowym charakterem oczekiwań inflacyjnych, w badaniu ich formułowania uwzględniamy dwa elementy komunikacji banku centralnego, tj. cel inflacyjny NBP (π^{tar}) i projekcję inflacji NBP (π^{proj})¹.

Szacowane równanie ma następującą postać:

$$\pi_{t+12|t}^{e|\bullet} = \alpha^{\pi^c} \pi_{t-1}^c + \alpha^{\pi^f} \pi_{t-1}^f + \alpha^{\pi^{en}} \pi_{t-1}^{en} + \alpha^{\pi^{tar}} \pi_{t+12|t}^{tar} + \alpha^{\pi^{proj}} \pi_{t+12|t}^{proj} + \alpha^r \Delta r_{t-1} + \alpha^e \Delta e_{t-1} + \alpha^y \Delta y_{t-1} + \alpha^u \Delta u_{t-1} + \alpha^w \Delta w_{t-1} + \varepsilon_t^{\pi^{e|\bullet}} \quad (1)$$

Wyniki estymacji

Modele oczekiwań szacujemy na próbie od 2001 do 2019 r. oraz z wykorzystaniem estymacji w kroczących, w 72-miesięcznych oknach. Wykorzystujemy estymator Metody Najmniejszych Kwadratów (MNK) z ko-

¹ Ze względu na silną korelację tej ostatniej z bieżącą inflacją bazową, projekcję inflacji NBP uwzględniamy w postaci reszty z równania, w którym jest ona objaśniana przez bieżącą inflację. Alternatywnie była ona wyrażana jako odchylenie od bieżącej inflacji – wyniki były bardzo podobne.

rektą Newey’a-Westa na heteroskedastyczność i autokorelację. Wyniki estymacji przedstawia Tabela 1 oraz Rysunek 1, Rysunek 2 i Rysunek 3.

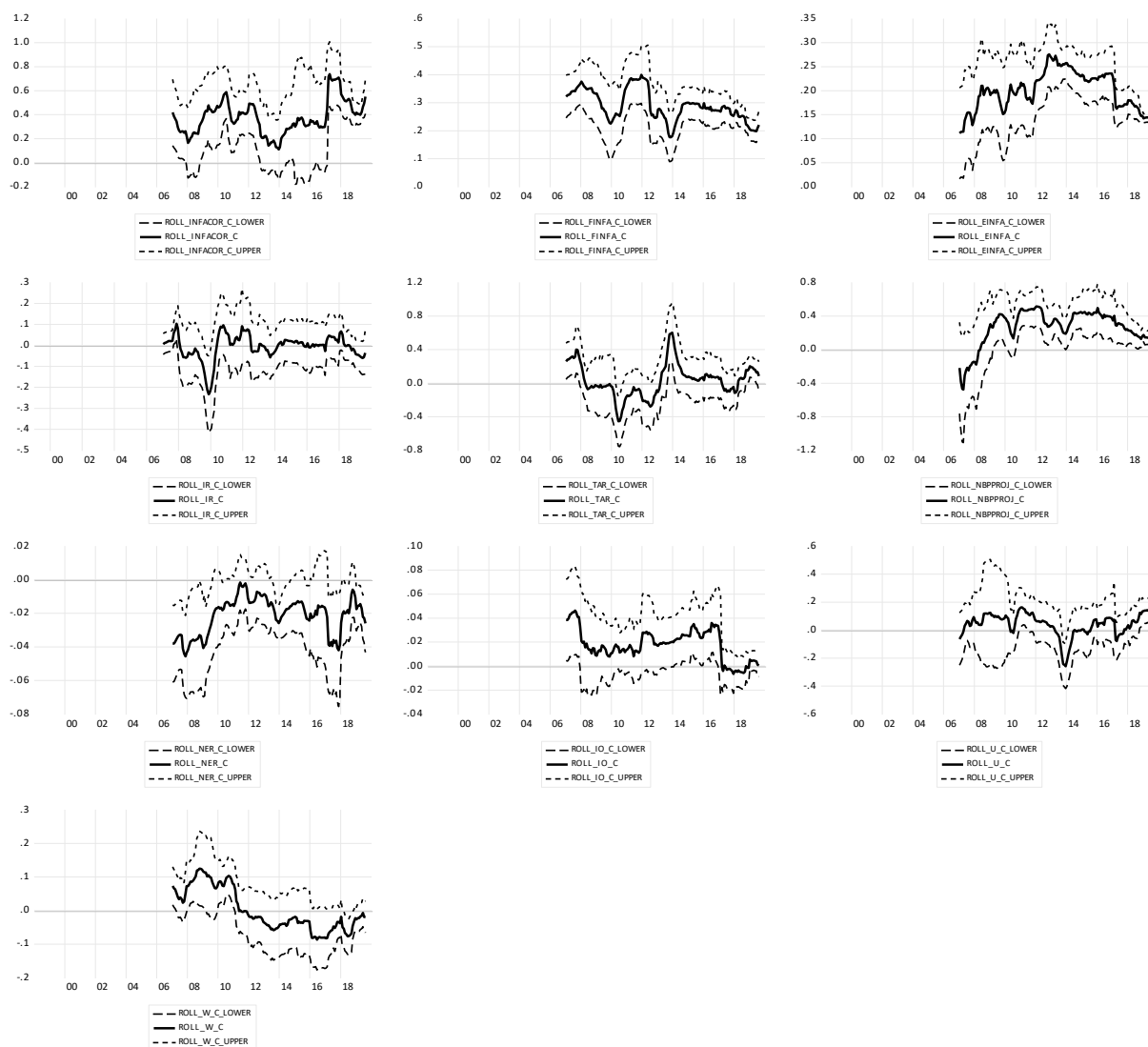
Tabela 1. Czynniki wpływające na oczekiwania inflacyjne różnych grup podmiotów

	Konsumenci	Przedsiębiorstwa	Analitycy sektora finansowego
Inflacja bazowa	0,609*** (0,040)	0,181** (0,086)	0,214*** (0,036)
Inflacja żywności	0,299*** (0,023)	0,154*** (0,019)	0,072*** (0,012)
Inflacja energii	0,185*** (0,014)	0,172*** (0,013)	0,036*** (0,007)
Cel inflacyjny NBP	-	0,306*** (0,041)	0,524*** (0,031)
Projekcja inflacji NBP	0,326*** (0,071)	0,388*** (0,110)	0,224*** (0,060)
Realna stopa procentowa (zmiana)	-	-0,197*** (0,036)	-0,123*** (0,022)
Kurs walutowy (zmiana)	-0,022*** (0,008)	-	-
Produkcja przemysłowa (zmiana)	0,034** (0,014)	0,030*** (0,008)	0,024*** (0,005)
Stopa bezrobocia (zmiana)	-	-	-
Płace nominalne (zmiana)	-	-	0,028** (0,014)
Próba	2001:05-2019:08	2002:04-2019:06	2001:05-2019:08
Skorygowany R ²	0,95	0,91	0,92

Uwagi: W przypadku konsumentów w charakterze dodatkowej zmiennej objaśniającej wykorzystano lukę percepcji inflacji, tj. różnicę między percepcją zmian cen (przybliżoną wskaźnikiem CPPI) i inflacją CPI. W przypadku przedsiębiorstw w modelach miesięcznych wykorzystujemy dane interpolowane z kwartalnych. Wielkości w nawiasach oznaczają odchylenia standardowe oszacowań parametrów. *** oznacza 99-procentowy poziom ufności; ** oznacza 95-procentowy poziom ufności; * oznacza 90-procentowy poziom ufności.

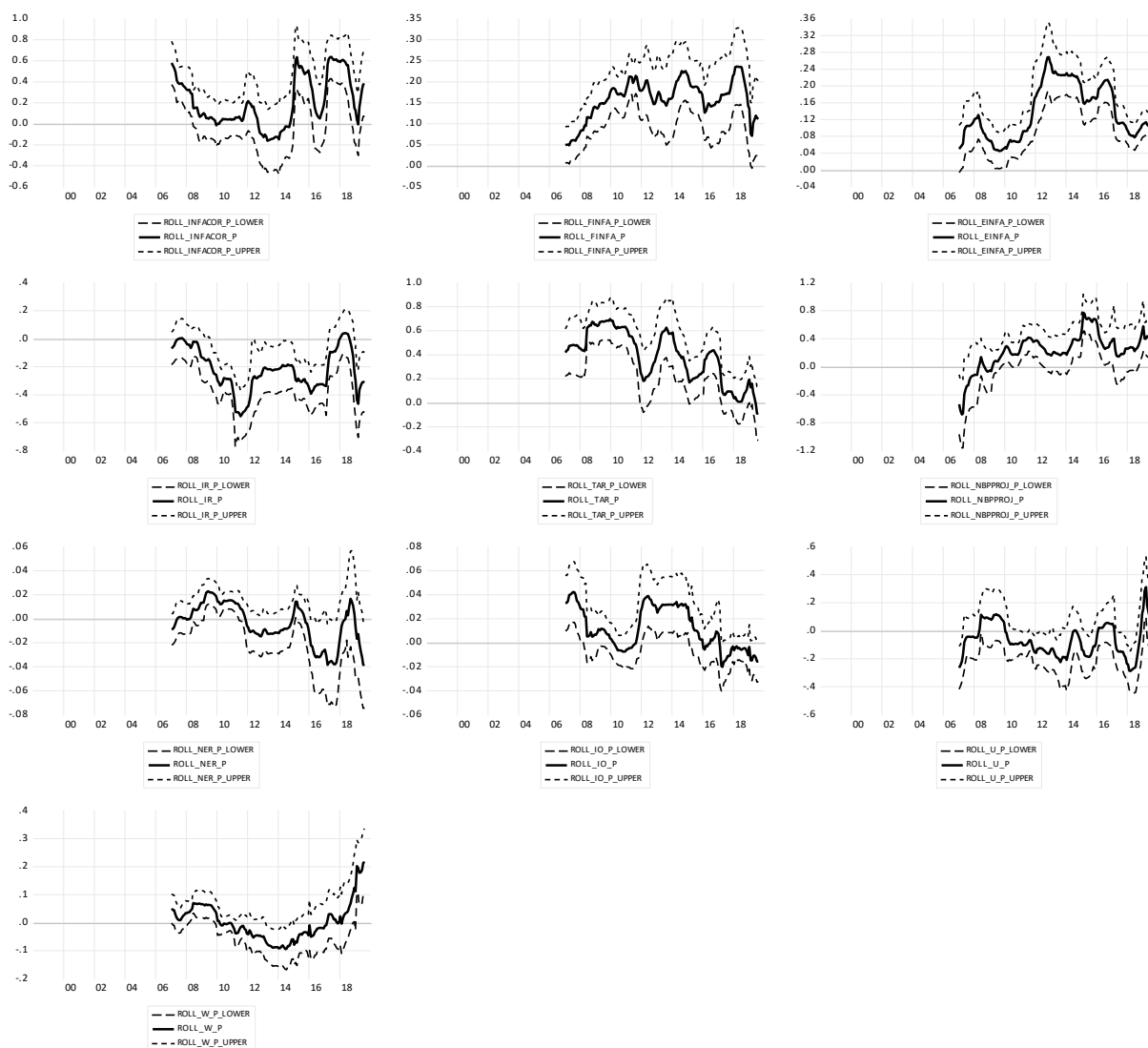
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 1. Zmiana w czasie wpływu wybranych czynników na oczekiwania inflacyjne konsumentów



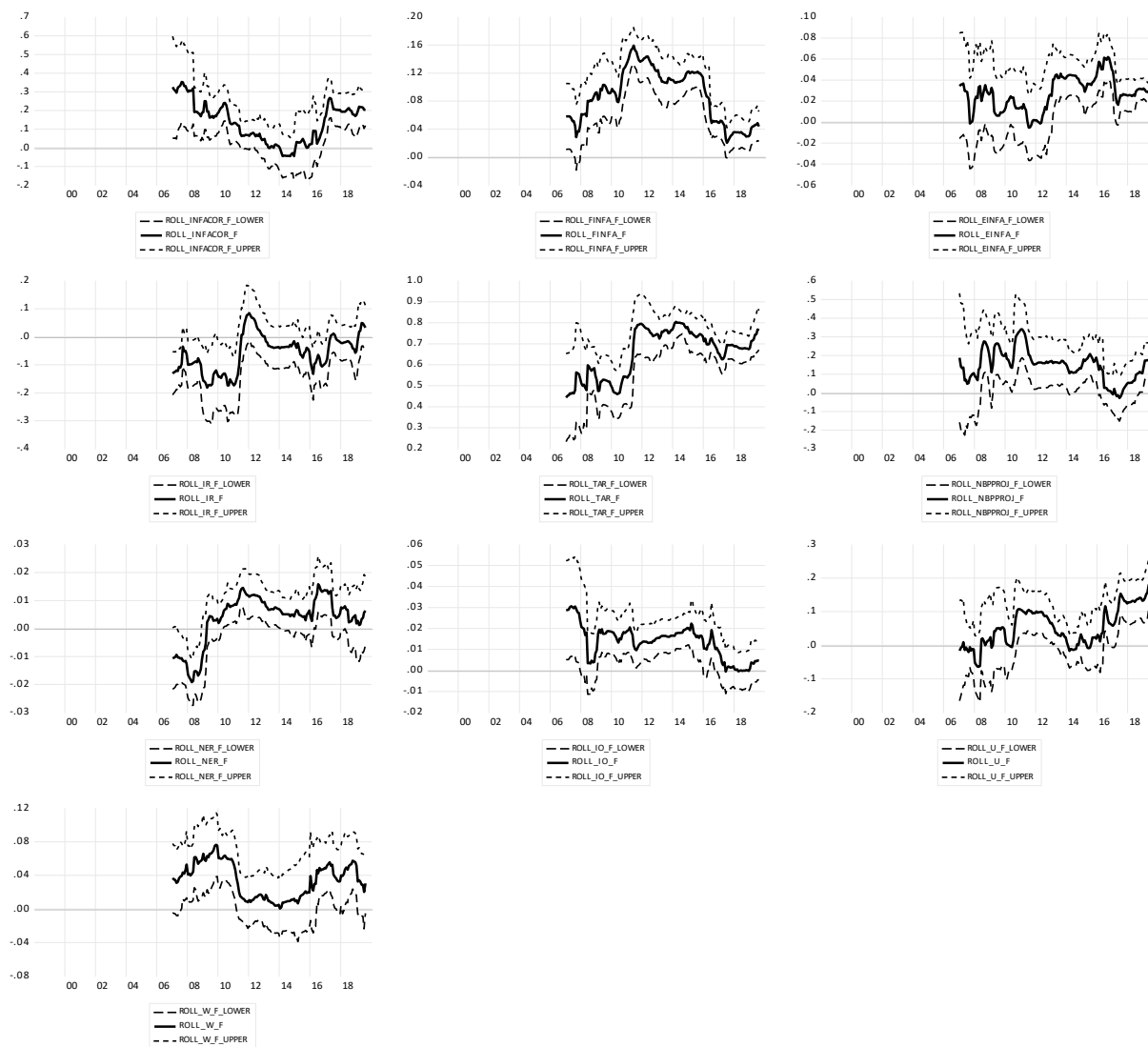
Uwagi: Linia ciągła pokazuje wyniki oszacowań poszczególnych parametrów w 72-miesięcznych kroczących oknach, zaś linie przerywane – wyniki tych oszacowań powiększone bądź pomniejszone o 2 odchylenia standardowe. Oznaczenia zmiennych: INFACOR – inflacja bazowa, FINFA – inflacja żywności, EINAFA – inflacja energii, IR – realna stopa procentowa, TAR – cel inflacyjny NBP, NBPPROJ – projekcja inflacji NBP, NER – nominalny efektywny kurs walutowy (wzrost – aprecjacja), IO – produkcja przemysłowa, U – stopa bezrobocia, W – tempo wzrostu wynagrodzeń.

Rysunek 2. Zmiana w czasie wpływu wybranych czynników na oczekiwania inflacyjne przedsiębiorstw



Uwagi: Linia ciągła pokazuje wyniki oszacowań poszczególnych parametrów w 72-miesięcznych kroczących oknach, zaś linie przerywane – wyniki tych oszacowań powiększone bądź pomniejszone o 2 odchylenia standardowe. Oznaczenia zmiennych: INFACOR – inflacja bazowa, FINFA – inflacja żywności, EINAFA – inflacja energii, IR – realna stopa procentowa, TAR – cel inflacyjny NBP, NBPPROJ – projekcja inflacji NBP, NER – nominalny efektywny kurs walutowy (wzrost – aprecjacja), IO – produkcja przemysłowa, U – stopa bezrobocia, W – tempo wzrostu wynagrodzeń.

Rysunek 3. Zmiana w czasie wpływu wybranych czynników na oczekiwania inflacyjne analityków sektora finansowego



Uwagi: Linia ciągła pokazuje wyniki oszacowań poszczególnych parametrów w 72-miesięcznych kroczących oknach, zaś linie przerywane – wyniki tych oszacowań powiększone bądź pomniejszone o 2 odchylenia standardowe. Oznaczenia zmiennych: INFACOR – inflacja bazowa, FINFA – inflacja żywności, EINF – inflacja energii, IR – realna stopa procentowa, TAR – cel inflacyjny NBP, NBPPROJ – projekcja inflacji NBP, NER – nominalny efektywny kurs walutowy (wzrost – aprecjacja), IO – produkcja przemysłowa, U – stopa bezrobocia, W – tempo wzrostu wynagrodzeń.

1.2. Modele typu SVAR

Model

O determinantach oczekiwań inflacyjnych i ich roli w mechanizmie transmisji można też wnioskować na podstawie modeli SVAR (e.g., Mehra i Herrington, 2008; Gnan *et al.*, 2009; Ueda, 2010; Gábriel, 2010). Zaletą takiego podejścia w stosunku do modeli jednorównaniowych jest uwzględnienie występowania współzależności między oczekiwaniami inflacyjnymi a innymi zmiennymi, takimi jak inflacja, aktywność gospodarcza czy stopy procentowe. Z drugiej strony, duża liczba parametrów do oszacowania w modelach SVAR, nawet przy stosunkowo niewielkiej liczbie opóźnień, pozwala na analizę ograniczonej liczby zmiennych.

Do oceny procesu formułowania krótkoterminowych oczekiwań inflacyjnych wykorzystano modele SVAR z pięcioma zmiennymi. Są nimi: oczekiwania inflacyjne w horyzoncie 12 miesięcy, inflacja CPI (r/r), luka popytowa jako miara aktywności gospodarczej, nominalny efektywny kurs walutowy (r/r) oraz szok polityki pieniężnej. Luka popytowa została wyznaczona przy pomocy filtra HP. Szok polityki pieniężnej został wyznaczony poza modelem SVAR metodą narracyjną (opis szoku polityki pieniężnej można znaleźć w Baranowski *et al.*, 2020). Dane mają częstotliwość kwartalną i obejmują okres od 1. kw. 2004 r. do 1. kw. 2019 r. Oszacowano osobne modele dla oczekiwań inflacyjnych konsumentów, przedsiębiorstw i ekspertów (analityków sektora finansowego). W przypadku oczekiwań konsumentów wykorzystano miarę oczekiwań deklarowanych ilościowo².

Liczba opóźnień została wybrana na podstawie kryteriów informacyjnych i własności reszt. W celu wyznaczenia funkcji reakcji zmiennych na szoki, posłużono się dekompozycją Choleskiego. Kolejność zmiennych jest taka jak podano powyżej. Oznacza to, że oczekiwania inflacyjne zależą jedynie od swoich opóźnień i opóźnień pozostałych zmiennych³, a inflacja może reagować natychmiast na oczekiwania inflacyjne. Umiejscowienie oczekiwań inflacyjnych na pierwszym miejscu jest spójne z modelami lepkiej informacji, zgodnie z którymi podmioty gospodarcze są nieuważne i nie uaktualniają ciągle posiadanych informacji (Mankiw i Reis, 2002).

Funkcje reakcji oczekiwań inflacyjnych

Rysunek 4 przedstawia funkcje reakcji oczekiwań inflacyjnych ekspertów na różne szoki, Rysunek 5 – funkcje reakcji oczekiwań przedsiębiorstw, a Rysunek 6 – funkcje reakcji oczekiwań konsumentów. Oczekiwania inflacyjne wszystkich grup podmiotów wzrastają wraz ze wzrostem inflacji i aktywności gospodarczej, choć siła i szybkość reakcji różnią się między poszczególnymi grupami podmiotów. Siła reakcji oczekiwań ekspertów na wzrost inflacji CPI jest mniejsza niż oczekiwań przedsiębiorstw, lecz wpływ szoku inflacji utrzymuje się dłużej⁴. Oczekiwania ekspertów słabiej reagują również na wzrost aktywności gospodarczej niż oczekiwania pozostałych grup podmiotów. Aktywność gospodarcza silnie wpływa za to na oczekiwania inflacyjne konsumentów.

² Jej opis można znaleźć w Stanisławska (2018) i Stanisławska *et al.* (2019).

³ Jest to spójne z modelami lepkiej informacji, zgodnie z którymi podmioty gospodarcze są nieuważne i nie uaktualniają ciągle posiadanych informacji (Mankiw i Reis, 2002).

⁴ W przypadku konsumentów siła reakcji jest nieporównywalna do siły reakcji przedsiębiorstw i ekspertów ze względu na subiektywny poziom oczekiwań tej grupy podmiotów.

Poza słabszą reakcją na inflację bieżącą i lukę popytową, oczekiwania inflacyjne ekspertów wyróżnia statystycznie istotna reakcja na szok polityki pieniężnej. Bardziej restrykcyjna polityka pieniężna przyczynia się do spadku inflacji oczekiwanej przez ekspertów. W przypadku przedsiębiorstw i konsumentów reakcja oczekiwań również jest ujemna, ale nie jest statystycznie istotna.

Oczekiwania inflacyjne nie reagują w statystycznie istotny sposób na zmiany kursu walutowego.

Dekompozycja wariancji

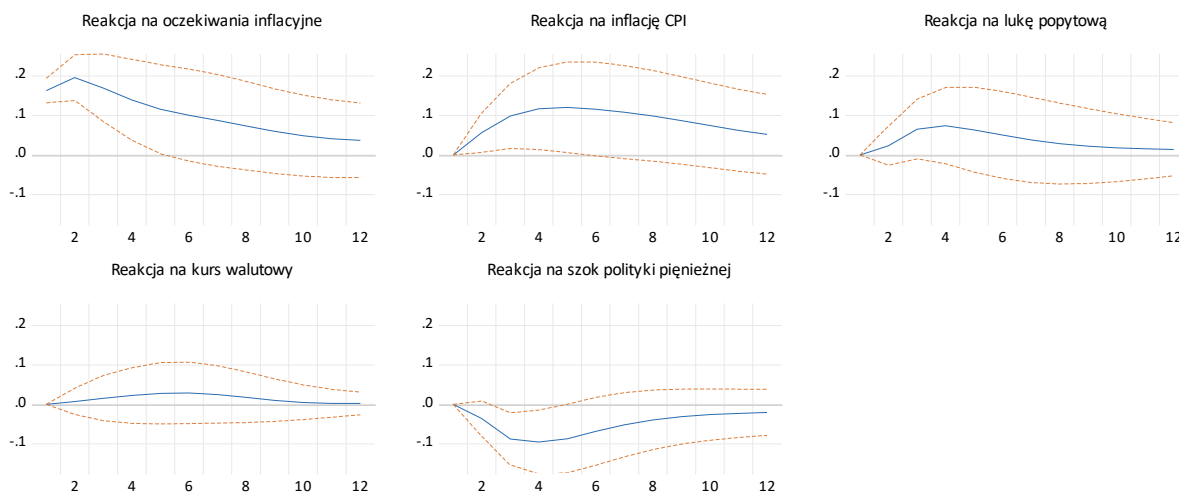
Do porównania względnej ważności szoków w wyjaśnianiu zmienności oczekiwań inflacyjnych różnych grup podmiotów można wykorzystać dekompozycję wariancji oczekiwań inflacyjnych (Rysunek 7)⁵. Szoki oczekiwań i szoki inflacji wyjaśniają zdecydowaną większość zmienności oczekiwanej inflacji we wszystkich grupach podmiotów. Po ośmiu kwartałach te dwa szoki są odpowiedzialne za 80% zmienności oczekiwań inflacyjnych ekspertów, 83% zmienności oczekiwań inflacyjnych przedsiębiorstw i 63% zmienności oczekiwań inflacyjnych konsumentów. W przypadku oczekiwań inflacyjnych ekspertów stosunkowo dużą rolę odgrywa polityka pieniężna – szok polityki pieniężnej odpowiada za ok. 12% zmienności oczekiwań po 8 kwartałach. Dla porównania, w przypadku przedsiębiorstw i konsumentów wartość ta wynosi ok. 4%-5%. Z kolei w przypadku oczekiwań inflacyjnych przedsiębiorstw i konsumentów większe znaczenie odgrywają szoki luki popytowej. Szok luki popytowej wyjaśnia 12% zmienności oczekiwań inflacyjnych przedsiębiorstw i aż 30% zmienności oczekiwań inflacyjnych konsumentów (po dwóch latach), w porównaniu z 7% zmienności oczekiwań inflacyjnych ekspertów.

Reakcja inflacji na oczekiwania inflacyjne

Wyniki z modelu VAR potwierdzają, że inflacja reaguje na szoki oczekiwań inflacyjnych (Rysunek 8). Wniosek ten jest odporny na dobór miary oczekiwań (tj. jaką grupę podmiotów weźmiemy pod uwagę). Reakcja inflacji jest silna i utrzymuje się przez długi czas. Niespodziewany wzrost oczekiwań inflacyjnych podnosi inflację nawet do 8 kwartałów po wystąpieniu szoku.

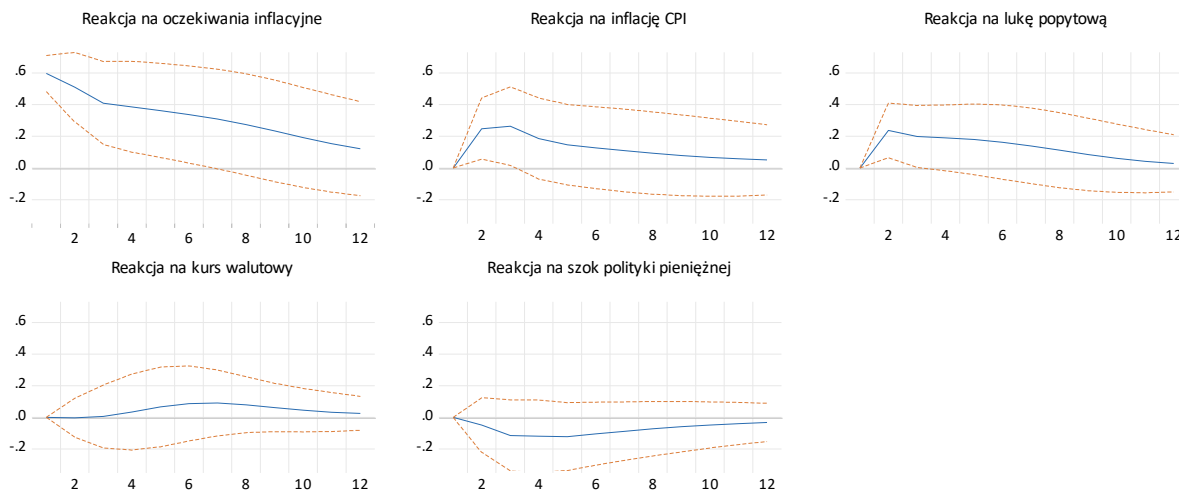
⁵ W tej procedurze wariancja zmiennej endogenicznej jest rozdzielana na części (wyrażone w procentach) związane z wszystkimi szokami uwzględnionymi w modelu. Suma komponentów musi równać się 100.

Rysunek 4. Funkcje reakcji oczekiwań inflacyjnych ekspertów na szoki



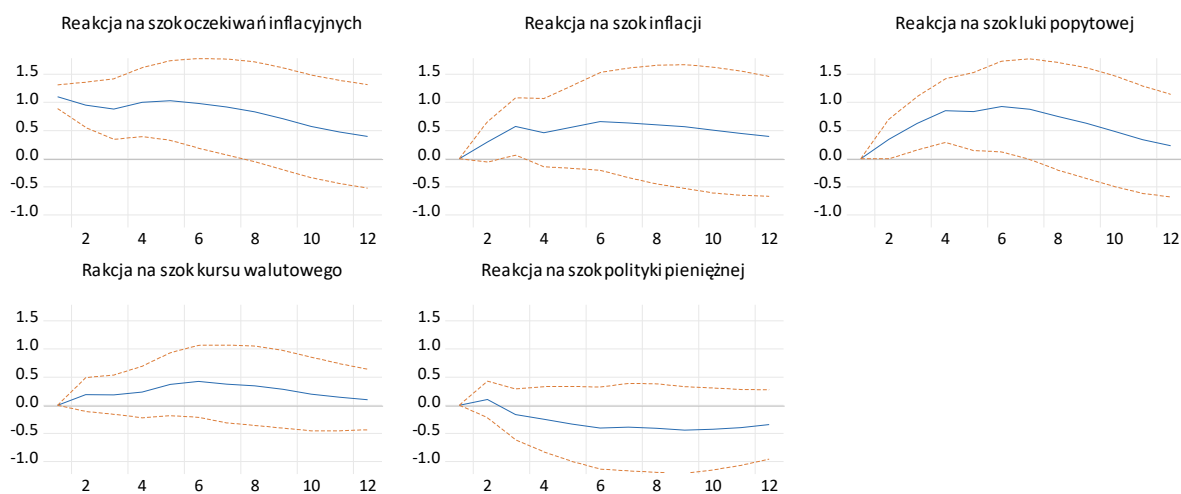
Uwagi: Wykresy przedstawiają reakcję oczekiwań inflacyjnych na różne szoki w poszczególnych kwartałach po wystąpieniu szoku (linia ciągła). Linie przerywane oznaczają przedział wyznaczony przez oszacowaną reakcję +/- dwa odchylenia standardowe. Wielkość szoku to 1 odchylenie standardowe.

Rysunek 5. Funkcje reakcji oczekiwań inflacyjnych przedsiębiorstw na szoki



Uwagi: Wykresy przedstawiają reakcję oczekiwań inflacyjnych na różne szoki w poszczególnych kwartałach po wystąpieniu szoku (linia ciągła). Linie przerywane oznaczają przedział wyznaczony przez oszacowaną reakcję +/- dwa odchylenia standardowe. Wielkość szoku to 1 odchylenie standardowe.

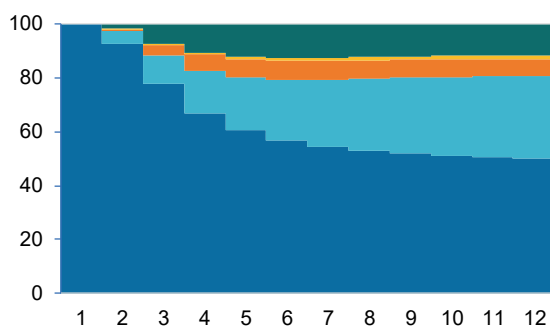
Rysunek 6. Funkcje reakcji oczekiwań inflacyjnych konsumentów na szoki



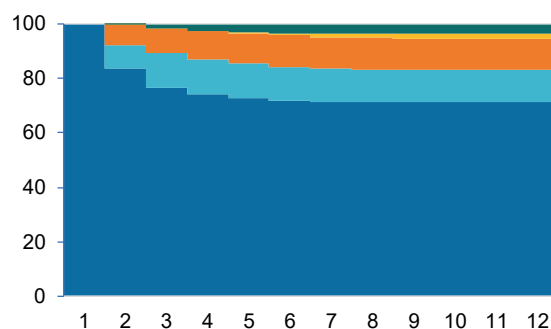
Uwagi: Wykresy przedstawiają reakcję oczekiwań inflacyjnych na różne szoki w poszczególnych kwartałach po wystąpieniu szoku (linia ciągła). Linie przerywane oznaczają przedział wyznaczony przez oszacowaną reakcję +/- dwa odchylenia standardowe. Wielkość szoku to 1 odchylenie standardowe.

Rysunek 7. Dekompozycja wariancji oczekiwań inflacyjnych różnych grup podmiotów

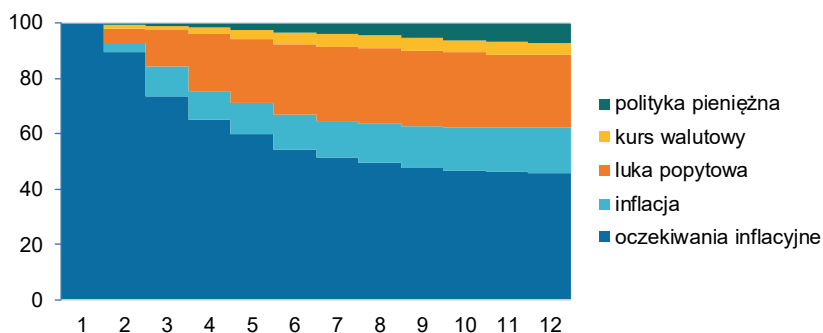
A. Eksperci



B. Przedsiębiorstwa



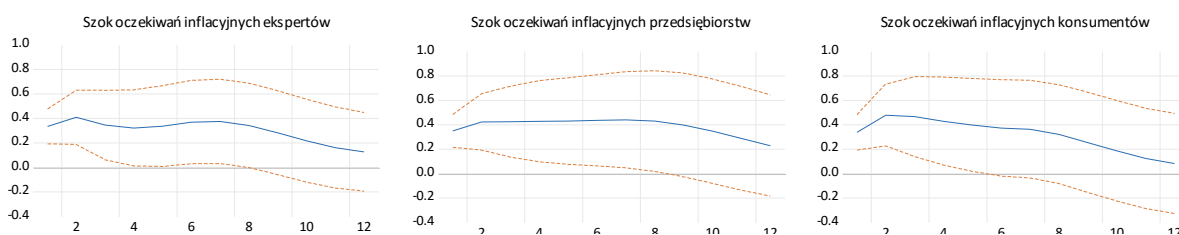
C. Konsumenci



Uwagi: Na osi poziomej są podane kwartały po wystąpieniu szoku. Dekompozycja wariancji na podstawie modeli SVAR.

Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 8. Funkcja reakcji inflacji CPI na szok oczekiwań inflacyjnych



Uwagi: Wykresy przedstawiają reakcję inflacji CPI na szok oczekiwań inflacyjnych w poszczególnych kwartałach po wystąpieniu szoku (linia ciągła). Linie przerywane oznaczają przedział wyznaczony przez oszacowaną reakcję +/- dwa odchylenia standardowe. Wielkość szoku to 1 odchylenie standardowe. Na osi poziomej podano liczbę kwartałów po szoku.

2. Analiza zakotwiczenia średnio- i długoterminowych oczekiwań inflacyjnych

Model

Zakotwiczenie oczekiwań inflacyjnych badamy wykorzystując wyniki Ankiety Makroekonomicznej NBP, która jest przeprowadzana wśród ekspertów (profesjonalnych prognostów). Bierzemy pod uwagę oczekiwania krótkoterminowe (inflacja oczekiwana w roku bieżącym, $h=rb$, oraz za 4 kwartały, $h=+4q$), średnioterminowe (inflacja oczekiwana za 8 kwartałów, $h=+8q$) oraz długoterminowe (inflacja oczekiwana za 3 i 4 lata, implikowana⁶, $h=LT$).

O zakotwiczeniu oczekiwań inflacyjnych wnioskujemy na podstawie wyników trzech rodzajów regresji (por. Apokoritis *et al.*, 2019, oraz Bueno i Formai, 2018). W pierwszej z nich (równanie 2), sprawdzamy jak oczekiwania inflacyjne (π_t^h) w różnych horyzontach (h) reagują na zmiany inflacji bieżącej (π_t), znanej w momencie przeprowadzania ankiety. Równanie jest wyrażone w przyrostach zmiennych (Δ), gdyż interesują nas zmiany między dwoma rundami ankiety. W przypadku zakotwiczonych oczekiwań, inflacja bieżąca ma wpływ jedynie na oczekiwania krótkoterminowe i średnioterminowe, zaś oczekiwania długoterminowe powinny nie reagować na bieżące odczyty inflacji. Podobnego efektu spodziewamy się w przypadku niespodzianek inflacyjnych⁷, tj. różnicy między odczytem inflacji GUS a wartością oczekiwaną przez prognostów (π_t^s) (równanie 3). W ostatnim równaniu (równanie 4) sprawdzamy czy długoterminowe oczekiwania inflacyjne (π_t^{LT}) reagują na zmiany oczekiwań krótkoterminowych (π_t^{+4q}). O zakotwiczeniu oczekiwań świadczy brak ich reakcji na zmiany oczekiwań krótkoterminowych. Wszystkie równania estymujemy na danych indywidualnych (indeks i oznacza prognozę pojedynczego eksperta). W modelu szacowanym dla prognoz w roku bieżącym dodatkowo uwzględniamy zmienne zero-jedynkowe dla poszczególnych kwartałów, aby zmniejszyć wpływ skracającego się horyzontu.

$$\Delta\pi_{it}^h = c_i + \beta\Delta\pi_t + \varepsilon_{it} \quad (2)$$

$$\Delta\pi_{it}^h = c_i + \beta\pi_t^s + \varepsilon_{it} \quad (3)$$

⁶ Jest ona wyznaczana na podstawie prognoz inflacji średniorocznej w ciągu najbliższych pięciu lat oraz inflacji średniorocznej w roku bieżącym i dwóch kolejnych.

⁷ Niespodzianki inflacyjne pochodzą z ankiety Bloomberg. Jest to różnica między odczytem GUS wskaźnika inflacji w danym miesiącu a medianą prognoz inflacji. Ponieważ AM NBP jest przeprowadzana z częstotliwością kwartalną, sumujemy niespodzianki inflacyjne w kwartale.

$$\Delta\pi_{it}^{LT} = c_i + \beta\Delta\pi_{it}^{+4q} + \varepsilon_{it} \quad (4).$$

Wyniki

Wyniki estymacji powyższych równań przedstawia Tabela 2. Wynika z nich, że oczekiwania długoterminowe nie reagują na zmiany inflacji bieżącej ani na niespodziewany komponent odczytów inflacji, w przeciwieństwie do oczekiwań krótko- i średnioterminowych. Oczekiwania średnioterminowe reagują słabiej na zmiany bieżącej inflacji, ale już reakcja na niespodzianki inflacyjne jest podobna w przypadku obu horyzontów. Długoterminowe oczekiwania inflacyjne nie reagują również na zmiany oczekiwań krótkoterminowych.

Tabela 2. Zakotwiczenie prognoz ekspertów – wyniki estymacji

	Zmienna objaśniana (horyzont prognoz)			
	$h = rb$	$h = +4q$	$h = +8q$	$h = LT$
równanie (2)				
$\Delta\pi_t$	0,67*** (0,04)	0,19*** (0,03)	0,13*** (0,03)	-0,09 (0,06)
R^2	0,39	0,11	0,07	0,01
N	533	529	522	525
równanie (3)				
π_t^e	0,88*** (0,06)	0,23*** (0,07)	0,23*** (0,06)	-0,08 (0,10)
R^2	0,14	0,03	0,04	0,00
N	533	529	522	525
równanie (4)				
$\Delta\pi_{it}^{+4q}$	x	x	x	0,02 (0,07)
R^2				0,00
N				516

Uwagi: estymator FE z odpornymi błędami. W nawiasach podano błąd standardowy oszacowania. ***/**/* oznacza statystyczną istotność oszacowania na poziomie 1%, 5% i 10%. Próba obejmuje okres od 3. kw. 2011 do 3. kw. 2019 r.

Źródło: obliczenia własne.

Literatura

- Apokoritis N., Galati G., Moessner R., Teppa F. (2019), *Inflation expectations anchoring: new insights from micro evidence of a survey at high-frequency and of distributions*, BIS Working Papers No 809.
- Baranowski P., Doryń W., Łyziak T., Stanisławska E. (2020), *Words and deeds in managing expectations: Empirical evidence on an inflation targeting economy*, NBP Working Paper 326, Narodowy Bank Polski.
- Buono I., Formai S. (2018), *The evolution of the anchoring of inflation expectations*, *Journal of Macroeconomics* 57(3), 39-54.
- Cerisola M., Gelos G. (2009), *What drives inflation expectations in Brazil? An empirical analysis*, *Applied Economics*, 41(10), 1215-1227.
- Chmielewski T., Kapuściński M., Kocięcki A., Łyziak T., Przystupa J., Stanisławska E., Wróbel E. (2018), *Mechanizm transmisji polityki pieniężnej w Polsce. Stan wiedzy w 2017 roku*, Materiały i Studia NBP 330, Narodowy Bank Polski.
- Gábrriel P. (2010), *Household inflation expectations and inflation dynamics*, MNB Working Papers 2010/12, Magyar Nemzeti Bank.
- Gnan E., Scharler J., Silgoner M. (2009), *Inflation expectations – role and measurement for monetary policy*, *Monetary Policy & the Economy*, 41-67.
- Łyziak T. (2016), *Financial crisis, low inflation environment and short-term inflation expectations in Poland*, *Bank i Kredyt*, 47(4), 285-300.
- Mankiw N. G., Reis R. (2002), *Sticky information versus sticky prices: A proposal to replace the New Keynesian Phillips Curve*, *Quarterly Journal of Economics*, 117, 1295-1328.
- Mehra Y. P., Herrington C. (2008), *On the sources of movements in inflation expectations: A few insights from a VAR model*, *FRB Richmond Economic Quarterly*, 94(2), Spring 2008, 121-146.
- Stanisławska E. (2018), *Czy pytając konsumentów o wartość przewidywanej inflacji, można uzyskać wiarygodne i użyteczne informacje?*, *Bank i Kredyt* 49(5).
- Stanisławska E., Paloviita M., Łyziak T. (2019), *Assessing reliability of aggregated inflation views in the European Commission Consumer Survey*, NBP Working Papers, 313, Narodowy Bank Polski.
- Ueda K. (2010), *Determinants of households' inflation expectations in Japan and the United States*, *Journal of the Japanese and International Economies*, 24(4), 503-518.